doi: https://doi.org/10.15407/dopovidi2017.03.008
УДК 517.983

Ю.С. Лінчук

Чернівецький національний університет ім. Юрія Федьковича
E-mail: yustlin@gmail.com

Про зведення оператора Ліонса до простішого вигляду

Представлено членом-кореспондентом НАН України М.Л. Горбачуком

Нехай $\alpha \in \mathbb{C}$, $m \in \mathbb{N}$, $m \geqslant 2$ *і* $L_\alpha = \frac{d^m}{dz^m} + \frac{\alpha}{z}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}$. *У підпросторах просторів функцій, аналітичних в областях, вивчаються умови еквівалентності оператора Ліонса* L_α *простішим операторам. Доведено гіперциклічність та хаотичність одного класу операторів.*

***Ключові слова*:** *простір аналітичних функцій, оператор Ліонса, еквівалентні оператори, оператори перетворення, гіперциклічний оператор, хаотичний оператор.*

Узагальнюючи оператор Бесселя, Ж.Л. Ліонс в [1] визначив сингулярний диференціальний оператор виду

$$L_\alpha = \frac{d^m}{dz^m} + \frac{\alpha}{z}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}, \tag{1}$$

$m \in \mathbb{N}$, $m \geqslant 2$. Він довів, що в просторі нескінченно диференційовних на $[0,\infty)$ функцій $C_m[0,\infty) = \{f \in C^\infty[0,\infty) : f^{(km-1)}(0) = 0,\ k \in \mathbb{N}\}$ із загальноприйнятою топологією, оператор (1) еквівалентний оператору $\frac{d^m}{dz^m}$ при певних обмеженнях на параметр α.

Пізніше К. Трімече в [2] встановив умови еквівалентності оператора L_α оператору $\frac{d^m}{dz^m}$ в одному підпросторі простору цілих функцій. Для цього в [2] (див. також [3]) будується оператор перетворення у вигляді нескінченних операторних рядів. Вперше цей метод побудови операторів перетворення був запропонований Ж. Дельсартом та Ж.-Л. Ліонсом в [4] у доведенні еквівалентності диференціальних операторів скінченного порядку в просторі цілих функцій, тому побудовані таким чином оператори перетворення називаються рядами Дельсарта–Ліонса. Для доведення неперервності та ізоморфності операторних рядів Дельсарта–Ліонса в просторі цілих функцій істотно використовується можливість розкладання цілих функцій у степеневі ряди. Тому запропонований в [4] метод побудови оператора перетворення для диференціальних операторів неможна використати для розв'язування аналогічних задач у просторі функцій, аналітичних у некругових областях.

У цій роботі вивчаються властивості оператора L_α у деяких підпросторах простору функцій, аналітичних в областях. Досліджено умови еквівалентності оператора L_α оператору диференціювання D m-го степеня. Встановлено гіперциклічність та хаотичність операторів нескінченного порядку зі сталими коефіцієнтами відносно оператора Ліонса.

Нехай G – довільна область комплексної площини і $\mathcal{H}(G)$ — простір усіх аналітичних в G функцій, що наділений топологією компактної збіжності. Через $\mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$ позначимо простір усіх лінійних неперервних операторів на $\mathcal{H}(G)$. Для фіксованого натурального $m \geqslant 2$ позначимо $\omega = \exp\left(\frac{2\pi i}{m}\right)$. Надалі вважатимемо, що G — довільна зіркова відносно точки $z=0$ область у $\mathbb{C}$, яка інваріантна відносно повороту навколо початку координат на кут $\frac{2\pi}{m}$, тобто $\omega G = G$. Через $\mathcal{H}_k(G)$, $k=\overline{0,m-1}$, позначимо замкнуті підпростори простору $\mathcal{H}(G)$, які визначаються таким чином:

$$\mathcal{H}_k(G) = \{f \in \mathcal{H}(G)\colon\ f(\omega z) = \omega^k f(z), \forall z \in G\}.$$

В [5] показано, що простір $\mathcal{H}(G)$ є прямою сумою своїх підпросторів $\mathcal{H}_k(G)$, $k=\overline{0,m-1}$. Довільну функцію $f \in \mathcal{H}(G)$ можна єдиним способом зобразити у вигляді

$$f(z) = \sum_{k=0}^{m-1} f_k(z),$$

де $f_k \in \mathcal{H}_k(G)$.

Нехай α – довільне фіксоване комплексне число. Якщо $f \in \mathcal{H}_k(G)$, $k=\overline{0,m-2}$, то при $z \in G \setminus \{0\}$ є правильною формула

$$(L_\alpha f)(z) = f^{(m)}(z) + \alpha \int_0^1 f^{(m)}(tz)\,dt. \tag{2}$$

З (2) випливає, що оператор $L_\alpha \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_k(G))$ при $k=\overline{0,m-2}$.

Вивчимо спочатку умови, за яких оператор L_α є еквівалентним у просторах $\mathcal{H}_k(G)$, $k=\overline{0,m-2}$, оператору D^m. Наведемо деякі допоміжні твердження. Через $G^{(m)}$ позначимо множину $G^{(m)} = \{z^m : z \in G\}$. $G^{(m)}$ є областю в $\mathbb{C}$, оскільки областю є G. Кожен з просторів $\mathcal{H}_k(G)$ є ізоморфним простору $\mathcal{H}(G^{(m)})$, причому кожен з операторів S_k: $\mathcal{H}(G^{(m)}) \to \mathcal{H}_k(G)$, який діє за правилом $(S_k f)(z) = z^k f(z^m)$, ізоморфно відображає простір $\mathcal{H}(G^{(m)})$ на $\mathcal{H}_k(G)$, $k=\overline{0,m-1}$ [6].

Використовуючи ізоморфізми S_k, одержуємо, що є правильним таке твердження.

Лема 1. *Для довільного $k=\overline{0,m-1}$ між операторами $T_k \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_k(G))$ і операторами $\tilde{T}_k \in \mathcal{L}(\mathcal{H}(G^{(m)}))$ формулою*

$$T_k = S_k \tilde{T}_k S_k^{-1}$$

встановлюється взаємно однозначна відповідність.

Зауваження 1. Оскільки $T_k S_k = S_k \tilde{T}_k$ і оператор S_k ізоморфно відображає простір $\mathcal{H}(G^{(m)})$ на $\mathcal{H}_k(G)$, то оператор T_k у просторі $\mathcal{H}_k(G)$ еквівалентний оператору $\tilde{T}_k$ у просторі $\mathcal{H}(G^{(m)})$ для довільного $k=\overline{0,m-1}$.

Для числа $a \in \mathbb{C}$ через $(a)_n$ позначимо символ Похгаммера, тобто $(a)_n = a(a+1)\ldots$ $\ldots(a+n-1)$ при $n \geqslant 1$, $(a)_0 = 1$.

Нехай α — довільне фіксоване комплексне число. Для довільного $k=\overline{0,m-1}$ позначимо

$$\gamma_n^{(k)}=\frac{\left(\dfrac{\alpha+k+1}{m}\right)_n}{\left(\dfrac{k+1}{m}\right)_n},\ n=0,1,\ldots. \tag{3}$$

Область $G^{(m)}$ є зірковою відносно початку координат, оскільки такою є область G. Тоді, використовуючи теореми 1 і 2 [7] (див. також [8]), одержуємо, що оператор $\tilde{T}_k$, $k=\overline{0,m-1}$, який на степенях z визначається рівностями $\tilde{T}_k z^n=\gamma_n^{(k)}z^n$ продовжується до оператора з класу $\mathcal{L}(\mathcal{H}(G^{(m)}))$. При $n=0,1,\ldots$ виконуються рівності $(S_k\tilde{T}_kS_k^{-1})(z^{mn+k})=\gamma_n^{(k)}z^{mn+k}$. Тому для довільного $k=\overline{0,m-1}$ оператор T_k, який визначається рівностями

$$T_kz^{mn+k}=\gamma_n^{(k)}z^{mn+k},\quad n=0,1,\ldots, \tag{4}$$

формулою $T_k=S_k\tilde{T}_kS_k^{-1}$ продовжується до оператора з класу $\mathcal{L}(\mathcal{H}_k(G))$.

Теорема 1. *Нехай α — довільне фіксоване комплексне число. Для довільного $k=\overline{0,m-1}$ оператор T_k, який визначається рівностями* (3), (4), *продовжується до оператора з класу $\mathcal{L}(\mathcal{H}_k(G))$.*

Використовуючи наслідок 1 з [7], одержуємо твердження.

Наслідок 1. *Нехай $\alpha\in\mathbb{C}$ і $k=\overline{0,m-1}$. Оператор T_k буде ізоморфізмом простору $\mathcal{H}_k(G)$ тоді і тільки тоді, коли виконується умова*

$$\alpha\neq -mj-k-1,\ j=0,1,\ldots. \tag{5}$$

Теорема 2. *Нехай $k=\overline{0,m-2}$ — довільне фіксоване число, а $\alpha\in\mathbb{C}$. Для того щоб оператор L_α був еквівалентним оператору D^m у просторі $\mathcal{H}_k(G)$ необхідно і достатньо, щоб виконувалася умова* (5).

Необхідність умов теореми 2 випливає з того, що розмірності ядер еквівалентних операторів рівні між собою. Достатність умов теореми 2 випливає з рівностей

$$T_kL_\alpha=D^mT_k, \tag{6}$$

$k=\overline{0,m-2}$, і того, що при виконанні умов (5) за наслідком 1 кожен з операторів T_k є ізоморфізмом простору $\mathcal{H}_k(G)$, $k=\overline{0,m-2}$.

Наслідок 2. *Нехай $k=\overline{0,m-2}$ — довільне фіксоване число, а $\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{C}$, причому $\alpha_p\neq -mj-k-1$, $j=0,1,\ldots$, $p=1,2$. Тоді оператори L_{α_1} та L_{α_2} є еквівалентними в просторі $\mathcal{H}_k(G)$.*

Надалі вважатимемо, що $\mathcal{H}_k(G)=\mathcal{H}_s(G)$ для $k,s\in\mathbb{Z}$, $k\equiv s(\mathrm{mod}\ m)$. Крім того, $D^{-r}=\mathcal{J}^r$ для довільного $r\in\mathbb{N}$, де $\mathcal{J}$ — оператор інтегрування. Тоді для довільних $k,l=\overline{0,m-1}$ оператор $M=D^{k-l}$ ізоморфно відображає простір $\mathcal{H}_k(G)$ на $\mathcal{H}_l(G)$ і виконується рівність $MD^m=D^mM$. Тому є правильним нижченаведене твердження.

Лема 2. *Для довільних $k,l=\overline{0,m-1}$ оператор D^m у просторі $\mathcal{H}_k(G)$ еквівалентний оператору D^m у просторі $\mathcal{H}_l(G)$.*

З теореми 2 і леми 2 випливає твердження.

Наслідок 3. *Нехай $k,l=\overline{0,m-2}$ — довільні фіксовані числа, а $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$, причому α задовольняє умову* (5), *а $\beta\neq -mj-l-1$, $j=0,1,\ldots$. Тоді оператор L_α у просторі $\mathcal{H}_k(G)$ еквівалентний оператору L_β у просторі $\mathcal{H}_l(G)$.*

Для $m \in \mathbb{N},\ m \geqslant 2$, через $p_m(t)$ позначимо многочлен вигляду

$$p_m(t) = \prod_{k=0}^{m-1}(mt-k).$$

Зобразимо цей многочлен у вигляді

$$p_m(t) = \sum_{k=1}^{m} d_k t^k.$$

Нехай U_z — оператор множення на незалежну змінну. Через Λ_m позначимо оператор

$$\Lambda_m = \sum_{k=1}^{m} d_k (DU_z)^{k-1} D.$$

Для оператора Λ_m при $n \geqslant 1$ виконується рівність $\Lambda_m(z^n) = p_m(n) z^{n-1}$. Тому $D^m S_0 = S_0 \Lambda_m$, де S_0 — ізоморфізм простору $\mathcal{H}(G^{(m)})$ на простір $\mathcal{H}_0(G)$, який діє за правилом $(S_0 f)(z) = f(z^m)$. Внаслідок цього оператор D^m у просторі $\mathcal{H}_0(G)$ еквівалентний оператору Λ_m у просторі $\mathcal{H}(G^{(m)})$. Нехай тепер k — довільне фіксоване, $k = \overline{0, m-1}$. За лемою 2 оператор D^m у просторі $\mathcal{H}_k(G)$ еквівалентний оператору D^m у просторі $\mathcal{H}_0(G)$. Внаслідок транзитивності відношення еквівалентності операторів звідси випливає, що оператор D^m у просторі $\mathcal{H}_k(G)$ еквівалентний оператору Λ_m у просторі $\mathcal{H}(G^{(m)})$. Таким чином, є правильним таке твердження.

Лема 3. *Для довільного $k = \overline{0, m-1}$ оператор D^m у просторі $\mathcal{H}_k(G)$ є еквівалентним оператору Λ_m у просторі $\mathcal{H}(G^{(m)})$.*

З теореми 1 і леми 3 випливає таке твердження.

Теорема 3. *Нехай $k = \overline{0, m-2}$ — довільне фіксоване число; $\alpha \in \mathbb{C}$ і задовольняє умову* (5). *Тоді оператор L_α у просторі $\mathcal{H}_k(G)$ еквівалентний оператору Λ_m у просторі $\mathcal{H}(G^{(m)})$.*

Наведемо одне застосування одержаних результатів. Через $\mathcal{H}$ позначимо простір

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0(G) \oplus \mathcal{H}_1(G) \oplus \ldots \oplus \mathcal{H}_{m-2}(G).$$

При цьому довільну функцію $f \in \mathcal{H}$ можна єдиним способом зобразити у вигляді

$$f(z) = \sum_{k=0}^{m-2} f_k(z),$$

де $f_k \in \mathcal{H}_k(G)$, причому

$$f_k(z) = (P_k f)(z) = \frac{1}{m}\sum_{j=0}^{m-1} \omega^{-kj} f(\omega^j z),\ k = \overline{0, m-2}.$$

Оскільки кожен з підпросторів $\mathcal{H}_k(G),\ k = \overline{0, m-2}$, є інваріантним відносно операторів L_α, $\alpha \in \mathbb{C}$, та D^m, то оператори L_α та D^m лінійно та неперервно діють у просторі $\mathcal{H}$.

Нехай $\alpha \in \mathbb{C}$, причому для довільного $k = \overline{0, m-2}$ виконується умова (5). Тоді кожен з операторів $T_k,\ k = \overline{0, m-2}$, який побудований в теоремі 1, є ізоморфізмом відповідного простору $\mathcal{H}_k(G)$. За теоремою 2 у кожному просторі $\mathcal{H}_k(G),\ k = \overline{0, m-2}$, виконується рівність (6). Розглянемо оператор

$$T = \sum_{k=0}^{m-2} T_k P_k.$$

Він є ізоморфізмом простору $\mathcal{H}$ і обернений до нього визначається формулою

$$T^{-1} = \sum_{j=0}^{m-2} T_k^{-1} P_k .$$

Оскільки $TL_\alpha = D^m T$, то оператор L_α еквівалентний оператору D^m у просторі $\mathcal{H}$.

Теорема 4. *Нехай $\alpha \in \mathbb{C}$, причому для довільного $k = \overline{0, m-2}$ виконується умова* (2). *Тоді в просторі $\mathcal{H}$ оператор L_α еквівалентний оператору D^m.*

Зауваження 2. У випадку $G = \mathbb{C}$ з теореми 4 одержуємо сформульований на початку роботи результат з [2].

Наведемо одне застосування теореми 2.

Лема 4. *Нехай $k = \overline{0, m-2}$, комплексне число α задовольняє умову* (5) *і $(c_n)_{n=0}^{\infty}$ — послідовність комплексних чисел, для якої*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = 0. \tag{7}$$

Тоді оператор

$$T = \sum_{n=0}^{\infty} c_n L_\alpha^n \tag{8}$$

належить класу $\mathcal{L}(\mathcal{H}_k(G))$.

З використанням теореми Годфруа—Шапіро [9] доводиться таке твердження.

Теорема 5. *Нехай $k = \overline{0, m-2}$, комплексне число α задовольняє умову* (5) *і $(c_n)_{n=0}^{\infty}$ — послідовність комплексних чисел, яка задовольняє умову* (7), *причому $c_n \neq 0$ для деякого $n \geqslant 1$. Тоді оператор T виду* (8) *є гіперциклічним та хаотичним у просторі $\mathcal{H}_k(G)$.*

ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Lions J.L. Quelques applications d'operateurs de transmutations. *Colloques internationaux du CNRS.* Vol. 71. La théorie des équations aux dérivées partielles. Nancy, 1956. P. 125—137.
2. Trimeche K. Mean-periodic functions associated with a differential operator in the complex plane. *Mathematical Analysis and Its Applications: Proc. Int. Conf., Safat/Kuwait 1985, KFAS Proc. Ser. 3.* Oxford: Pergamon Press, 1988. P. 385—402.
3. Trimeche K. Transmutation operators and mean-periodic functions associated with differential operators. — London: Harwood Academ. Publ., 1988. 282 p.
4. Delsarte J., Lions J.L. Transmutations d'operateurs differentieles dans le domaine complexe. *Comment. Math. Helv.* 1957. **32**, № 2. P. 113—128.
5. Dimovski I. H. Convolutional Calculus. Dordrecht: Kluwer, 1990. 208 p.
6. Berezovskaya G. M., Berezovskii N. I. Description of the isomorphisms of spaces of holomorphic functions that commute with powers of a multiplication operator. *Ukr. Math. J.* 1984. **36**, № 5. P. 456—459.
7. Лінчук Ю.С. Про один клас діагональних операторів у просторах аналітичних функцій та його застосування. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2014. № 3. С. 25—28.
8. Лінчук Ю.С. Узагальнений оператор Данкла–Опдама та його властивості у просторах функцій, аналітичних в областях. *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* 2014. **57**, № 4. С. 7—17.
9. Godefroy G., Shapiro J.H. Operators with dense, invariant, cyclic vector manifolds. *J. Funct. Anal.* 1991. **98**, № 2. P. 229—269.

Надійшло до редакції 20.10.2016

REFERENCES

1. Lions, J.L. (1956) Colloques internationaux du CNRS. Vol. 71. La théorie des équations aux dérivées partielles. Nancy, pp. 125-137.
2. Trimeche, K. (1988). Mean-periodic function associated with a differential operator in the complex plane. In Mazhar, S. M., Hamoui, A., Faour, N. S. (Eds.). Mathematical analysis and its applications: Proceedings of the International Conference on Mathematical Analysis and Its Applications, Kuwait, 1985 (pp. 385-4002), Oxford: Pergamon Press.
3. Trimeche, K. (1988). Transmutation operators and mean-periodic functions associated with differential operators. London: Harwood Academ. Publ.
4. Delsarte, J. & Lions, J. L. (1957). Transmutatuions d'operateurs differentieles dans le domaine complexe. Comment. Math. Helv., 32, No. 2, pp. 113-128.
5. Dimovski, I. H. (1990). Convolutional Calculus. Dordrecht: Kluwer.
6. Berezovskaya, G. M. & Berezovskii, N. I. (1984). Description of the isomorphisms of spaces of holomorphic functions that commute with powers of a multiplication operator. Ukr. Math. J., 36, No. 5, pp. 456-459.
7. Linchuk, Yu. S. (2014). On a class of diagonal operators in the spaces of analytic functions and its application. Dopov. Nac. akad. nauk Ukr., No. 3, pp. 25-28 (in Ukrainian).
8. Linchuk, Yu. S. (2014). Generalized Dunkl – Opdam operator and its properties in the spaces of analytic functions in domains. Mat. metody ta fiz.-mekh. polia, 57, No. 4, pp. 7-17 (in Ukrainian).
9. Godefroy, G. & Shapiro, J. H. (1991). Operators with dense, invariant, cyclic vector manifolds. J. Funct. Anal., 98, No. 2, pp. 229-269.

Received 20.10.2016

Ю.С. Линчук

Черновицкий национальный университет им. Юрия Федьковича
E-mail: yustlin@gmail.com

О ПРЕОБРАЗОВАНИИ ОПЕРАТОРА ЛИОНСА К ПРОСТЕЙШЕМУ ВИДУ

Пусть $\alpha \in \mathbb{C}$, $m \in \mathbb{N}$, $m \geqslant 2$ и $L_\alpha = \frac{d^m}{dz^m} + \frac{\alpha}{z}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}$. В подпространствах пространств функций, аналитических в областях, изучаются условия эквивалентности оператора Лионса L_α простейшим операторам. Доказана гиперцикличность и хаотичность одного класса операторов.

Ключевые слова: *пространство аналитических функций, оператор Лионса, эквивалентные операторы, операторы преобразования, гиперциклический оператор, хаотичный оператор.*

Yu.S. Linchuk

Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University

E-mail: yustlin@gmail.com

ON THE TRANSMUTATION OF THE LIONS OPERATOR TO THE SIMPLEST FORM

Let $\alpha \in \mathbb{C}$, $m \in \mathbb{N}$, $m \geqslant 2$, and $L_\alpha = \frac{d^m}{dz^m} + \frac{\alpha}{z}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}$. We investigate the conditions of equivalence of the Lions operator L_α to simpler operators in subspaces of the spaces of functions analytic in domains. We establish the hypercyclicity and the chaoticity of a class of operators.

Keywords: *spaces of analytic functions, Lions operator, equivalent operators, transmutation operators, hypercyclic operator, chaotic operator.*