ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

doi: https://doi.org/10.15407/dopovidi2017.03.018
УДК 510.6

А.П. Пынько

Институт кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины, Киев
Email: pynko@i.ua

Минимизация КНФ частично-монотонных булевых функций

Представлено академиком НАН Украины А.А. Летичевским

Булеву функцию назовем частично-монотонной, если она монотонна относительно некоторых из своих аргументов и антимонотонна относительно остальных своих аргументов. Мы доказываем, что конъюнктивные нормальные формы частично-монотонных булевых функций можно минимизировать очень эффективно, используя лишь частично-монотонные дизъюнкты.

Ключевые слова: *булева функция, литерал, дизъюнкт, конъюнктивная нормальная форма, конъюнкт, дизъюнктивная нормальная форма.*

Булеву функцию с $n \geqslant 0$ аргументами $x_1, ..., x_n$ назовем *m-монотонной*, где $0 \leqslant m \leqslant n$, если она монотонна по своим (без ограничения общности, первым) m аргументам, но антимонотонна по остальным. Понятно, что *собственный* (т.е., не содержащий комплементарной пары $x_i, \neg x_i$, ни для какого $1 \leqslant i \leqslant n$) дизъюнкт является m-монотонным, если и только если он состоит из (не обязательно всех) литералов $x_1, ..., x_m, \neg x_{m+1} ..., \neg x_n$. Отметим, что чисто (анти)монотонные функции – это в точности n-монотонные (соответственно, 0-монотонные) функции. Типичным примером частично монотонной булевой функции, которая не является ни чисто монотонной ни чисто антимонотонной, является операция импликации $\neg x_2 \vee x_1$, а функции, которая не является частично-монотонной, – операция эквиваленции $(\neg x_2 \vee x_1) \wedge (\neg x_1 \vee x_2)$.

В данной работе мы показываем, что всякая конъюнктивная нормальная форма (КНФ) такой функции эквивалентна КНФ, состоящей из того же числа m-монотонных собственных дизъюнктов. Более того, минимальная КНФ получается из КНФ всех m-монотонных собственных дизъюнктов, превышающих (по-аргументно) рассматриваемую булеву функцию, путем выбора минимальных (по включению) дизъюнктов. Тем самым, в случае частично-монотонных булевых функций минимизация гораздо эффективнее, чем в общем случае [1, 2], поскольку фактически в нашем случае все дизъюнкты предварительно минимизированной КНФ, состоящей из всех минимальных дизъюнктов, превышающих заданную булеву функцию, оказываются ядерными. Представленные здесь результаты являются частным (двузначным) случаем результатов работы [3]. Однако, учитывая особый интерес алгебры логики в общем контексте дискретной математики [4], мы представляем здесь самодостаточное изложение материала, сопровождаемое непосредственными доказательствами.

Итак, рассмотрим m-монотонную функцию f. Начнем с доказательства следующих двух ключевых лемм, которые являются частными (двузначными) случаями лемм 2.7 и 2.12, соответственно, работы [3].

Лемма 1. *Пусть* $D \geqslant f$ *— собственный дизъюнкт. Тогда существует m-монотонный дизъюнкт* $f \leqslant D' \subseteq D$.

Доказательство. Положим $D' \triangleq D \cap \{x_1, ..., x_m, \neg x_{m+1} ..., \neg x_n\}$ (в дальнейшем, такой дизъюнкт D' будем называть *m-монотонизацией* D). Возьмем произвольные $a_1, ..., a_n \in \{0,1\}$. Определим новые значения $b_1, ..., b_n \in \{0, 1\}$ для всех $0 \leqslant i \leqslant n$ следующим образом:

$$b_i \triangleq \begin{cases} 0, & \text{если } i \geqslant m \text{ и } x_i \in D \setminus D', \\ 1, & \text{если } i \leqslant m \text{ и } \neg x_i \in D \setminus D', \\ a_i & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Так как D собственный $D(b_1, ..., b_n) = D'(a_1, ..., a_n)$. Кроме того, в силу m-монотонности f, мы имеем $f(b_1, ..., b_n) \geqslant f(a_1, ..., a_n)$. Поскольку $f(b_1, ..., b_n) \leqslant D(b_1, ..., b_n)$, мы тем самым получаем $f(a_1, ..., a_n) \leqslant D'(a_1, ..., a_n)$, что и требовалось доказать.

Лемма 2. *Пусть S — конечное множество m-монотонных дизъюнктов, а D — собственный дизъюнкт, такой что* $\bigwedge S \leqslant D$. *Тогда существует* $D \supseteq D' \in S$.

Доказательство. От противного. Предположим, что для каждого $d \in S$, существует $l_d \in d \setminus D$. При этом $l_d = \neg x_{i_d}$ или $l_d = x_{i_d}$ для некоторого $1 \leqslant i_d \leqslant n$. Определим значения $a_1, ..., a_n \in \{0,1\}$ следующим образом. Во-первых для каждого $d \in S$ положим:

$$a_{i_d} \triangleq \begin{cases} 0, & \text{если } i_d > m, \\ 1, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Во-вторых для всех остальных $0 \leqslant i \leqslant n$, положим:

$$a_i \triangleq \begin{cases} 0, & \text{если } x_i \in D, \\ 1, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда, в силу m-монотонности всех $d \in S$, $\bigwedge S(a_1, ..., a_n) = 1$, а, так как D — собственный дизъюнкт и $l_d \notin D$ для всех $d \in S$, $D(a_1, ..., a_n) = 0$. Данное противоречие исходному неравенству $\bigwedge S \leqslant D$ завершает доказательство.

Условия собственности D и m-монотонности f и всех элементов S в формулировках лемм 1 и 2 являются необходимыми, как это демонстрируется следующими тождественными неравенствами, соответственно:

$$x_2 \leqslant (x_1 \vee \neg x_1),$$

$$(x_1 \vee x_2) \wedge (\neg x_1 \vee x_2) \leqslant x_2 .$$

С учетом лемм 1 и 2 минимизация исходной КНФ $\bigwedge S$, заданной m-монотонной булевой функции f, оказывается исключительно простой. А именно, построив m-монотонизации всех собственных элементов S и выбрав минимальные по включению дизъюнкты, мы получаем в результате КНФ $\bigwedge S'$.

Теорема 1. $\wedge S'$ *— минимальная КНФ для* f.

Доказательство. По леммам 1 и 2.

В силу дуальности, данные результаты легко переформулируются для дизъюнктивных нормальных форм (ДНФ). А именно, если f — m-монотонная булева функция, то $\neg f$ — $(n-m)$-монотонная функция (при надлежащем обращении своих аргументов). Пусть теперь $\vee S$ — произвольная ДНФ для f.

Следствие 1. $\neg \wedge(\{\neg C : C \in S\})'$ *— минимальная ДНФ для* f.

Доказательство. По теореме 1.

В заключение данной статьи подчеркнем, что упрощение процедуры минимизации оказалось возможным благодаря ядерности элементов S', которая вытекает из леммы 2. Это фактически позволяет избежать перебора подмножеств S', содержащих все ядерные элементы, сразу взяв в качестве искомого подмножества само множество S'.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику. Москва: Наука. 1986. 384 с.
2. Quine W.V. On cores and prime implicants of truth functions. *American Math. Monthly.* 1959. **66**, № 9. P. 755—760.
3. Pynko A.P. Minimal sequent calculi for monotonic chain finitely-valued logics. *Bulletin of the Section of Logic*. 2014. **43**, № 1/2. P. 99—112.
4. Капітонова Ю.В., Кривий С.Л., Летичевський О.А., Луцький Г.М., Печурін М.К. Основи дискретної математики: В 2 т. Київ: ЛітСофт, 2000. Т. 1: Математичні основи. 380 с.

Поступило в редакцию 25.10.2016

REFERENCES

1. Yablonskiy, S. V. (1986). Introduction to discrete mathematics. Moscow: Nauka (in Russian).
2. Quine, W.V. (1959). On cores and prime implicants of truth functions, American Math. Monthly, **66**, No. 9, pp. 755-760.
3. Pynko, A.P. Minimal sequent calculi for monotonic chain finitely-valued logics. Bulletin of the Section of Logic, 2014, **43**, No. 1/2, pp. 99-112.
4. Kapitonova, J.V., Kryvyj, S.L., Letichevskij, O.A., Luckij, G.M., & Pechurin, M.K. (2000). Foundations of discrete mathematics (in 2 volumes), Kiev: LitSoft (vol. 1: Mathematical foundations) (In Ukrainian).

Received 25.10.2016

О.П. Пинько

Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, Київ
E-mail: pynko@i.ua

МІНІМІЗАЦІЯ КНФ ЧАСТКОВО-МОНОТОННИХ БУЛЕВИХ ФУНКЦІЙ

Булева функція зватиметься частково-монотонною, якщо вона монотонна відносно деяких з її аргументів та антимонотонна відносно решти її аргументів. Ми доводимо, що кон'юнктивні нормальні форми частково-монотонних булевих функцій можна мінімізувати дуже ефективно з використанням лише частково-монотонних диз'юнктів.

Ключові слова: *булева функція, літерал, диз'юнкт, кон'юнктивна нормальна форма, кон'юнкт, диз'юнктивна нормальна форма.*

A.P. Pynko

V.M. Glushkov Institute of Cybernetics of the NAS of Ukraine, Kiev
E-mail: pynko@i.ua

MINIMIZATION OF THE CONJUNCTIVE NORMAL FORMS
OF PARTIALLY MONOTONIC BOOLEAN FUNCTIONS

A Boolean function is said to be partially monotonic provided it is monotonic with respect to some of its arguments, while anti-monotonic with respect to others. We argue that the conjunctive normal forms of partially monotonic Boolean functions can be minimized in a quite effective way with involving just disjuncts possesing the same partial monotonicity.

Keywords: *Boolean function, literal, disjunct, conjunctive normal form, conjunct, disjunctive normal form.*