

О ВЛИЯНИИ ТОНКОГО ПРОВОДЯЩЕГО СЛОЯ НА ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ НЕЗАЗЕМЛЕННОЙ ИНДУКЦИОННОЙ ПЕТЛИ

Введение. Классические модификации индукционных зондирований [1–5] базируются на экспериментальном определении частотных или временных характеристик электромагнитного поля в точках наблюдения, расположенных на определенном расстоянии от источника возбуждения. При этом в качестве источника информации о геоэлектрическом разрезе, которая обычно представляется в форме эффективных параметров, принимаются дифференциальные характеристики электромагнитного поля (напряженности электрического или магнитного полей или скорость изменения магнитной индукции). Таким образом, они являются дифференциальными модификациями как по системе наблюдений, так и по физической природе источников информации. Основные недостатки и ограничения электромагнитных зондирований связаны именно с дифференциальными особенностями метода исследований.

Дифференциальная схема индукционных электромагнитных зондирований полностью унаследована от геометрических зондирований на постоянном токе и соответствует классическим принципам электроразведки. В стационарном режиме определение дифференциальных характеристик поля действительно – это единственно возможный способ исследования его аномальных особенностей, обусловленных электрическими неоднородностями геологических объектов. Однако в переменных электромагнитных полях, где по сравнению со стационарным режимом существуют новые принципиальные возможности, изучения дифференциальных характеристик поля (напряженностей) является вовсе не единственным способом изучения геоэлектрического разреза.

С точки зрения классических способов электроразведки идеальный и максимально информативный вариант электромагнитных зондирований был бы в случае, если удалось бы выполнить одновременные наблюдения горизонтальных компонент электрического поля (E_x и E_y) и трех компонент магнитного поля (H_x , H_y , H_z) на множестве точек дневной поверхности в окрестности источника возбуждения. Поскольку такие наблюдения технически су-

стественно затруднены, можно ограничиться их общим результатом, который определяется как поток электромагнитной энергии через поверхность пространственного проводника. Математически такая задача сводится к определению потока вектора Пойтинга ($\mathbf{F} = [\mathbf{E} \times \mathbf{H}]$) через поверхность земли

$$P = \int_S [\mathbf{E} \times \mathbf{H}] \cdot d\mathbf{S} .$$

В соответствии с известной теоремой Умова–Пойтинга в интегральной форме с учетом квазистационарного приближения

$$\int_S [\mathbf{E} \times \mathbf{H}] \cdot d\mathbf{S} = \frac{\partial}{\partial t} \int_V \left(\frac{\mu H^2}{2} \right) dV + \int_V \gamma E^2 dV ,$$

поток энергии при нарастании тока в источнике расходуется на прирост энергии магнитного поля

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \left(\frac{\mu H^2}{2} \right) dV$$

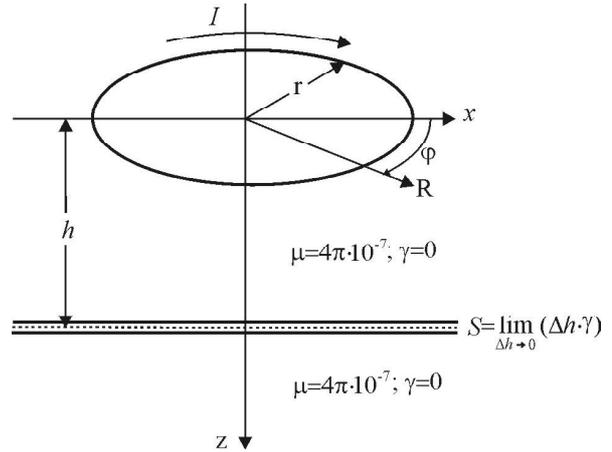
и на джоулевы потери в проводящей среде

$$\int_V \gamma E^2 dV ,$$

где μ и γ соответственно магнитная проницаемость и электрическая проводимость среды. При уменьшении тока в источнике часть энергии магнитного поля, за вычетом необходимых джоулевых потерь, возвращается к источнику.

Естественно, наиболее зависимыми от структуры разреза являются именно джоулевы потери в земле, а их динамическая зависимость от скорости изменения поля может быть принята за информативный параметр. Экспериментально этот параметр можно определить достаточно простым способом, в частности, путем исследования динамического взаимодействия источника и проводящего полупространства. Таким образом, принципиально является возможным осуществление электромагнитного зондирования на основе системы наблюдений, которая вообще исключает специальные приемные устройства. В качестве источника возбуждения поля могут использоваться индукционные петли и заземленные линии. Способ может осуществляться в гармоническом режиме и в режиме переходного процесса. Модификацию, которая основана на использовании индукционных петель в гармоническом режиме, уместно назвать интегральным индукционным зондированием (ИИЗ). Ее практическая реализация сводится к измерениям приращений интегральных характеристик индукционной петли – активного сопротивления и индуктивности в зависимости от частоты тока.

Рис. 1. Индукционная петля над тонким проводящим слоем



В предлагаемой работе остановимся на решении задачи о динамическом взаимодействии индукционной петли с одной из важных в электротехнике эталонных моделей, которой является тонкая проводящая пластина. Эта модель является простой моделью проводящей среды, для которой можно

получить относительно несложные решения. Она имеет существенное значение с точки зрения исследования основных закономерностей метода и позволяет получить простые рабочие формулы для анализа экспериментальных данных и их трансформации в эффективные геоэлектрические параметры.

Интегральные характеристики индукционной петли над тонким слоем могут быть просто выражены, если известно их квазистационарное электромагнитное поле. Учитывая это, рассмотрим задачу с более общих позиций.

Предположим, что круговая одновитковая индукционная петля радиусом r , изготовленная из тонкого кабеля радиусом $r_0 \ll r$, расположена на высоте h над тонким проводящим пластом (рис. 1), который при исчезающе малой мощности ($\Delta h \rightarrow 0$) имеет конечную продольную проводимость $S = \lim_{\Delta h \rightarrow 0} (\Delta h \cdot \gamma)$ (γ – удельная электрическая проводимость пласта).

Магнитная проницаемость пласта m и окружающего изолятора равна магнитной проницаемости вакуума ($\mu = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м). Петля возбуждается гармоническим током $J(t) = Ie^{-i\omega t}$ (I – амплитудное значение тока, ω – круговая частота возбуждения ($\omega = 2\pi f$, где f – циклическая частота), t – время, $i = \sqrt{-1}$ – мнимая единица). Начальная фаза возбуждающего тока выбирается таким образом, что при $\omega \rightarrow 0$ постоянный ток протекает по часовой стрелке. Нужно определить магнитное поле \mathbf{H} в любой точке пространства и на этой основе частотно зависящие приращения активного сопротивления $\Delta R(\omega)$ и индуктивности $\Delta L(\omega)$ по отношению к стационарному режиму (привнесенные сопротивление и индуктивность) и поверхностную плотность индуцированного вихревого тока \mathbf{i} в любой точке тонкого проводящего пласта.

Для решения сформулированной электродинамической задачи выбирается цилиндрическая система координат (R, φ, z) с началом, расположенным в центре петли, и осью z , направленной вниз (см. рис. 1). Задача в квазистационарном приближении решается путем интегрирования осесим-

метричного уравнения Лапласа для скалярных потенциалов магнитного поля $U_1(R, z)$ в верхнем ($z < h$) и $U_2(R, z)$ в нижнем ($z > h$) полупространствах

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^2 \frac{\partial U_{1,2}}{\partial R} \right) + \frac{\partial^2 U_{1,2}}{\partial z^2} = 0, \quad (1)$$

где $R = \sqrt{x^2 + y^2}$, с последующим определением собственно магнитного поля через градиент потенциальной функции:

$$\mathbf{H}^{(1,2)} = -\text{grad}U_{1,2}. \quad (2)$$

Для определения плотности поверхностного тока \mathbf{i} используется граничное условие на тонком пласте, что вытекает из закона Био-Савара для поверхностных токов [6]:

$$\text{Rot}\mathbf{H} = \mathbf{n} \times (\mathbf{H}^{(2)} - \mathbf{H}^{(1)}) = \mathbf{i}, \quad (3)$$

где $\text{Rot}\mathbf{H}$ – поверхностный ротор напряженности магнитного поля; \mathbf{n} – нормаль к поверхности пластины; $\mathbf{H}^{(1,2)}$ – напряженности магнитного поля в точках проводящего пласта со сторон, соответственно, верхнего (индекс 1) и нижнего (индекс 2), относительно тонкого проводящего пласта, полупространств.

Решая дифференциальное уравнение (1) методом разделения переменных, получим значения потенциалов $U_1(R, z, \omega)$ и $U_2(R, z, \omega)$ в виде:

а) для $z \leq h$

$$U_1(R, z, \omega) = U_0(R, z) + \int_0^{\infty} A(m, \omega) e^{mz} J_0(mR) dm, \quad (4)$$

б) для $z \geq h$

$$U_2(R, z, \omega) = U_0(R, z) + \int_0^{\infty} B(m, \omega) e^{-mz} J_0(mR) dm, \quad (4a)$$

где $U_0(R, z)$ – первичный магнитный потенциал (потенциал квазистационарного магнитного поля при отсутствии потерь на вихревые токи (окружающая среда является изолятором) или стационарного магнитного поля петли при отсутствии магнитоактивных объектов), который, согласно [7, 8], выражается:

$$U_0(R, z) = \pm I \frac{r}{2} \int_0^{\infty} e^{-m|z|} J_1(mr) J_0(mR) dm. \quad (5)$$

Знак (–) в формуле (5) отвечает верхнему ($z < 0$), а знак (+) – нижнему ($z > 0$) относительно плоскости проводящей пластины полупространствам.

При определении магнитного поля используется граничное условие непрерывности его вертикальной компоненты и граничное условие Шейнмана–Прайса [6] для вертикальной производной этой компоненты:

$$\begin{aligned} [H_z] \Big|_{z=h} = 0 \text{ или } \frac{\partial U_1}{\partial z} \Big|_{z=h} = \frac{\partial U_2}{\partial z} \Big|_{z=h} \\ \left(\frac{\partial H_z^{(2)}}{\partial z} - \frac{\partial H_z^{(1)}}{\partial z} \right) \Big|_{z=h} = k_s^2 H_z^{(1,2)} \text{ или } \left(\frac{\partial^2 U_2}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 U_1}{\partial z^2} \right) \Big|_{z=h} = k_s^2 \frac{\partial^2 U_{1,2}}{\partial z^2}, \end{aligned} \quad (6)$$

где $k_s = \sqrt{-i\omega\mu S}$ – волновая постоянная тонкого проводящего пласта.

После получения на основе предельных условий (6) коэффициентов $A(m, \omega)$ и $B(m, \omega)$, входящих в соотношения (4), решение для скалярных магнитных потенциалов можно представить так:

$$\begin{aligned} U_1(R, z, \omega) = U_0(R, z) + \frac{Irk_s^2}{2} \int_0^\infty \frac{e^{-m(2h-z)}}{2m + k_s^2} J_1(mr) J_0(mR) dm, \\ U_2(R, z, \omega) = U_0(R, z) - \frac{Irk_s^2}{2} \int_0^\infty \frac{e^{-mz}}{2m + k_s^2} J_1(mr) J_0(mR) dm. \end{aligned} \quad (7)$$

Магнитное поле петли имеет вертикальную и радиальную компоненты и через скалярный потенциал, согласно (2), может быть определено достаточно просто:

$$H_z^{(1,2)} = -\partial U_{1,2} / \partial z, \quad H_r^{(1,2)} = -\partial U_{1,2} / \partial r.$$

Электрическое поле на поверхности проводящего пласта имеет лишь азимутальную компоненту E_φ , определяющуюся на основе закона Ома для поверхностных токов с учетом (3):

$$E_\varphi = \frac{1}{S} i_\varphi(R, \omega) = \frac{1}{S} \left(\frac{\partial U_1}{\partial r} - \frac{\partial U_2}{\partial r} \right) \Big|_{z=h}. \quad (8)$$

Предельным случаем электромагнитного поля индукционной петли есть поле вертикального магнитного диполя. Его можно получить из (7), если задать бесконечно малые размеры петли ($r \rightarrow 0$) и учесть асимптотическое поведение функции Бесселя в области малого аргумента [1].

Электромагнитное поле дипольного источника получают, как правило, через вектор-потенциал электрического типа ($\mathbf{E} = \text{rot}\mathbf{A}$). Его детальный анализ имеется в работах [1–3, 9], следовательно, это хорошо изучено, чего не скажешь о поле петли конечных размеров.

В дальнейшем прежде всего нас будет интересовать частотно зависящее вторичное магнитное поле $H_z^{(1)}(\omega)$ в верхнем полупространстве ($z < h$), где находится источник. Поэтому, выполнив вычисления, согласно (2) и (7), приходим к следующему результату:

$$H_z^{(1)}(\omega) = -\frac{Irk_s^2}{2} \int_0^\infty \frac{me^{-m(2h-z)}}{2m+k_s^2} J_1(mr)J_0(mR)dm, \quad (9)$$

где $J_1(mr), J_0(mR)$ – функции Бесселя. Выразим вертикальное магнитное поле (9) в комплексной алгебраической форме

$$H_z^{(1)}(\omega) = \text{Re } H_z^{(1)}(\omega) + i \text{Im } H_z^{(1)}(\omega)$$

и определим, соответственно, его действительную и мнимую части в виде:

$$\begin{aligned} \text{Re } H_z^{(1)}(\omega) &= -\frac{Ira^2}{2} \int_0^\infty \frac{me^{-m(2h-z)}}{m^2+a^2} J_1(mr)J_0(mR)dm, \\ \text{Im } H_z^{(1)}(\omega) &= \frac{Ira}{2} \int_0^\infty \frac{m^2 e^{-m(2h-z)}}{m^2+a^2} J_1(mr)J_0(mR)dm, \end{aligned} \quad (10)$$

где $a = \frac{\omega\mu S}{2}$. Полученные соотношения (10) свидетельствуют о том, что в верхнем полупространстве за счет индуцированных вихревых токов действительная компонента вертикального магнитного поля ослабляется, а мнимая – усиливается.

Вычисляя частотно зависящий магнитный поток $\Phi(\omega)$ через контур петли

$$\Phi(\omega) = \mu \int_q H_z^{(1)}(R, 0, \omega) dq, \text{ где } q \text{ – площадь контура}$$

и учитывая закон Ома для гармонического тока I , который протекает в электрической цепи с последовательно включенными активным сопротивлением и индуктивностью:

$$V = I\dot{R} = I(R_a - i\omega L) - i\omega\Phi = I[(R_a + \Delta R(\omega)) - i\omega(L + \Delta L(\omega))], \quad (11)$$

где V – напряжение в контуре; \dot{R} – комплексное сопротивление контура; R_a и L – статические активное сопротивление и индуктивность контура (формула расчета статической индуктивности L круглой петли приведена в работах [7, 8, 10]), получим динамические приращения активного сопротивления $\Delta R(\omega)$ и индуктивности $\Delta L(\omega)$ одновитковой петли в виде:

$$\begin{aligned} \Delta R(\omega) &= q\omega\mu a \int_0^\infty \frac{me^{-2mh}}{m^2+a^2} J_1^2(mr)dm, \\ \Delta L(\omega) &= -q\mu a^2 \int_0^\infty \frac{e^{-2mh}}{m^2+a^2} J_1^2(mr)dm. \end{aligned} \quad (12)$$

По сравнению с одновитковой петлей, благодаря потокоцеплению, привнесенные активное сопротивление и индуктивность многовитковой

петли возрастают в n^2 раз (n – количество витков). Соотношения (12) свидетельствуют о том, что частотно зависящие приращения активного сопротивления и индуктивности источника возбуждения поля являются информативными параметрами, следовательно, могут быть приняты как новые в практике прикладных электрометрических исследований источники информации о геоэлектрическом разрезе.

Асимптотический анализ интегральных характеристик индукционной петли. Интегралы (12), к сожалению, не выражаются через элементарные или известные специальные функции. Это возможно только для асимптотических выражений в областях высоких и низких частот. Оценка высокочастотной асимптотики для многовитковой петли дает следующий результат:

$$\Delta R(\omega)|_{\omega \rightarrow \infty} = \frac{n^2}{S} f'(k); \Delta L(\omega)|_{\omega \rightarrow \infty} = -n^2 r \mu f(k). \quad (13)$$

Здесь

$$f(k) = f\left(\frac{h}{r}\right) = \left[\left(\frac{2}{k} - k \right) K(k) - \frac{2}{k} E(k) \right], \quad (14)$$

$$f'(k) = f'\left(\frac{h}{r}\right) = \left[\left(\frac{1}{1-k^2} + 1 \right) E(k) - 2K(k) \right] k \frac{h}{r},$$

где $k = r / \sqrt{r^2 + h^2}$ – модуль полных эллиптических интегралов первого

$$K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - k^2 \sin^2 \theta)^{-\frac{1}{2}} d\theta$$

и второго

$$E(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - k^2 \sin^2 \theta)^{\frac{1}{2}} d\theta$$

рода. Расчетные графики этих функций в зависимости от (h/r) приведены на рис. 2.

Как видно из (13), высокочастотная асимптотика $\Delta R(\omega)$ достаточно просто определяется продольной проводимостью S тонкого пласта и высотой подъема h над ним источника, в то время как асимптотика $\Delta L(\omega)$ зависит лишь от высоты подъема. Таким образом, имея экспериментальные определения ΔR и ΔL в интервале высоких частот и пользуясь зависимостями

$f\left(\frac{h}{r}\right)$ и $f'\left(\frac{h}{r}\right)$, по значениям асимптоты ΔL можно определить высоту подъе-

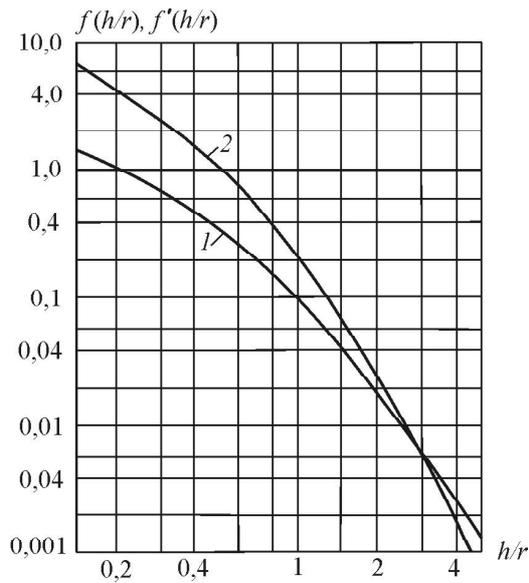


Рис. 2. Графики функций $f(h/r)$ (кривая 1) и $f'(h/r)$ (кривая 2) в зависимости от относительной высоты подъема индукционной петли h/r

ма источника h , а по асимптоте ΔR – продольную проводимость S тонкого слоя.

В случае, когда петля опущена непосредственно на пласт ($h=0$), для приращенного активного сопротивления имеем:

$$\Delta R(\omega) = q\omega\mu a I_1(ar) K_1(ar), \quad (15)$$

где $I_1(ar)$, $K_1(ar)$ – модифицированные функции Бесселя. Представление о частотной зависимости приведенного сопротивления индукционной петли, расположенной на тонком пласте, дает изображенный на рис. 3 график зависимости его нормированных значений $\Delta R(\omega)/(2q/r^2 S)$ от безразмерного частотного параметра ar .

На рис. 4 приведено также графическое изображение зависимости нормированного по частоте приведенного активного сопротивления $\Delta R(\omega)/(\omega\mu q/r)$ от того же безразмерного параметра ar . Использование последней аналитической зависимости в качестве номограммы обеспечивает однозначное определение продольной проводимости S тонкого пласта.

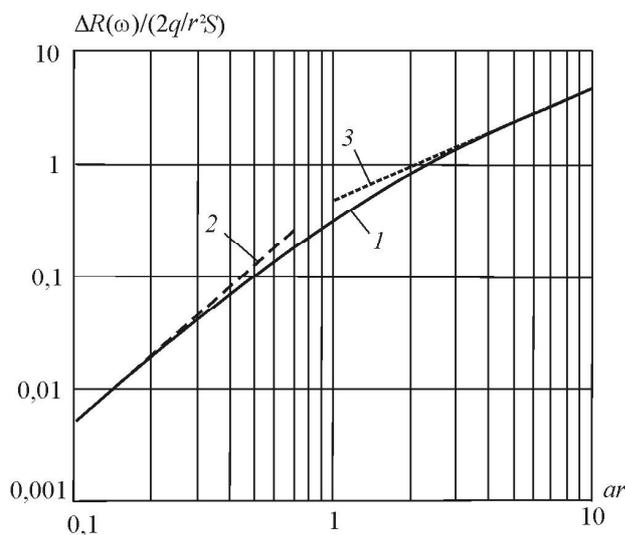


Рис. 3. Частотная зависимость прироста активного сопротивления индукционной петли, расположенной на проводящем тонком слое (1), ее низкочастотная (2) и высокочастотная (3) асимптоты

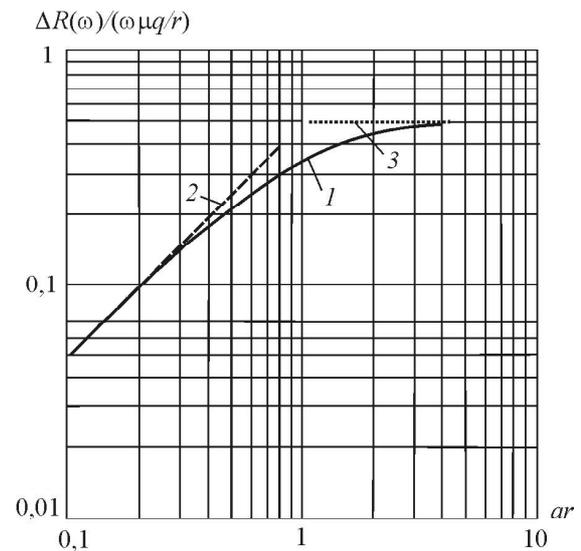


Рис. 4. Нормировочная функция прироста активного сопротивления индукционной петли для модели тонкого проводящего пласта (1), ее низкочастотная (2) и высокочастотная (3) асимптоты

В области низкочастотной асимптотики ($\omega \rightarrow 0$) для приростов сопротивления и индуктивности круглой петли получим следующий результат:

$$\begin{aligned}\Delta R(\omega)|_{\omega \rightarrow 0} &= n^2 q \frac{\omega^2 \mu^2 S}{2} \int_0^\infty \frac{e^{-2mh}}{m} J_1^2(mr) dm, \\ \Delta L(\omega)|_{\omega \rightarrow 0} &= -n^2 q \frac{\omega^2 \mu^3 S^2}{4} \int_0^\infty \frac{e^{-2mh}}{m^2} J_1^2(mr) dm.\end{aligned}\quad (16)$$

Соотношения (16) свидетельствуют, что в интервале низких частот асимптотические значения ΔR и ΔL возрастают соразмерно квадрату частоты ω и зависят от продольной проводимости тонкого пласта и высоты подъема петли. Поскольку оба уравнения (16) являются независимыми, то принципиально возможное однозначное решение инверсной задачи определения S и h по результатам измерений ΔR и ΔL . Таким образом, низкочастотная асимптотика интегральных характеристик индукционной петли информативна, что является достаточно существенным обстоятельством.

В случае, когда петля опущена на тонкий пласт ($h = 0$), интегралы в (16) определяются явным образом, и низкочастотные асимптотики можно представить в виде:

$$\Delta R(\omega)|_{\substack{\omega \rightarrow 0 \\ h \rightarrow 0}} = \frac{1}{4} n^2 q \omega^2 \mu^2 S; \quad \Delta L(\omega)|_{\substack{\omega \rightarrow 0 \\ h \rightarrow 0}} = \frac{-n^2 q r}{3\pi} \omega^2 \mu^3 S^2.\quad (17)$$

Как видно из (17), формулы для $\Delta R(\omega)$ и $\Delta L(\omega)$ удобны при практическом использовании для определения продольной проводимости тонкого пласта. Причем параметр $\Delta L(\omega)$ более чувствительный к электрическим свойствам пласта, поскольку он зависит от S^2 .

На основе асимптот интегральных характеристик петли нетрудно получить качественное представление об общих частотных зависимостях $\Delta R(\omega)$ и $\Delta L(\omega)$, которые определяются формулами (12). Так, при низких частотах приведенные сопротивление $\Delta R(\omega)$ и индуктивность $\Delta L(\omega)$ по абсолютным значениям достаточно интенсивно возрастают соразмерно квадрату частоты. С ростом частоты их частотная зависимость ослабевает, а на высоких частотах появляется частотно независимая асимптота.

На рис. 5 и 6 приведены графики зависимости динамических приращений активного сопротивления ΔR и индуктивности ΔL от частоты f , полученные по результатам физического моделирования интегрального индукционного зондирования в лабораторных условиях. При моделировании были использованы 115-витковая индукционная петля радиусом 14,5 см, поднятая на высоту 7,5 см над пластиной свинца толщиной 5 мм и продольной проводимостью $S=25000$ См, и 300-витковая петля радиусом 10,3 см,

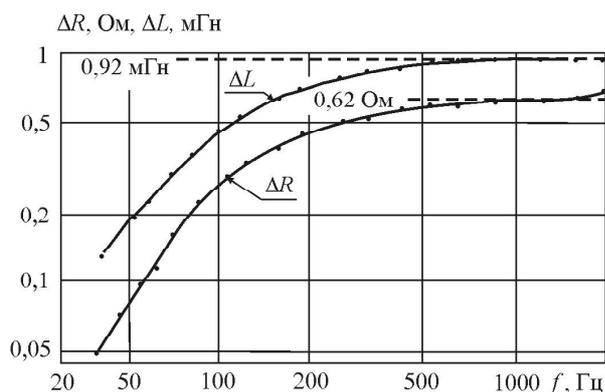


Рис. 5. Результаты физического моделирования над тонким проводящим пластом ($S = 25\ 000\ \text{См}$): параметры петли – $n = 115$ витков, $r = 14,5$ см, $R = 14,555$ Ом, $L = 0,7545$ мГн; высота подъема $h = 7,5$ см

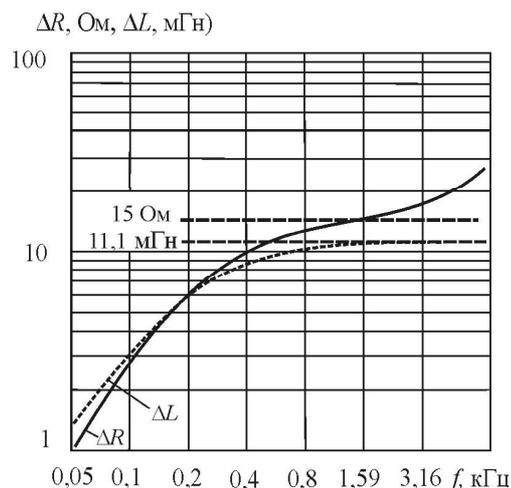


Рис. 6. Результаты физического моделирования над тонким проводящим пластом ($S = 25\ 000\ \text{См}$): параметры петли – $n = 300$ витков, $r = 10,3$ см, $R = 66,92$ Ом, $L = 45,1095$ мГн; высота подъема $h = 2,1$ см

поднятая над той же пластиной на высоту 2,1 см. Полученные графики полностью подтверждают разработанную теорию. В первом случае по высокочастотным асимптотам $\Delta R(f)|_{f \rightarrow \infty} = 0,62$ Ом и $\Delta L(f)|_{f \rightarrow \infty} = 0,92$ мГн были определены, согласно (13), продольная проводимость S тонкой проводящей пластины, которая составила $S = 24500$ см, и высота подъема петли $h = 7,65$ см. Во втором случае высокочастотные асимптоты прироста активного сопротивления и индуктивности петли составили значения $\Delta R(f)|_{f \rightarrow \infty} = 15$ Ом, $\Delta L(f)|_{f \rightarrow \infty} = 11,1$ мГн, а аналогичные определения продольной проводимости слоя S и высоты подъема петли h дали следующий результат: $S = 24200$ см; $h = 2,06$ см. Следовательно, результаты инверсных определений достаточно близко соответствуют действительности, что подтверждает правильность теоретических расчетов.

Заключение. В работе на примере исследования электродинамического взаимодействия индукционной петли и тонкого проводящего слоя показано, что идея использования в качестве информативных параметров интегральных характеристик источника поля имеет реальные перспективы быть воплощенной на практике. В дальнейшем необходима как глубокая разработка теоретических основ данного направления прикладной электротехники, так и методики экспериментального определения интегральных характеристик индукционной петли, которая полностью выплывает из уравнения (11). В сущности, такая методика сводится к измерениям активной и реактивной составляющих комплексного сопротивления источника возбуждения поля. Однако при этом нужно предпочесть измерениям самих интегральных характеристик непосредственные измерения их частотно зависящих приращений, что представляет собой новую техническую задачу.

1. Ваньян Л.Л. Основы электромагнитных зондирований. – Л.: Недра, 1965.
2. Ваньян Л.Л. Электромагнитные зондирования. – М.: Науч. мир, 1997.
3. Ваньян Л.Л. Становление электромагнитного поля и его использование для решения задач структурной геологии. – Недра, СО АН СССР. – 1966.
4. Вахромеев В.С., Кожевников И.О. Методика нестационарных зондирований в рудной электроразведке. – Иркутск, 1988.
5. Сидоров В.А. Импульсная индуктивная электроразведка. – М.: Недра. – 1985.
6. Булах Е.Г., Шуман В.Н. Основы векторного анализа и теория поля. – Киев.: Наук. думка. – 1998.
7. Рева М.В., Руденко Т.В. Первинне магнітне поле и статична індуктивність замкнутої індукційної петлі // Актуальні проблеми геології України. Зб.праць. – Киев, 2000. – С. 79.
8. Рева М.В., Руденко Т.В. Інтегральні характеристики індукційної петлі над однорідним провідним напівпростором // Вісн. Київ. нац. ун-ту ім. Т. Шевченка. Геологія. – 2004. – Вип. 30. – С. 26–30.
9. Гасаненко Л.Б. К вопросу о вычислении нормального поля приподнятого магнитного диполя // Ученые записки ЛГУ. Вопросы геофизики. – 1964. – № 324. – Вып. 15. – С. 21–30.
10. Рева М.В. Інтегральний принцип індукційних зондувань // Актуальні проблеми геології України. – Київ, 2000. – С. 78.
11. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды (специальные функции). – М.: Наука, 1983.
12. Агрест М.М., Максимов М.З. Теория неполных цилиндрических функций. – М.: Атомиздат, 1965.
13. Нейнман Л.Р., Демирчян К.С. Теоретические основы электротехники. Т. 1,2. – ЛО Энергия, 1967.
14. Эпов М.И., Ельцов И.Н. Прямые и обратные задачи индуктивной электрики в однородных средах. – Новосибирск, 1992.
15. Электроразведка. Справочник геофизика (в двух книгах)/ Под ред. Хмелевского В.К. и Бондаренко В.М. – М.: Недра, 1989.