

doi: <https://doi.org/10.15407/dopovidi2017.01.029>
УДК 539.3

А.М. Багно

Институт механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины, Киев
E-mail: alexbag2010@gmail.com

О дисперсии волн Лэмба в упругом слое, взаимодействующем с идеальным жидким полупространством

Представлено академиком НАН Украины А. Н. Гузем

На основании трехмерных линейных уравнений классической теории упругости для твердого тела и линейаризованных уравнений Эйлера для жидкой среды исследовано распространение квазилэмбовских волн в системе: полупространство идеальной сжимаемой жидкости — упругий слой. Построены дисперсионные кривые для нормальных волн в широком диапазоне частот. Проанализировано влияние идеальной сжимаемой жидкости и толщины упругого слоя на дисперсию фазовых скоростей квазилэмбовских мод в гидроупругом волноводе. Исследованы локализационные свойства низших квазилэмбовских мод в гидроупругих волноводах. Предложен критерий существования квазилэмбовских волн в гидроупругих волноводах. Числовые результаты приведены в виде графиков и дан их анализ.

Ключевые слова: дисперсия волн, упругий слой, полупространство идеальной сжимаемой жидкости, локализация квазилэмбовских мод.

Задача о распространении волн Лэмба в упругом слое, взаимодействующем с жидким полупространством, принадлежит к классическим задачам механики. Вместе с тем, являясь многопараметрической, она остается изученной недостаточно полно. Обзор работ и анализ результатов, полученных в рамках классической теории упругости и модели идеальной сжимаемой жидкости [1], а также с привлечением более общих моделей твердых и жидких сред [2–4], приведены в [1–4]. В частности, работа [2] посвящена исследованию свойств функции Грина и применению ее к изучению динамических свойств слоисто-неоднородного полупространства. В обзорной работе [3] проанализированы теоретические методы, применяемые для изучения волн Лэмба в анизотропных пластинах. Значительное практическое использование волн Лэмба ставит задачу изучения дисперсионных свойств этих волн в гидроупругом волноводе, состоящем из упругого слоя и жидкого полупространства, в широком диапазоне частот, охватывающем как длинноволновую, так и коротковолновую части спектра для толщин упругого слоя соизмеримых с длиной волны. В настоящей работе для анализа дисперсионных характеристик квазилэмбовских мод в системе упругий слой — жидкое полупространство в широком интервале частот используются трехмерные линей-

ризованные уравнения Эйлера для жидкости и линейные уравнения классической теории упругости для твердого тела. При этом предполагается, что жидкость находится в состоянии покоя. В качестве подхода выбраны постановки задач и метод, основанные на применении представлений общих решений уравнений движения идеальной сжимаемой жидкости и упругого тела, полученные в работах [5–9].

Постановка задачи. Рассмотрим задачу о распространении нормальных квазилэмбовских волн в гидроупругой системе, состоящей из полупространства идеальной сжимаемой жидкости и упругого слоя. Решение получим с привлечением трехмерных линейных уравнений классической теории упругости для твердого тела и линеаризованных уравнений Эйлера для жидкости, находящейся в состоянии покоя. В рамках принятых моделей основные соотношения для системы изотропное упругое тело — идеальная сжимаемая жидкость будут иметь вид [5–9]:

$$\mu \Delta \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) - \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = 0; \quad \sigma_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial u_j} + \frac{\partial u_j}{\partial u_i} \right) + \lambda \delta_{ij} \nabla \cdot \mathbf{u}, \quad z_k \in V_1; \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \nabla p = 0; \quad \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho^*}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{v} = 0; \quad \frac{\partial p}{\partial \rho^*} = a_0^2; \quad P_{ij} = -\delta_{ij} p; \quad a_0 = \text{const}, \quad z_k \in V_2. \quad (2)$$

При этом специфику взаимодействия упругих и жидких сред отражают динамические $\sigma_{ij} = P_{ij}$, $z_k \in S$ и кинематические $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathbf{v}$, $z_k \in S$ граничные условия, задаваемые на поверхности контакта твердых тел и жидкости S .

Здесь введены следующие обозначения: u_i — компоненты вектора перемещений твердого тела \mathbf{u} ; ρ — плотность материала упругого слоя; λ и μ — константы Ляме материала упругого тела; v_i — составляющие вектора возмущений скорости жидкости \mathbf{v} ; ρ^* и p — возмущения плотности и давления в жидкости; ρ_0 и a_0 — плотность и скорость звука в жидкости в состоянии покоя; P_{ij} и σ_{ij} — составляющие напряжений, соответственно, в жидкости и упругом теле; V_1 и V_2 — объемы занимаемые, соответственно, упругим телом и жидкостью; S — поверхность контакта упругой и жидкой сред.

Равенства (1) описывают поведение упругого тела. Малые колебания идеальной сжимаемой жидкости, находящейся в состоянии покоя, описывают соотношения (2).

Далее предположим, что изотропный упругий слой занимает объем: $-\infty < z_1 < \infty$, $0 \leq z_2 \leq h$, $-\infty < z_3 < \infty$ и контактирует с идеальной сжимаемой жидкостью, заполняющей полупространство: $-\infty < z_1 < \infty$, $-\infty < z_2 \leq 0$, $-\infty < z_3 < \infty$. Примем, что внешние силы, действующие на указанные среды, распределены равномерно вдоль оси oz_3 . В этом случае задача является плоской и можно ограничиться изучением процесса распространения волн в плоскости oz_1z_2 . Следовательно, указанная задача сводится к решению системы уравнений (1)–(2) при следующих граничных условиях:

$$\sigma_{12} \Big|_{z_2=h} = 0; \quad \sigma_{22} \Big|_{z_2=h} = 0; \quad \sigma_{12} \Big|_{z_2=0} = 0; \quad \sigma_{22} \Big|_{z_2=0} = P_{22} \Big|_{z_2=0}; \quad v_2 \Big|_{z_2=0} = \frac{\partial u_2}{\partial t} \Big|_{z_2=0}. \quad (3)$$

В дальнейшем для решения задачи гидроупругости воспользуемся представлениями общих решений для упругих тел и идеальной сжимаемой жидкости, предложенными в работах [5–9]. Для плоского случая, который рассматривается далее, общие решения будут

такими:

$$u_1 = -\frac{\partial^2 \chi_1}{\partial z_1 \partial z_2}; \quad u_2 = \left(\frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\mu}{\lambda + \mu} \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} - \frac{\rho}{\lambda + \mu} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \chi_1; \quad v_1 = \frac{\partial^2 \chi_2}{\partial z_1 \partial t}; \quad v_2 = \frac{\partial^2 \chi_2}{\partial z_2 \partial t}, \quad (4)$$

где введенные функции χ_1 и χ_2 являются решениями следующих уравнений:

$$\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} - \frac{\rho}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\lambda + 2\mu}{\mu} \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} - \frac{\rho}{\mu} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) - \frac{(\lambda + \mu)^2}{\mu(\lambda + 2\mu)} \frac{\partial^4}{\partial z_1^2 \partial z_2^2} \right] \chi_1 = 0;$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} - \frac{1}{a_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \chi_2 = 0. \quad (5)$$

Для анализа распространения возмущений, гармонически изменяющихся во времени, решения системы уравнений разыскиваем в классе бегущих волн и выбираем в виде:

$$\chi_j = X_j(z_2) \exp[i(kz_1 - \omega t)] \quad (j = 1, 2), \quad (6)$$

где k — волновое число; ω — круговая частота; $i^2 = -1$.

Далее решаем две задачи Штурма — Лиувилля на собственные значения для уравнений движения жидкости и упругого тела, а также определяем соответствующие собственные функции. После подстановки решений в граничные условия (3) получаем систему линейных однородных алгебраических уравнений относительно произвольных постоянных. Исходя из условия существования нетривиального решения, и приравнявая определитель системы к нулю, получаем дисперсионное уравнение

$$\det \| e_{lm}(c, \lambda, \mu, \rho, \rho_0, a_0, \omega h/c_s) \| = 0 \quad (l, m = \overline{1, 5}), \quad (7)$$

где c — фазовая скорость нормальных волн; c_s ($c_s^2 = \mu / \rho$) — скорость волны сдвига в упругом теле; h — толщина упругого слоя.

Как известно, в неограниченном сжимаемом упругом теле существуют продольная и сдвиговая волны. В идеальной сжимаемой жидкой среде распространяется только продольная волна. Именно эти волны, взаимодействуя между собой на свободных граничных поверхностях, а также на поверхности контакта сред, порождают сложное волновое поле в гидроупругой системе.

Заметим, что полученное дисперсионное уравнение (7) является наиболее общим и из него можно получить соотношения для ряда частных случаев, которые рассмотрены в работах [1, 4]. В частности, если принять $\rho_0 = 0$, равенство (7) перейдет в уравнение для определения скоростей волн Лэмба [1, 7]. Если дополнительно устремить h к бесконечности, получим соотношение для определения скоростей поверхностных волн Рэлея [1]. При $\rho_0 \neq 0$ и $h \rightarrow \infty$ равенство перейдет в уравнение Стоунли—Шольте [1].

Числовые результаты и их анализ. В дальнейшем дисперсионное уравнение (7) решалось численно. При этом расчеты проводились для трех гидроупругих систем. Первая состояла из эластичной резины и воды. Ее механические параметры выбирались следующими: упругий слой — $\rho = 1200$ кг/м³, $\lambda = 6 \cdot 10^9$ Па, $\mu = 1,2 \cdot 10^6$ Па; полупространство жидкости — $\rho_0 = 1000$ кг/м³, $a_0 = 1459,5$ м/с, $\bar{a}_0 = a_0/c_s = 46,153442$. Этот гидроупругий волновод характеризуется тем, что материал упругого слоя (резина) является податливым и мягким.

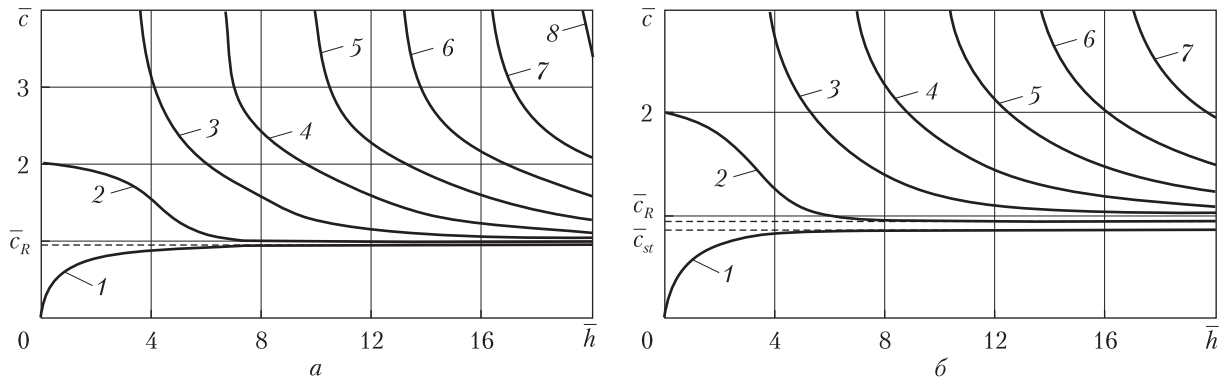


Рис. 1

Вторая состояла из органического стекла и воды. Она характеризовалась следующими параметрами: упругий слой — $\rho = 1160 \text{ кг/м}^3$, $\lambda = 3,96 \cdot 10^9 \text{ Па}$, $\mu = 1,86 \cdot 10^9 \text{ Па}$; жидкое полупространство — $\rho_0 = 1000 \text{ кг/м}^3$, $a_0 = 1459,5 \text{ м/с}$, $\bar{a}_0 = a_0/c_s = 1,152595$. У этого волновода материал упругого тела (оргстекло) является слабо жестким. Третья представляла собой волновод из стали и воды. При этом параметры выбирались такими: упругий слой — $\rho = 7800 \text{ кг/м}^3$, $\lambda = 9,26 \cdot 10^{10} \text{ Па}$, $\mu = 7,75 \cdot 10^{10} \text{ Па}$; жидкость — $\rho_0 = 1000 \text{ кг/м}^3$, $a_0 = 1459,5 \text{ м/с}$, $\bar{a}_0 = a_0/c_s = 0,463021$. Этот волновод отличается тем, что материал упругого слоя (сталь) относится к разряду сильно жестких.

Результаты вычислений представлены на рис. 1–3. На рис. 1 приведены результаты численных расчетов для упруго-жидкостной системы, состоящей из резины (податливый материал) и воды.

На рис. 1, а для упругого слоя, невзаимодействующего с жидкостью, приведены зависимости безразмерных величин фазовых скоростей нормальных волн Лэмба \bar{c} ($\bar{c} = c/c_s$) от безразмерной величины толщины упругого слоя (частоты) \bar{h} ($\bar{h} = \omega h/c_s$). На этом рисунке для наглядности штриховой линией отмечена асимптотика, к которой стремятся фазовые скорости первой и второй мод при возрастании толщины.

Графики на рис. 1, б иллюстрируют влияние жидкости на волновые характеристики гидроупругой системы. На нем изображены дисперсионные кривые, отражающие зависимости безразмерных величин фазовых скоростей квазилэмбовских мод \bar{c} от безразмерной величины толщины упругого слоя \bar{h} . Для наглядности на этом рисунке штриховыми линиями отмечены асимптотики, к которым стремятся фазовые скорости первой и второй мод при возрастании толщины.

Из графиков, представленных на рис. 1, а, следует, что для чисто упругого волновода скорости первой (нулевой антисимметричной) и второй (нулевой симметричной) мод Лэмба стремятся к скорости волны Рэля \bar{c}_R . При этом первая мода стремится к скорости поверхностной волны \bar{c}_R ($\bar{c}_R = c_R/c_s = 0,9553301$) снизу, а скорость второй моды — соответственно, к \bar{c}_R ($\bar{c}_R = 0,9553301$) сверху.

В гидроупругом волноводе (рис. 1, б) при росте толщины упругого слоя (частоты) \bar{h} скорость первой моды стремится к скорости волны Стоунли \bar{c}_{st} ($\bar{c}_{st} = c_{st}/c_s = 0,859257$) снизу, а скорость второй моды — к скорости волны Рэля \bar{c}_R ($\bar{c}_R = 0,9553301$) сверху. Моды более высокого порядка как в гидроупругой системе, так и в чисто упругом слое распростра-

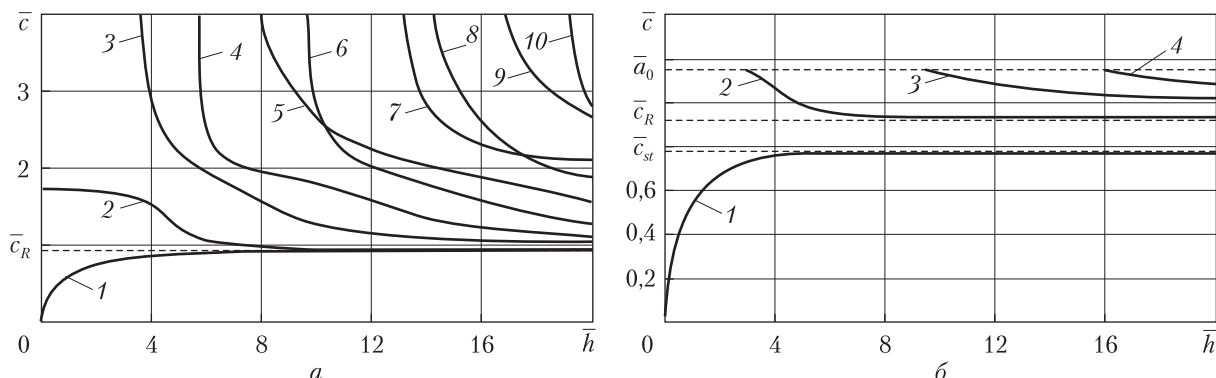


Рис. 2

няются в упругом слое в его толще с фазовыми скоростями, стремящимися с увеличением толщины (частоты) \bar{h} к скорости волны сдвига в материале упругого тела \bar{c}_s .

На рис. 2 приведены результаты численных расчетов для упруго-жидкостной системы, состоящей из органического стекла (слабо жесткий материал) и воды. На рис. 2, а для упругого слоя, невзаимодействующего с жидкостью, приведены зависимости безразмерных величин фазовых скоростей нормальных волн Лэмба \bar{c} от безразмерной величины толщины упругого слоя (частоты) \bar{h} [4, 6, 7, 10]. Для наглядности на этом рисунке штриховой линией отмечена асимптотика, к которой стремятся фазовые скорости первой и второй мод при возрастании толщины.

На рис. 2, б изображены дисперсионные кривые для гидроупругого волновода, отражающие зависимости безразмерных величин фазовых скоростей квазилэмбовских мод \bar{c} от безразмерной величины толщины упругого слоя (частоты) \bar{h} . На этом рисунке для наглядности штриховыми линиями отмечены асимптотики, к которым стремятся фазовые скорости первой и второй мод при возрастании толщины.

Из графиков, представленных на рис. 2, а, следует, что скорость первой (нулевой антисимметричной) моды Лэмба при росте частоты или толщины упругого слоя \bar{h} стремится к скорости волны Рэлея \bar{c}_R ($\bar{c}_R = 0,933557$) снизу, а скорость второй (нулевой симметричной) моды стремится к скорости волны Рэлея \bar{c}_R ($\bar{c}_R = 0,933557$) сверху. Скорости всех мод Лэмба высокого порядка при увеличении толщины упругого слоя или частоты \bar{h} стремятся к скорости волны сдвига в материале упругого тела \bar{c}_s [4, 6, 7, 10].

Графики для гидроупругой системы, приведенные на рис. 2, б, показывают, что при росте толщины упругого слоя (частоты) \bar{h} скорость первой моды стремится к скорости волны Стоунли \bar{c}_{st} ($\bar{c}_{st} = 0,7717101$) снизу, а скорость второй моды — к скорости волны Рэлея \bar{c}_R ($\bar{c}_R = 0,933557$) сверху. Моды более высокого порядка распространяются в упругом слое в его толще с фазовыми скоростями, стремящимися с ростом частоты (толщины упругого слоя) \bar{h} к скорости волны сдвига в материале упругого тела \bar{c}_s .

Графический материал, полученный в результате численных вычислений для системы: сталь (сильно жесткий материал) — вода, представлен на рис. 3. На рис. 3, а для упругого слоя, невзаимодействующего с жидкостью, приведены зависимости безразмерных величин фазовых скоростей нормальных волн Лэмба \bar{c} от безразмерной величины толщины упругого слоя (частоты) \bar{h} [4, 6, 7, 10]. Для наглядности на этом рисунке штриховой линией

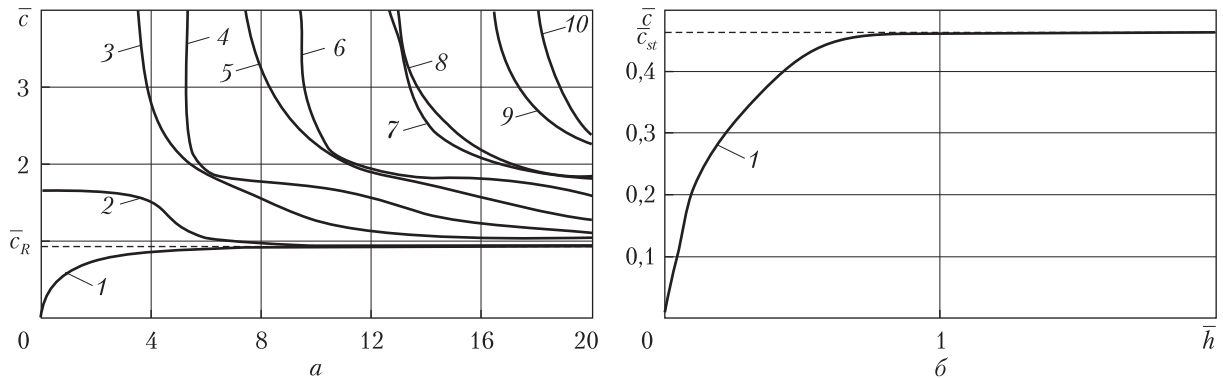


Рис. 3

отмечена асимптотика, к которой стремятся фазовые скорости первой и второй мод при возрастании толщины.

На рис. 3, б приведена дисперсионная кривая для гидроупругого волновода, отражающая зависимость безразмерной величины фазовой скорости единственной существующей первой моды \bar{c} от безразмерной величины толщины упругого слоя (частоты) \bar{h} . На этом рисунке для наглядности штриховой линией отмечена асимптотика, к которой стремится фазовая скорость первой моды при возрастании толщины.

Из графиков, представленных на рис. 3, а, следует, что скорость первой (нулевой антисимметричной) моды Лэмба при росте частоты или толщины упругого слоя \bar{h} стремится к скорости волны Рэлея \bar{c}_R ($\bar{c}_R = 0,923202$) снизу, а скорость второй (нулевой симметричной) моды стремится к скорости волны Рэлея \bar{c}_R ($\bar{c}_R = 0,923202$) сверху. Скорости всех мод Лэмба высокого порядка при увеличении частоты или толщины упругого слоя \bar{h} стремятся к скорости волны сдвига в материале упругого тела \bar{c}_s [1, 4, 6, 7, 10].

Графический материал для гидроупругой системы, приведенный на рис. 3, б, показывает, что при росте толщины упругого слоя (частоты) \bar{h} скорость первой моды стремится снизу к скорости волны Стоунли \bar{c}_{st} ($\bar{c}_{st} = 0,462886$), которая несколько меньше скорости волны звука в жидкой среде \bar{a}_0 ($\bar{a}_0 = 0,463021$).

Локализационные свойства низших мод в гидроупругих волноводах. Как показано в работе [11], фазовая скорость и структура волны Стоунли при взаимодействии твердого и жидкого полупространств зависят от механических параметров гидроупругой системы и определяются соотношением между скоростью волны звука в жидкости и скоростью волны Рэлея в твердом полупространстве. В рассматриваемом случае механические параметры гидроупругой системы резина (податливый материал) – вода таковы, что скорость распространения звуковой волны в жидкости \bar{a}_0 ($\bar{a}_0 = 46,153442$) больше скорости квазиралеевской волны \bar{c}_R ($\bar{c}_R = 0,955301$). Согласно анализу кинематических характеристик поверхностных волн [11] это приводит к тому, что в высокочастотной части спектра глубина проникновения квазиповерхностной моды 1, являющейся волной типа Стоунли, в упругое тело больше глубины проникновения в жидкость. Поэтому мода 1, распространяясь вдоль границы контакта сред, проникает в твердое тело и локализуется, преимущественно, в приповерхностных областях как жидкости, так и упругого слоя. Мода 2 распространяется в упругом слое вдоль его свободной поверхности. Скорость ее стремится к скорости волны

Рэлея \bar{c}_R ($\bar{c}_R = 0,955301$) сверху. Скорости всех мод высокого порядка стремятся к скорости волны сдвига в материале твердого тела \bar{c}_s . При этом с ростом частоты (толщины) в них преобладают поперечные смещения, амплитуда которых на поверхностях слоя стремится к нулю по сравнению с их амплитудами в толще слоя, то есть движения в модах высокого порядка смещаются от поверхности внутрь слоя и локализуются в его толще [1].

В случае гидроупругой системы: оргстекло – вода (слабо жесткий материал, рис. 2, б) механические параметры ее компонентов таковы, что скорость распространения звуковой волны в жидкости \bar{a}_0 ($\bar{a}_0 = 1,152595$) несколько больше скорости квазирэлеевской волны \bar{c}_R ($\bar{c}_R = 0,933557$). Как отмечалось выше, анализ кинематических характеристик поверхностных волн, выполненный в работе [11], показал, что при таком соотношении механических параметров мода 1, распространяясь вдоль границы контакта сред, локализуется, преимущественно, в приповерхностных областях как жидкости, так и упругого слоя. Вторая мода распространяется в упругом слое вдоль его свободной поверхности. Моды высокого порядка смещаются от поверхности внутрь слоя и локализуются в его толще [1].

Таким образом, анализ показывает, что в данных упруго-жидкостных системах низшие моды проникают в твердое тело и также, как и моды более высокого порядка, распространяются в упругом слое. При этом упругий слой является определяющим в формировании волнового поля и основным волноводом, по которому распространяются волновые возмущения и осуществляется перенос большей части энергии волн.

В случае гидроупругой системы: сталь – вода (сильно жесткий материал, рис. 3, б) механические параметры таковы, что скорость распространения волны звука в жидкости \bar{a}_0 ($\bar{a}_0 = 0,463021$) меньше скорости квазирэлеевской волны \bar{c}_R ($\bar{c}_R = 0,923202$). В связи с этим, согласно результатам, полученным в работе [11] для волн Стоунли, в высокочастотной части спектра глубина проникновения квазиповерхностной моды 1 в жидкость значительно больше глубины проникновения в упругое тело. Поэтому мода 1, распространяясь вдоль границы контакта сред, локализуется, преимущественно, в приповерхностной области жидкого полупространства.

Таким образом, анализ показывает, что в данной упруго-жидкостной системе первая мода не проникает в твердое тело и распространяется вдоль границы контакта сред, преимущественно, в приповерхностной области жидкости. В этом случае волноводом для распространения волны Стоунли и переноса большей части волновой энергии служит приповерхностная область жидкого полупространства.

Критерий существования квазилэмбовских мод в гидроупругих волноводах. Проведенные отдельно расчеты и анализ результатов, полученных в настоящей работе, показал, что соотношение между скоростями волны звука в жидкости и волны Рэлея в твердом теле может служить критерием, позволяющим устанавливать возможность существования нормальных квазилэмбовских волн в упругом слое, взаимодействующем с полупространством идеальной сжимаемой жидкости.

Как указывалось ранее, графики, приведенные на рис. 1, б, получены для гидроупругой композиции, состоящей из жидкости и упругого слоя из податливого материала. В этом случае механические параметры составляющих системы таковы, что скорость волны звука в жидкости больше скорости квазиповерхностной волны Рэлея в твердом слое ($\bar{a}_0 > \bar{c}_R$). При таком соотношении, как видно из рис. 1, б, жидкость не препятствует обмену энер-

гией между поверхностями упругого слоя. Это способствует взаимодействию продольной и сдвиговой волн на поверхностях упругого слоя и возникновению в нем полного набора незатухающих нормальных квазилэмбовских волн, дисперсионная картина и частотный спектр которых, несмотря на ряд различий, подобен волновому процессу в упругом слое, невзаимодействующем с жидкостью.

В гидроупругой системе с упругим слоем из слабо жесткого материала скорость волны звука в жидкости лишь немного превышает скорость волны Рэлея. В этом случае, как следует из графиков рис. 2, б, в упругом слое также возникают квазилэмбовские моды, но только такие, величина фазовой скорости которых меньше величины скорости звуковой волны в жидкости. Количество этих мод, распространяющихся без радиационного демпфирования, значительно меньше числа мод Лэмба в чисто упругом слое.

При взаимодействии упругого слоя из сильно жесткого материала с идеальным сжимаемым жидким полупространством скорость волны звука в жидкости меньше скорости квазиповерхностной волны Рэлея в твердом слое ($\bar{a}_0 < \bar{c}_R$). При таком соотношении между механическими параметрами компонентов системы жидкость препятствует обмену энергией между поверхностями упругого слоя. В этом случае, как видно из графика рис. 3, б, в упругом слое не формируются нормальные квазилэмбовские волны. В гидроупругом волноводе возникает лишь одна низшая мода 1, которая, распространяясь вдоль границы контакта сред, локализуется в приповерхностной области жидкости.

В заключение отметим, что воздействие жидкости проявляется в изменении критических частот и конфигурации дисперсионных кривых, а также в смещении их в длинноволновую часть спектра. Локализация низших мод в системе: жидкое полупространство — упругий слой зависит от механических параметров гидроупругой системы. Основным критерием существования нормальных квазилэмбовских волн и распределения низших мод в средах является соотношение между величинами скоростей волны звука в идеальной сжимаемой жидкости и квазиэрлеевской волны, распространяющейся вдоль свободной поверхности упругого слоя.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Викторов И.А. Звуковые поверхностные волны в твердых телах. — Москва: Наука, 1981. — 288 с.
2. Безруков А.В., Приходько В.Ю., Тютюкин В.В. Расчет характеристик нормальных волн мелкого моря с упругим дном (импедансный метод) // Акуст. журн. — 1987. — **33**, № 5. — С. 805–813.
3. Безруков А.В. Некоторые особенности распространения нормальных волн в мелком море с неоднородным упругим дном // Акуст. журн. — 1989. — **35**, № 4. — С. 744–747.
4. Guz A.N., Zhuk A.P., Bagno A.M. Dynamics of Elastic Bodies, Solid Particles, and Fluid Parcels in a Compressible Viscous Fluid (Review) // Int. Appl. Mech. — 2016. — **52**, No 5. — P. 449–507.
5. Guz A.N. Aerohydroelasticity problems for bodies with initial stresses // Int. Appl. Mech. — 1980. — **16**, No 3. — P. 175–190.
6. Гузь А.Н. Упругие волны в телах с начальными напряжениями. В 2 — х томах. — Киев: Наук. думка, 1986.
7. Гузь А.Н. Упругие волны в телах с начальными (остаточными) напряжениями. — Киев: А.С.К., 2004. — 672 с.
8. Гузь А.Н. Динамика сжимаемой вязкой жидкости. — Киев: А.С.К., 1998. — 350 с.
9. Guz A.N. Dynamics of compressible viscous fluid. — Cambridge: Cambridge Sci. Publ., 2009. — 428 p.
10. Гузь А.Н., Жук А.П., Махорт Ф.Г. Волны в слое с начальными напряжениями. — Киев: Наук. думка, 1976. — 104 с.
11. Волькенштейн М.М., Левин В.М. Структура волны Стоунли на границе вязкой жидкости и твердого тела // Акуст. журн. — 1988. — **34**, № 4. — С. 608–615.

Поступило в редакцию 05.07.2016

REFERENCES

1. Viktorov I. A. Sound surface waves in solids, Moscow: Nauka, 1981 (in Russian).
2. Bezrukov A.V., Prikhod'ko V.Yu., Tyutekin V.V. Acoustic J., 1987, **33**, No 5: 805–813 (in Russian).
3. Bezrukov A.V. Acoustic J., 1989, **35**, No 4: 744–747 (in Russian).
4. Guz A.N., Zhuk A.P., Bagno A.M. Int. Appl. Mech., 2016, **52**, No 5: 449–507.
5. Guz A. N. Int. Appl. Mech., 1980, **16**, No 3: 175–190.
6. Guz A. N. Elastic waves in bodies with initial stresses. In 2 vol., Kiev: Naukova Dumka, 1986 (in Russian).
7. Guz A. N. Elastic waves in bodies with initial (residual) stresses, Kiev: A.C.K., 2004 (in Russian).
8. Guz A.N. Dynamics of compressible viscous fluid, Kiev: A.C.K., 1998 (in Russian).
9. Guz A.N. Dynamics of compressible viscous fluid. Cambridge: Cambridge Scientific Publishers, 2009
10. Guz A.N., Makhort F.G., Guscha O.I. Introduction in acoustoelasticity. Kiev: Naukova Dumka, 1977 (in Russian).
11. Volkenstein M.M., Levin V.M. Acoustic J., 1988, **34**, No 4: 608–615 (in Russian).

Received 05.07.2016

О.М. Багно

Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, Київ
E-mail: alexbag2010@gmail.com

ПРО ДИСПЕРСІЮ ХВИЛЬ ЛЕМБА У ПРУЖНОМУ ШАРІ,
ЩО ВЗАЄМОДІЄ З ІДЕАЛЬНИМ РІДКИМ НАПІВПРОСТОРОМ

На основі тривимірних лінійних рівнянь класичної теорії пружності для твердого тіла та лінеаризованих рівнянь Ейлера для рідкого середовища досліджено поширення квазілембовських хвиль у системі: напівпростір ідеальної стисливої рідини — пружний шар. Побудовано дисперсійні криві для нормальних хвиль у широкому діапазоні частот. Проаналізовано вплив ідеальної стисливої рідини та товщини пружного шару на дисперсію фазових швидкостей квазілембовських мод у гідропружному хвилеводі. Досліджено локалізаційні властивості нижчих квазілембовських мод у гідропружних хвилеводах. Запропоновано критерій існування квазілембовських хвиль в гідропружних хвилеводах. Числові результати наведено у вигляді графіків та дано їх аналіз.

Ключові слова: дисперсія хвиль, пружний шар, напівпростір ідеальної стисливої рідини, локалізація квазілембовських мод.

О.М. Вагно

S.P. Timoshenko Institute of Mechanics of the NAS of Ukraine, Kiev
E-mail: alexbag2010@gmail.com

ON THE DISPERSION OF LAMB WAVES IN AN ELASTIC LAYER
INTERACTING WITH THE IDEAL LIQUID HALF-SPACE

The propagation of quasi-Lamb waves in the system «ideal compressible liquid half-space — elastic layer» is studied, by using the three-dimensional equations of classical elasticity theory for a solid body and linearized Euler equations for a fluid. The dispersion curves for normal waves over a wide range of frequencies are constructed. The influence of an ideal compressible fluid and the thickness of an elastic layer on the dispersion of phase velocities of the quasi-Lamb modes in a hydroelastic waveguide is analyzed. The localization properties of the lower quasi-Lamb modes in hydroelastic waveguides are studied. A criterion for the existence of the quasi-Lamb waves in hydroelastic waveguides is proposed. The numerical results obtained are presented in the form of plots and analyzed.

Keywords: dispersion of waves, elastic layer, half-space of an ideal compressible fluid, localization of quasi-Lamb modes.