

doi: <https://doi.org/10.15407/dopovidi2017.04.019>

УДК 539.3

А.М. Багно

Институт механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины, Киев

E-mail: alexbag2016@gmail.com

О влиянии вязкой жидкости на квазилэмбовские волны в упругом слое, взаимодействующем с жидким полупространством

Представлено академиком НАН Украины А.Н. Гузем

Рассмотрена задача о распространении квазилэмбовских волн в упругом слое, взаимодействующем с полупространством вязкой сжимаемой жидкости. На основе трехмерных линеаризованных уравнений Навье—Стокса для вязкой жидкости и линейных уравнений классической теории упругости для упругого слоя построены дисперсионные кривые и исследовано распространение квазилэмбовских волн в широком диапазоне частот. Проанализировано влияние вязкости жидкости и толщины упругого слоя на фазовые скорости и коэффициенты затухания квазилэмбовских мод. Развитый подход и полученные результаты позволяют для волновых процессов установить пределы применения модели идеальной сжимаемой жидкости. Числовые результаты приведены в виде графиков и дан их анализ.

Ключевые слова: дисперсия волн, упругий слой, полупространство вязкой сжимаемой жидкости, квазилэмбовские моды.

Значительное практическое использование акустических волн ставит задачу учета свойств, присущих реальным средам. К числу таких факторов относится вязкость жидкости. В настоящей работе модель вязкой сжимаемой ньютоновской жидкости привлекается для исследования распространения волн в системе жидкое полупространство — упругий слой. При этом используются трехмерные линеаризованные уравнения Навье—Стокса для жидкости и линейные уравнения классической теории упругости для твердого тела. Предполагается, что жидкость находится в состоянии покоя и тепловые эффекты не учитываются. В качестве подхода выбраны постановки задач и метод, основанные на применении представлений общих решений линеаризованных уравнений движения вязкой сжимаемой жидкости и упругого тела, полученные в работах [1—5].

Постановка задачи. Рассмотрим задачу о распространении акустических волн в гидроупругой системе, состоящей из полупространства ньютоновской вязкой сжимаемой жидкости и изотропного упругого слоя. Решение получим с привлечением трехмерных линейных уравнений классической теории упругости для твердого тела и линеаризованных уравнений

Навье—Стокса для жидкости, находящейся в состоянии покоя [1–5]. В рамках принятых моделей основные соотношения для системы упругое тело — вязкая сжимаемая жидкость будут иметь вид:

$$\mu \Delta \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) - \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = 0, \quad \sigma_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial u_j} + \frac{\partial u_j}{\partial u_i} \right) + \lambda \delta_{ij} \nabla \cdot \mathbf{u}; \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \mathbf{v}^* \Delta \mathbf{v} + \frac{1}{\rho_0} \nabla p - \frac{1}{3} \mathbf{v}^* \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) = 0; \quad (2)$$

$$\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho^*}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial \rho^*} = a_0^2, \quad a_0 = \text{const};$$

$$P_{ij} = -p \delta_{ij} + \lambda^* \delta_{ij} \nabla \cdot \mathbf{v} + \mu^* \left(\frac{\partial v_i}{\partial z_j} + \frac{\partial v_j}{\partial z_i} \right), \quad \lambda^* = -\frac{2}{3} \mu^*. \quad (3)$$

Здесь введены следующие обозначения: u_i — компоненты вектора перемещений упругого тела \mathbf{u} ; ρ — плотность материала упругого слоя; λ и μ — константы Ляме материала твердого тела; v_i — составляющие вектора возмущений скорости жидкости \mathbf{v} ; ρ^* и p — возмущения плотности и давления в жидкости; \mathbf{v}^* и μ^* — кинематический и динамический коэффициенты вязкости жидкости; ρ_0 и a_0 — плотность и скорость звука в жидкости в состоянии покоя; P_{ij} и σ_{ij} — составляющие напряжений, соответственно, в жидкости и упругом теле.

Равенства (1) описывают поведение упругого тела. Малые колебания вязкой сжимаемой жидкости, находящейся в состоянии покоя и без учета тепловых эффектов, описывают соотношения (2) и (3).

Далее предположим, что упругий слой занимает объем: $-\infty < z_1 < \infty$, $0 \leq z_2 \leq h$, $-\infty < z_3 < \infty$ и контактирует с полупространством вязкой сжимаемой жидкости, заполняющей объем: $-\infty < z_1 < \infty$, $-\infty < z_2 \leq 0$, $-\infty < z_3 < \infty$. Примем, что внешние силы, действующие на указанные среды, распределены равномерно вдоль оси oz_3 . В этом случае задача является плоской и можно ограничиться изучением процесса распространения волн в плоскости oz_1z_2 . Следовательно, указанная задача сводится к решению системы уравнений (1) — (3) при следующих граничных условиях:

$$\sigma_{12} \Big|_{z_2=h} = 0, \quad \sigma_{22} \Big|_{z_2=h} = 0, \quad \sigma_{12} \Big|_{z_2=0} = P_{12} \Big|_{z_2=0}, \quad \sigma_{22} \Big|_{z_2=0} = P_{22} \Big|_{z_2=0}; \quad (4)$$

$$v_1 \Big|_{z_2=0} = \frac{\partial u_1}{\partial t} \Big|_{z_2=0}, \quad v_2 \Big|_{z_2=0} = \frac{\partial u_2}{\partial t} \Big|_{z_2=0}. \quad (5)$$

В дальнейшем для решения задачи гидроупругости воспользуемся представлениями общих решений для упругих тел и вязкой сжимаемой жидкости, предложенными в работах [1–5],

$$u_1 = -\frac{\partial^2 \chi_1}{\partial z_1 \partial z_2}, \quad u_2 = \left(\frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\mu}{\lambda + \mu} \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} - \frac{\rho}{\lambda + \mu} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \chi_1;$$

$$v_1 = \frac{\partial^2 \chi_2}{\partial z_1 \partial t} + \frac{\partial^2 \chi_3}{\partial z_2 \partial t}, \quad v_2 = \frac{\partial^2 \chi_2}{\partial z_2 \partial t} - \frac{\partial^2 \chi_3}{\partial z_1 \partial t},$$

где введенные потенциалы χ_i являются решениями следующих уравнений:

$$\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} - \frac{\rho}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\lambda + 2\mu}{\mu} \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} - \frac{\rho}{\mu} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) - \frac{(\lambda + \mu)^2}{\mu(\lambda + 2\mu)} \frac{\partial^4}{\partial z_1^2 \partial z_2^2} \right] \chi_1 = 0;$$

$$\left[\left(1 + \frac{4v^*}{3a_0^2} \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} \right) - \frac{1}{a_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \chi_2 = 0, \quad \left[\frac{\partial}{\partial t} - v^* \left(\frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} \right) \right] \chi_3 = 0.$$

Для анализа распространения возмущений, гармонически изменяющихся во времени, решения системы уравнений разыскиваются в классе бегущих волн

$$\chi_i = X_i(z_2) \exp[i(kz_1 - \omega t)] \quad (i = \overline{1,3}),$$

где k ($k = \beta + i\gamma$) – волновое число; γ – коэффициент затухания волны; ω – круговая частота; $i^2 = -1$.

Заметим, что выбранный в данной работе класс гармонических волн, являясь наиболее простым и удобным в теоретических исследованиях, не ограничивает общности полученных результатов, поскольку линейная волна произвольной формы, как известно, может быть представлена набором гармонических составляющих. Далее решаем две задачи Штурма – Лиувилля на собственные значения для уравнений движения упругого тела и жидкости, а также находим соответствующие собственные функции. После подстановки решений в граничные условия (4) и (5) получаем однородную систему линейных алгебраических уравнений относительно произвольных постоянных. Исходя из условия существования нетривиального решения, приравнявая определитель системы к нулю, получаем дисперсионное уравнение

$$\det \| e_{mn}(c, \gamma, \lambda, \mu, \rho, \rho_0, a_0, \mu^*, \omega h/c_s) \| = 0 \quad (m, n = \overline{1,6}), \quad (6)$$

где c – фазовая скорость мод в гидроупругой системе; h – толщина упругого слоя; c_s ($c_s^2 = \mu/\rho$) – скорость волны сдвига в материале упругого тела.

Как известно, в неограниченном сжимаемом упругом теле существуют продольная и поперечная волны. В идеальной сжимаемой жидкой среде распространяется только продольная волна. В вязкой сжимаемой жидкости существуют как продольная волна, так и волна сдвига. Именно эти волны, взаимодействуя между собой на свободных граничных поверхностях, а также на поверхности контакта сред, порождают сложное волновое поле в гидроупругой системе.

Заметим, что полученное дисперсионное уравнение (6) является наиболее общим и из него можно получить соотношения для ряда частных случаев, которые рассмотрены в работах [6–8]. В частности, если a_0 устремить к бесконечности, то (6) переходит в уравнение для определения параметров мод в случае взаимодействия с вязкой несжимаемой жидкостью. Если μ^* принять равным нулю, то из (6) получим результаты для гидроупругой системы с идеальной жидкостью. Устремив h к бесконечности, получим соотношение для определения скорости поверхностной волны Стоунли – Шольте [8]. При $\rho_0 = 0$ равенство (6) перейдет в уравнение Лэмба [8]. Если дополнительно устремить h к бесконечности, получим соотношение для определения скоростей поверхностных волн Рэлея [8].

Числовые результаты. В дальнейшем дисперсионное уравнение (6) решаем численно. При этом расчеты проводим для двух гидроупругих систем. Первая состоит из эластич-

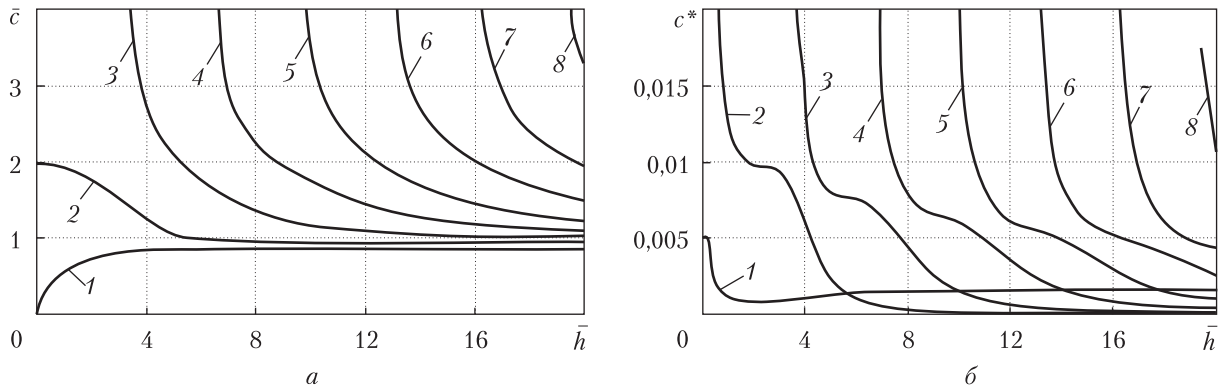


Рис. 1

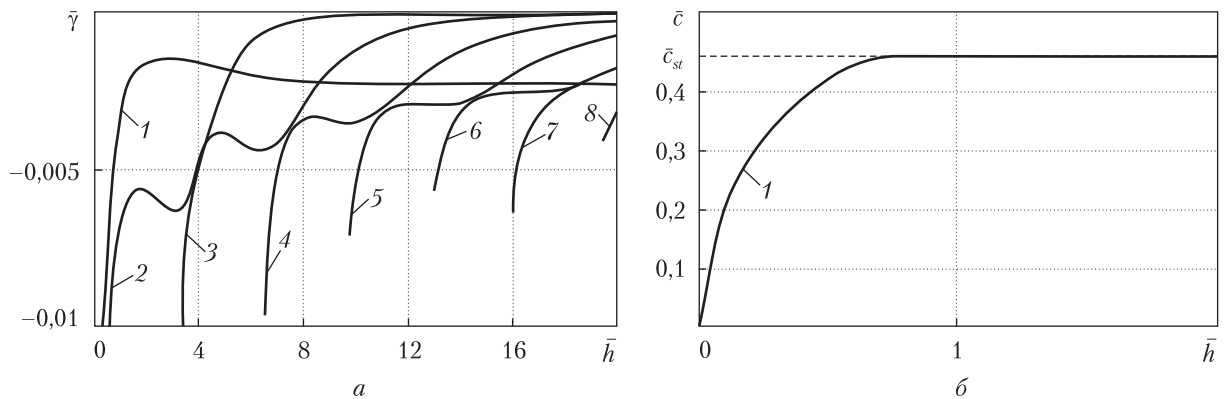


Рис. 2

ной резины и воды. Ее механические параметры выбираем следующими: упругий слой — $\rho = 1200 \text{ кг/м}^3$, $\lambda = 6 \cdot 10^9 \text{ Па}$, $\mu = 1,2 \cdot 10^6 \text{ Па}$; полупространство жидкости — $\rho_0 = 1000 \text{ кг/м}^3$, $a_0 = 1459,5 \text{ м/с}$, $\bar{\mu}^* = 0,001$, $\bar{a}_0 = a_0/c_s = 46,153442$. Этот гидроупругий волновод характеризуется тем, что материал упругого слоя (резины) является податливым и мягким. Вторая представляет собой волновод из стали и воды. При этом параметры выбираем такими: упругий слой — $\rho = 7800 \text{ кг/м}^3$, $\lambda = 9,26 \cdot 10^{10} \text{ Па}$, $\mu = 7,75 \cdot 10^{10} \text{ Па}$; жидкость — $\rho_0 = 1000 \text{ кг/м}^3$, $a_0 = 1459,5 \text{ м/с}$, $\bar{\mu}^* = 0,001$, $\bar{a}_0 = 0,463021$. Этот волновод отличается тем, что материал упругого слоя (сталь) относится к разряду жестких.

Результаты вычислений представлены на рис. 1–4. На рис. 1, а – 2, а представлены графики, полученные для гидроупругой системы, состоящей из слоя резины (податливый материал) и воды.

Графики на рис. 1, а иллюстрируют влияние идеальной жидкости на волновые характеристики гидроупругой системы. На нем изображены дисперсионные кривые, отражающие зависимости безразмерных величин фазовых скоростей \bar{c} ($\bar{c} = c/c_s$) от безразмерной величины толщины упругого слоя \bar{h} ($\bar{h} = \omega h/c_s$).

Характер влияния вязкости жидкости ($\bar{\mu}^* = 0,001$) на скорости мод в гидроупругой системе иллюстрируют графики на рис. 1, б, на котором представлены зависимости относительных изменений величин фазовых скоростей мод c^* ($c^* = (c_i - c_v)/c_i$, c_i — фазовая ско-

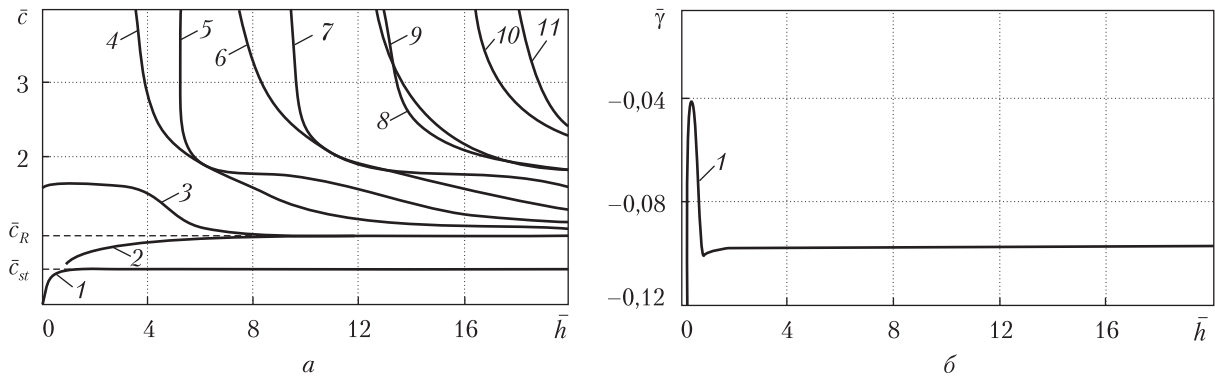


Рис. 3

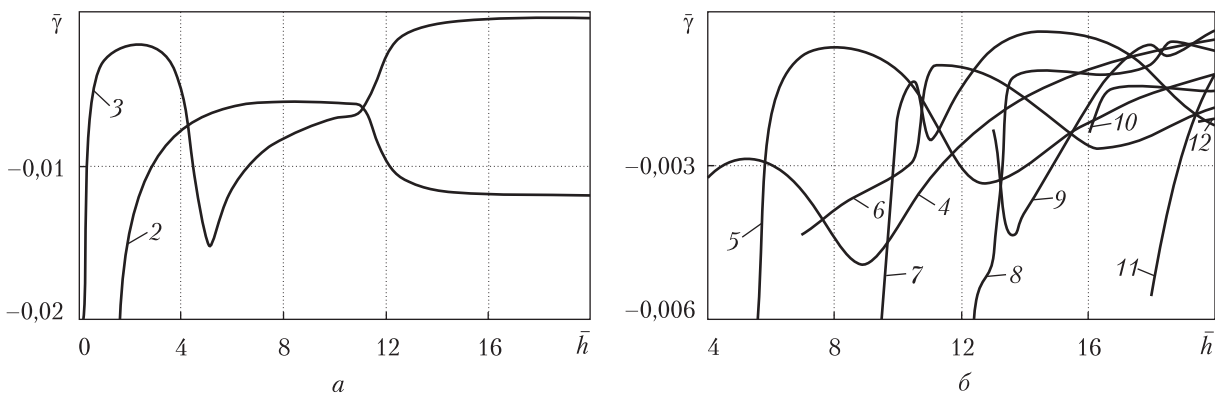


Рис. 4

рость волн в гидроупругой системе с идеальной жидкостью; c_v — фазовая скорость мод в системе с вязкой жидкостью) от безразмерной величины толщины упругого слоя \bar{h} .

На рис. 2, а приведены зависимости безразмерных величин коэффициентов затухания мод $\bar{\gamma}$ ($\bar{\gamma} = \gamma/k_s$, k_s — волновое число волны сдвига в материале упругого слоя) от безразмерной величины толщины упругого слоя \bar{h} и $\bar{\mu}^* = 0,001$.

Результаты, полученные численно для гидроупругого волновода, упругий слой которого из стали (жесткий материал), представлены в виде графиков на рис. 2, б — 4, б.

На рис. 2, б для упругого слоя, взаимодействующего с полупространством идеальной жидкости, приведен график зависимости безразмерной величины фазовой скорости единственной первой квазилэмбовской моды \bar{c} от безразмерной величины толщины упругого слоя \bar{h} . На этом рисунке для наглядности штриховой линией отмечена асимптотика, к которой стремится фазовая скорость этой моды при возрастании толщины.

Влияния вязкости жидкости ($\bar{\mu}^* = 0,001$) на скорости квазилэмбовских мод в гидроупругой системе иллюстрируют графики на рис. 3, а. На нем представлены зависимости безразмерных величин фазовых скоростей волн \bar{c} от безразмерной величины толщины упругого слоя \bar{h} . Здесь же для наглядности штриховыми линиями отмечены асимптотики, к которым стремятся фазовые скорости первой, второй и третьей мод при возрастании толщины.

Зависимости безразмерных величин коэффициентов затухания мод $\bar{\gamma}$ от безразмерной величины толщины упругого слоя \bar{h} при $\bar{\mu}^* = 0,001$ приведены на рис. 3, б — 4, б.

Анализ числовых результатов. Графики, приведенные на рис. 1, а для упруго-жидкостной системы резина — вода, показывают, что в гидроупругом волноводе при увеличении толщины упругого слоя \bar{h} скорость моды 1, распространяющейся вдоль границы контакта сред, стремится к скорости волны Стоунли \bar{c}_{st} ($\bar{c}_{st} = c_{st}/c_s = 0,859257$). Относительно поведения этой моды в высокочастотной части спектра необходимо отметить следующее. Как показано в работе [9], фазовая скорость и структура волны Стоунли при взаимодействии твердого и жидкого полупространств зависят от механических параметров гидроупругой системы и определяются соотношением между скоростью волны звука в жидкости и скоростью волны Рэлея в твердом полупространстве. В рассматриваемом случае механические параметры гидроупругой системы податливый упругий слой — вода таковы, что скорость распространения звуковой волны в жидкости \bar{a}_0 ($\bar{a}_0 = 46,153442$) больше скорости квази-рэлеевской волны \bar{c}_R ($\bar{c}_R = c_R/c_s = 0,955318$). Согласно анализу кинематических характеристик поверхностных волн [9] это приводит к тому, что в высокочастотной части спектра глубина проникновения квазиповерхностной моды 1, являющейся волной типа Стоунли, в упругое тело больше глубины проникновения в жидкость. Поэтому мода 1, распространяясь вдоль границы контакта сред, локализуется, преимущественно, в приповерхностных областях упругого слоя, а также частично в жидкости. Мода 2 распространяется в упругом слое вдоль его свободной поверхности. Скорость ее стремится к скорости волны Рэлея \bar{c}_R ($\bar{c}_R = 0,955318$) сверху. Скорости всех мод высокого порядка стремятся к скорости волны сдвига в материале твердого тела \bar{c}_s . При этом с увеличением толщины, как известно [8], в них преобладают поперечные смещения, амплитуда которых на поверхностях слоя стремится к нулю по сравнению с их амплитудами в толще слоя, движения в модах высокого порядка смещаются от поверхности внутрь слоя и локализуются в его толще.

Из графического материала, представленного на рис. 1, б и 2, а, непосредственно следует, что влияние вязкой жидкости на параметры волнового процесса наибольшее в окрестности частот зарождения квазилэмбовских мод. С увеличением толщины упругого слоя воздействие вязкости на величины фазовых скоростей всех мод (кроме первой) уменьшается.

График на рис. 2, б получен для упруго-жидкостной системы, состоящей из стального (жесткий материал) упругого слоя и полупространства идеальной сжимаемой жидкости. Он показывает, что в случае, когда между механическими параметрами компонентов гидроупругой системы выполняется условие $\bar{a}_0 = 0,463021 < \bar{c}_R = 0,923008$, в упругом слое (жесткий материал), взаимодействующем с идеальным жидким полупространством, без демпфирования распространится лишь одна низшая мода. Она распространяется в приповерхностной области жидкости. Ее скорость с ростом толщины упругого слоя (частоты) \bar{h} стремится к скорости волны Стоунли \bar{c}_{st} ($\bar{c}_{st} = 0,462886$), которая несколько меньше скорости волны звука в жидкости \bar{a}_0 ($\bar{a}_0 = 0,463021$).

Из графического материала, представленного на рис. 3, а, следует, что в случае взаимодействия жесткого упругого слоя с вязким жидким полупространством в гидроупругой системе распространяются не только низшая мода 1, но и множество квазилэмбовских мод высокого порядка. При этом с увеличением толщины упругого слоя \bar{h} скорость моды 1, распространяющейся вдоль границы контакта сред, стремится к скорости волны Стоунли \bar{c}_{st} ($\bar{c}_{st} = 0,461819$) снизу. В рассматриваемом случае механические параметры гидроупругой системы сталь (жесткий материал) — вода таковы, что скорость распространения

волны звука в жидкости \bar{a}_0 ($\bar{a}_0 = 0,463021$) меньше скорости квазирэлеевской волны \bar{c}_R ($\bar{c}_R = 0,922506$). Согласно результатам, полученным в работе [9] для волн Стоунли, это приводит к тому, что в высокочастотной части спектра глубина проникновения квазиповерхностной моды 1 (волна типа Стоунли) в жидкость значительно больше глубины проникновения в упругое тело. Поэтому мода 1, распространяясь вдоль границы контакта сред, локализуется, преимущественно, в приповерхностной области жидкого полупространства. Вследствие того, что ни одна из низших мод не проникает в твердое тело в приповерхностной области упругого слоя, граничащей с жидкостью, распространяется мода 2. Скорость этой моды стремится к скорости волны Рэлея \bar{c}_R ($\bar{c}_R = 0,922506$) снизу, как и в случае твердого слоя, невзаимодействующего с жидкостью. Скорость моды 3, распространяющейся в упругом слое вдоль его свободной поверхности, стремится к скорости волны Рэлея \bar{c}_R ($\bar{c}_R = 0,922506$) сверху. Скорости всех мод высокого порядка стремятся к скорости волны сдвига в материале твердого тела и, как указывалось выше, с ростом частоты их движения локализуются в толще упругого слоя. Характерной особенностью всех мод, возникающих при взаимодействии упругого слоя с полупространством вязкой жидкости, в отличие от системы с идеальной жидкостью, является то, что они распространяются с затуханием.

Графики, приведенные на рис. 4, показывают, что в этой гидроупругой системе также, как и в случае упругого слоя из податливого материала, влияние вязкой жидкости на параметры волнового процесса наибольшее в окрестности частот зарождения квазилэмбовских мод. Для всех мод (кроме первой и второй) с увеличением толщины упругого слоя воздействие вязкости на величины их фазовых скоростей уменьшается, и распространяются они с все меньшим затуханием.

Особенности влияния вязкости жидкости на фазовые скорости и дисперсию квазилэмбовских волн в гидроупругих волноводах. Графики, приведенные на рис. 1, б и 3, а – 4, б, отражают особенности взаимодействия волновых движений в упругом слое с вязким жидким полупространством. Как уже упоминалось, движения в модах, распространяющихся в упругом слое, начиная с третьей для податливого материала и с четвертой для жесткого материала, с возрастанием толщины удаляются от его поверхностей и локализуются в его толще. Это обстоятельство является основным фактором, приводящим к ослаблению влияния вязкости жидкости на фазовые скорости и к уменьшению коэффициентов затухания этих мод. В противоположность модам высокого порядка мода 1 как для податливого материала, так и для жесткого материала с возрастанием толщины устремляется к границе раздела сред и становится квазиповерхностной волной типа Стоунли. Процессами, происходящими в пограничном слое, объясняется характер влияния вязкости жидкости, проявляющийся в уменьшении фазовой скорости и увеличении коэффициента затухания этой моды. Кроме того, анализ также показывает, что в тех точках мод, где преобладающими являются движения (сдвиговые смещения) на границе раздела сред, влияние вязкости наибольшее и коэффициентов затухания, а также относительные изменения величин скоростей принимают максимальное значение. В точках волны с малыми поверхностными сдвиговыми смещениями соответственно и влияние вязкости наименьшее. Из графиков также следует, что вязкость жидкого полупространства, как отмечалось ранее, вызывает изменение критических частот мод и смещение их дисперсионных кривых в длинноволновую часть спектра. Это обуславливает значительное изменение фазовых скоростей мод в окрестности величин толщин (частот), при которых они зарождаются.

Сравнивая графики, приведенные на рис. 1, а и 2, б, видим, что в случае взаимодействия упругого слоя с идеальным жидким полупространством соотношение между величинами скорости волны звука в жидкости и скорости квазирэлеевской волны является критерием, определяющим возможность существования квазилэмбовских волн в гидроупругой системе. При $\bar{a}_0 > \bar{c}_R$ (рис. 1, а) жидкость не препятствует энергетическому обмену между поверхностями податливого упругого слоя, что способствует возникновению в гидроупругой системе нормальных квазилэмбовских волн. В случае упругого слоя из жесткого материала при $\bar{a}_0 < \bar{c}_R$ (рис. 2, б) жидкость препятствует энергетическому обмену между его поверхностями. Это приводит к тому, что в упругом слое не формируются нормальные волны и в гидроупругой системе не возникает полный спектр квазилэмбовских мод, распространяющихся без демпфирования. Как видим, при взаимодействии упругих слоев как из податливого (рис. 1, б), так и из жесткого материала (рис. 3, а) с вязким жидким полупространством в гидроупругих системах при любых соотношениях между указанными механическими параметрами возникают квазилэмбовские моды высокого порядка, распространяющиеся с затуханием. Отметим также, что в случае гидроупругой системы с упругим слоем из жесткого материала вязкая жидкость (рис. 3, а) в отличие от идеальной жидкости (рис. 2, б) способствует формированию квазилэмбовских мод. При этом первая мода (волна типа Стоунли) распространяется в приповерхностной области жидкого полупространства, а моды высокого порядка — в упругом слое. В этом случае волноводами служат не только упругий слой, но и приповерхностная область жидкости.

Таким образом, одной из основных особенностей влияния вязкой жидкости на волновой процесс в упругом слое, взаимодействующем с жидким полупространством, является то, что она в отличие от идеальной жидкости способствует энергетическому обмену между поверхностями упругого слоя. Это обуславливает формирование в упругом слое нормальных волн и возникновение в гидроупругой системе полного спектра квазилэмбовских мод, распространяющихся с затуханием. Полученные результаты позволяют сделать вывод о том, что при проведении расчетов для реальных жидких сред применение модели идеальной жидкости к гидроупругому волноводу с упругим слоем из жесткого материала (сталь) может привести к получению весьма неточных как количественных, так и качественных результатов. Развитый подход и полученные результаты позволяют для волновых процессов установить пределы применения модели идеальной сжимаемой жидкости.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. *Guz A.N.* Aerohydroelasticity problems for bodies with initial stresses. *Int. Appl. Mech.* 1980. **16**, No 3. P. 175–190.
2. *Гузь А.Н.* Упругие волны в телах с начальными напряжениями. В 2-х томах. Киев: Наук. думка, 1986.
3. *Гузь А.Н.* Упругие волны в телах с начальными (остаточными) напряжениями. Киев: А.С.К., 2004. 672 с.
4. *Гузь А.Н.* Динамика сжимаемой вязкой жидкости. Киев: А.С.К., 1998. 350 с.
5. *Guz A.N.* Dynamics of compressible viscous fluid. Cambridge: Cambridge Scientific Publishers, 2009. 428 p.
6. *Guz A.N., Zhuk A.P., Bagnò A.M.* Dynamics of elastic bodies, solid particles, and fluid parcels in a compressible viscous fluid (review). *Int. Appl. Mech.* 2016. **52**, No 5. P. 449–507.
7. *Ottenio M., Destrade M., Ogden R.W.* Acoustic waves at the interface of a pre-stressed incompressible elastic solid and a viscous fluid. *Int. J. of Non-Linear Mech.* 2007. **42**, No 2. P. 310–320.
8. *Викторов И.А.* Звуковые поверхностные волны в твердых телах. Москва: Наука, 1981. 288 с.

9. Волькенштейн М.М., Левин В.М. Структура волны Стоунли на границе вязкой жидкости и твердого тела. *Акуст. журн.* 1988. **34**, № 4. С. 608–615.

Поступило в редакцию 05.07.2016

REFERENCES

1. Guz, A. N. (1980) Aerohydroelasticity problems for bodies with initial stresses. *Int. Appl. Mech.*, 16, No 3, pp. 175-190.
2. Guz, A. N. (1986) Elastic waves in bodies with initial stresses. In 2 vol., Kiev: Naukova Dumka (in Russian).
3. Guz, A. N. (2004) Elastic waves in bodies with initial (residual) stresses, Kiev: A.C.K. (in Russian).
4. Guz, A. N. (1998) Dynamics of compressible viscous fluid, Kiev: A.C.K. (in Russian).
5. Guz, A. N. (2009) Dynamics of compressible viscous fluid, Cambridge: Cambridge Scientific Publishers.
6. Guz, A. N., Zhuk, A. P., Bagno, A. M. (2016) Dynamics of elastic bodies, solid particles, and fluid parcels in a compressible viscous fluid (review). *Int. Appl. Mech.*, 52, No 5, pp. 449-507.
7. Ottenio, M., Destrade, M., Ogden, R.W. (2007) Acoustic waves at the interface of a pre-stressed incompressible elastic solid and a viscous fluid. *Int. J. of Non-Linear Mech*, 42, No 2, pp. 310-320.
8. Viktorov, I. A. (1981) Sound surface waves in solids, Moscow: Nauka (in Russian).
9. Volkenstein, M. M., & Levin V. M. (1988) Structure of Stoneley wave on the boundary of a viscous liquid and a solid. *Acoustic J.*, 34, No 4, pp. 608-615 (in Russian).

Received 05.07.2016

О.М. Багно

Институт механики ім. С.П. Тимошенка НАН України, Київ
E-mail: alexbag2016@gmail.com

ПРО ВПЛИВ В'ЯЗКОЇ РІДИНИ НА КВАЗІЛЕМБОВСЬКІ ХВИЛІ У ПРУЖНОМУ ШАРІ, ЯКИЙ ВЗАЄМОДІЄ З РІДКИМ ПІВПРОСТОРОМ

Розглянута задача про поширення квазілэмбовських хвиль у пружному шарі, що взаємодіє з півпростором в'язкої стисливої рідини. На основі тривимірних лінеаризованих рівнянь Нав'є – Стокса для в'язкої рідини та лінійних рівнянь класичної теорії пружності для пружного шару побудовано дисперсійні криві та досліджено поширення квазілэмбовських хвиль у широкому діапазоні частот. Проаналізовано вплив в'язкої стисливої рідини та товщини пружного шару на фазові швидкості та коефіцієнти загасання квазілэмбовських мод. Розвинутий підхід та отримані результати дозволяють для хвильових процесів встановити межі застосування моделі ідеальної стисливої рідини. Числові результати наведено у вигляді графіків та дано їх аналіз.

Ключові слова: дисперсія хвиль, пружний шар, півпростір в'язкої стисливої рідини, квазілэмбовські моди.

О.М. Вагно

S.P. Timoshenko Institute of Mechanics of the NAS of Ukraine, Kiev
E-mail: alexbag2016@gmail.com

ON THE INFLUENCE OF A VISCOUS FLUID ON QUASI-LAMB WAVES IN THE ELASTIC LAYER INTERACTING WITH A LIQUID HALF-SPACE

The problem on propagation of quasi-Lamb waves in the elastic layer that interacts with the half-space of a viscous compressible fluid is considered. The dispersion curves are constructed, and the propagation of quasi-Lamb waves over a wide range of frequencies is studied, by using the three-dimensional linearized Navier – Stokes equations for a viscous fluid and linear equations of the classical elasticity theory for an elastic layer. The influence of a viscous compressible fluid and of the thickness of the elastic layer on the phase velocities and attenuation coefficients of the quasi-Lamb waves is analyzed. The approach developed and the results obtained make it possible to establish limits for the wave processes, within which the model of an ideal compressible fluid can be applied. The numerical results are presented in the form of graphs, and their analysis is given.

Keywords: dispersion of waves, elastic layer, half-space of a viscous compressible fluid, quasi-Lamb modes.