

---

doi: <https://doi.org/10.15407/dopovidi2016.11.024>

УДК 519.6:550.843

**О.О. Литвин**

Українська інженерно-педагогічна академія, Харків  
E-mail: olegolitvin55@gmail.com

## **Математична модель вектора прискорення за його слідами в сейсморозвідці**

*(Представлено академіком НАН України І.В. Сергієнком)*

*Запропоновано метод побудови математичної моделі 4D розподілу вектора прискорення  $\bar{W}(x, y, z, t)$ , з яким коливаються частинки кори планети внаслідок проходження сейсмічної хвилі. Метод одночасно використовує і сліди  $\bar{W}$  в заданій системі свердловин  $\Gamma_k, k = \overline{1, M}$  і слід  $\bar{W}(x, y, 0, t)$  вектора  $\bar{W}$  на поверхні планети. Досліджено похибку методу, а також загальну похибку, що може виникати при чисельній реалізації запропонованого методу побудови математичної моделі. Експериментальні дані, що використовуються в математичній моделі, можуть бути отримані за допомогою акселерометрів, розміщених на різних глибинах як вертикальних, так і похилих свердловин, а також в різних точках поверхні планети.*

**Ключові слова:** математична модель, вектор прискорення, сліди вектора, сейсморозвідка, похибка наближення.

**Аналіз літературних джерел.** У роботі [1] читаємо (переклад автора даної статті): “Чому треба обмежуватися лише часами прибуття? Адже очевидно, що сейсмограма вміщує значно більше інформації, ніж просто час прибуття першого імпульсу в точку спостереження і ми повинні прагнути включити весь сейсмічний часовий ряд у вхідні дані і використати його в методиці отримання зображення. Такий підхід зустрічається з двома труднощами. Перша — величезний обсяг обчислень. Друга — зазвичай трудно або неможливо знайти зручне наближення розв’язку хвильового рівняння, яке було б цілком адекватним при моделюванні складних моделей Землі...”. Автором роботи [1] досліджується перша проблема у загальному вигляді, а друга — для низькочастотних сейсмічних хвиль з відносно малими горизонтальними фазовими швидкостями. Тому в [2] досліджені також прискорення частинок кори планети під час і після проходження сейсмічної хвилі за допомогою акселерометрів, розміщених на різних глибинах у системі свердловин. Запропонований в [2] метод використовує, в доповнення до методу знаходження швидкостей пробігу сейсмічної хвилі [1, 3, 4], також прискорення, з якими коливаються частинки геологічного середовища у заданій системі вертикальних свердловин під час і після проходження сейсмічної хвилі. Згідно з наведеними методами розв’язання задач сейсмічної томографії в [1–10], в даній роботі

вперше розв'язується задача побудови математичної моделі розподілу вектора-прискорення сейсмічних коливань між свердловинами за відомими слідами прискорення у кожній точці всіх свердловин  $\Gamma_k, k = \overline{1, M}$  та на поверхні  $z = 0$ .

**Зауваження.** Припущення про існування вектор-функцій

$$\overline{W}0(x, y, t) = \overline{W}(x, y, 0, t), \quad \overline{w}_k(z, t) = a_{1k}(z, t)\overline{i} + a_{2k}(z, t)\overline{j} + a_{3k}(z, t)\overline{k}, \quad k = \overline{1, M},$$

$$a_{mk}(z, t) = a_m(X_k(z), Y_k(z), z, t), \quad m = \overline{1, 3}$$

можна реалізувати на практиці лише методами обчислювальної математики, оскільки сучасні акселерометри дозволяють отримати значення  $\overline{w}_k(z_p, t_q), p = \overline{1, N}, q = \overline{1, Q}$ . Але за допомогою цих даних можна побудувати деякі наближення  $\overline{w}_k^*(z, t) \approx \overline{w}_k(z, t), k = \overline{1, M}$  і ними користуватися у подальшому. Аналогічне твердження справедливе і відносно вектор-функції  $\overline{W}0(x, y, t)$ .

**Основні твердження роботи.** Введемо систему базисних допоміжних функцій  $h_q(x, y, z), q = \overline{1, M}$  з властивостями  $h_q(X_p(z), Y_p(z), z) = \delta_{p,q}, 1 \leq p, q \leq M, \delta_{p,q}$  – символ Кронекера, вектори  $\overline{w}_k(z, t) = \overline{W}(X_k(z), Y_k(z), z, t), k = \overline{1, M}$  та оператор

$$O\overline{W}(x, y, z, t) = \overline{W}0(x, y, t) + \sum_{k=1}^M [\overline{w}_k(z, t)h_k(x, y, z) - \overline{w}_k(0, t)h_k(x, y, 0)].$$

**Теорема 1.** Оператор  $O\overline{W}$  має такі властивості:

- 1)  $O\overline{W}|_{z=0} = \overline{W}(x, y, z, t) = |_{z=0} \overline{W}0(x, y, t),$
- 2)  $O\overline{W}|_{x=X_p(z), y=Y_p(z)} = \overline{W}(X_p(z), Y_p(z), z, t) = \overline{w}_p(z, t), p = \overline{1, M}.$

**Теорема 2.** Для залишку  $(I - O)\overline{W} = \overline{W} - O\overline{W} = R\overline{W}$  справедлива формула:

$$R\overline{W}(x, y, z, t) = R_1 R_2 \overline{W}(x, y, z, t), \quad \text{де } R_1 \overline{W}(x, y, z, t) = \overline{W}(x, y, z, t) - \overline{W}0(x, y, t),$$

$$R_2 \overline{W}(x, y, z, t) = \overline{W}(x, y, z, t) - \sum_{k=1}^M \overline{w}_k(z, t)h_k(x, y, z).$$

**Зауваження.** При чисельній реалізації цієї математичної моделі розподілу вектора-прискорення на практиці перш за все відмітимо, що  $R_1(R_2 \overline{W}(x, y, z, t)) = R_1 R_2 \overline{W}$  – це похибка методу наближення. Проаналізуємо неусувну похибку, яка виникає при реалізації запропонованого методу при використанні наближених вхідних даних. На практиці функція  $\overline{W}0(x, y, t)$  може бути задана наближено функцією  $\overline{W}^*(x, y, t)$  яка використовує дані, отримані з акселерометрів, розміщених в  $M^* > M$  точках на поверхні планети  $z = 0$ . Тому  $\max_{(x, y, t)} |\overline{W}0(x, y, 0, t) - \overline{W}^*(x, y, t)| = \varepsilon_{21}$  є першою складовою неусувної похибки. Крім того, сліди  $\overline{w}_k(z, t)$  знаходяться наближено у вигляді  $\overline{w}_k^*(z, t)$  за їх значеннями  $\overline{w}_k(z_p, t_q), p = \overline{1, P}, q = \overline{1, Q}$ , що фіксуються акселерометрами. Тому друга складова неусувної похибки пов'язана з неточним представленням векторів  $\overline{w}_k(z, t), k = \overline{1, M}$ , векторами  $\overline{w}_k^*(z, t)$  визначається величиною  $\max_{(z, t)} |\overline{w}_k(z, t) - \overline{w}_k^*(z, t)| = \varepsilon_{22}$ . Таким чином неусувна похибка  $\varepsilon_2 = \varepsilon_{21} + \varepsilon_{22}$  є сумою похибок задання експериментальних даних у точках свердловин і на поверхні планети.

Третя складова загальної похибки — похибка заокруглення  $\varepsilon_3$ . Вона виникає при обчисленні операторів  $\overline{OW}(x, y, z, t)$  і залежить значною мірою від того, який аналітичний вигляд мають допоміжні функції  $h_k(x, y, z)$  та функції  $\overline{W}0^*(x, y, t)$ ,  $\overline{w}_k^*(z, t)$ ,  $k = \overline{1, M}$ . Сказане дозволяє сформулювати теорему 3.

**Теорема 3.** *Загальна похибка, що виникає при наближенні  $\overline{W}(x, y, z, t)$  оператором  $\overline{OW}(x, y, z, t)$ , дорівнює  $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$ .*

Таким чином, загальна похибка, що виникає при наближенні  $\overline{W}(x, y, z, t)$  оператором  $\overline{OW}(x, y, z, t)$ , складається з похибки  $\varepsilon_1$ , пов'язаної з методом наближення  $\overline{W}$  оператором  $\overline{OW}$ , з неусувної похибки  $\varepsilon_2 = \varepsilon_{21} + \varepsilon_{22}$ , пов'язаної з наближеним представленням слідів  $\overline{w}_k(z, t)$ ,  $k = \overline{1, M}$  у свердловинах і сліду  $\overline{W}0(x, y, t)$  на поверхні планети та похибки заокруглення  $\varepsilon_3$ , яка виникає при обчисленні  $\overline{OW}(x, y, z, t)$ .

Зауважимо, що похибку заокруглення можна зробити меншою за  $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$  шляхом проведення обчислень з достатньо великою кількістю розрядів чисел за допомогою сучасних систем комп'ютерної математики Matlab, Matematica тощо.

Таким чином, запропонований в роботі метод побудови математичної моделі 4D розподілу вектора-прискорення  $\overline{W}(x, y, z, t)$ , з яким коливаються частинки кори планети внаслідок проходження сейсмічної хвилі дозволяє використовувати дані, отримані за допомогою акселерометрів, розміщених на різних глибинах як вертикальних так і похилих свердловин та на поверхні планети. Цей метод вперше дозволяє поєднати методи міжсвердловинної сейсмічної томографії з методами побудови об'ємних сейсмічних зображень [2, 11–13].

#### ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. *Сейсмическая томография* / Под ред. Г. Нолет. — Москва: Мир, 1990. — С. 318–341.
2. *Sergienko I.V., Deyneka V.S., Lytvyn O.M., Lytvyn O.O.* Method interlineation the vector functions on a system of vertical lines and its application in inter-chinks seismic tomography. Proc. of the 7-th World Congress on Industrial Process Tomography (2–5 September 2013). Krakow, Poland, 2013.
3. *Guust Nolet.* A Breviary of Seismic Tomography. — Cambridge Univ. Press, 2008. — 344 p.
4. *James G. Berryman.* Lectures Notes on Nonlinear Inversion and Tomography. I. Borehole seismic tomography. — Univ. California, 1991. — 159 p.
5. *Анциферов А.В.* Теория и практика шахтной сейсморазведки. — Донецк: ООО “Алан”, 2003. — 312 с.
6. *Shearer P.M.* Introduction to seismology. — Cambridge Univ. Press, 2009. — 412 p.
7. *Stein S. and Wysession M.* An introduction to seismology, earthquakes and Earth structure. — Blackwell, Malden, USA, 2003. — 512 p.
8. *Towfighi S., Kundu T., Ehsani M.* Elastic wave propagation in circumferential direction in anisotropic cylindrical curved plates // J. Appl. Mech. — **69**. — 2002. — P. 283–291.
9. *Красножон М.Д., Козаченко В.Д.* Комплексна інтерпретація матеріалів ГДС з використанням комп'ютерної технології “ГЕОПОШУК”. — Київ: УкрДГРІ, 2007. — 254 с.
10. *Капутин Ю.Е.* Горные компьютерные технологии и геостатистика. — Ст.-Петербург: Недра, 2002. — 424 с.
11. *Богачик Г.Н., Гурвич И.И.* Сейсморазведка. — Тверь: АИС, 2006. — 745 с.
12. *Лісний Г.Д.* Використання моделей анізотропного середовища для аналізу сейсмічних зображень геологічних об'єктів. — Київ: КНУ ім. Т. Шевченка, 2002. — 136 с.
13. *Лісний Г.Д.* Практичні основи побудови об'ємних сейсмічних зображень за сейсмограмами спільних джерел. — Київ: Радуга, 2012. — 264 с.

#### REFERENCES

1. *Seismicheskaya tomografiya.* Ed. G. Nolet. Moscow: Mir, 1990 (in Russian).
2. *Sergienko I.V., Deyneka V.S., Lytvyn O.M., Lytvyn O.O.* Proceedings of the 7-th World Congress on Industrial Process Tomography (2–5 September 2013). Krakow, Poland, 2013.

3. *Guust Nolet*. A breviary of seismic tomography. Cambridge Univ. Press, 2008.
4. *James G. Berryman*. Lectures Notes on Nonlinear Inversion and Tomography. I. Borehole seismic tomography. Univ. California, October, 1991.
5. *Antsiferov A.V.* Teoriya i praktika shakhtnoy seismorazvedki. Donetsk: OOO "Alan", 2003 (in Russian).
6. *Shearer P.M.* Introduction to seismology. Cambridge Univ. Press, 2009.
7. *Stein S. and Wysession M.* An introduction to seismology, earthquakes and Earth structure. Blackwell, Malden, USA, 2003.
8. *Towfighi S., Kundu T., Ehsani M.* Appl. Mech., 2002, **69**: 283–291.
9. *Krasnozhon M.D., Kozachenko V.D.* Kompleksna interpretatsiya GDS z vykorystanniam komputernoї tehnologii "GEOPOSHUK", Kyiv: UkrDGRI, 2007 (in Ukrainian).
10. *Kaputin Y.E.* Gornye komputernye tehnologii i geostatistika. SPb: Nedra. 2002 (in Russian).
11. *Boganik G.N., Gurchich I.I.* Seysmorazvedka. Tver': AIS, 2006 (in Russian).
12. *Lisniy G.D.* Vykorystannya modeley anizotropnogo seredovyscha dlya analizu seysmichnyh zobrazhen' geologichnyh obyektiv, Kiev: KNU T. Shevchenka, 2002 (in Ukrainian).
13. *Lisniy G.D.* Praktychni osnovy pobudovy obyemnyh seysmichnyh zobrazhen' za seysmogramamy spil'nyh dzherel, Kiev: Raduga, 2012 (in Ukrainian).

Надійшло до редакції 22.04.2016

*О.О. Литвин*

Украинская инженерно-педагогическая академия, Харьков  
E-mail: olegolitvin55@gmail.com

#### МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ВЕКТОРА УСКОРЕНИЯ ПО ЕГО СЛЕДАМ В СЕЙСМОРАЗВЕДКЕ

*Предложен метод построения математической модели 4D распределения вектора ускорения  $\bar{W}(x, y, z, t)$ , с которым колеблются частички коры планеты вследствие прохождения сейсмической волны. Метод одновременно использует и следы  $\bar{W}$  в заданной системе скважин  $\Gamma_k, k = \overline{1, M}$  и след  $\bar{W}(x, y, 0, t)$  вектора  $\bar{W}$  на поверхности планеты. Исследована погрешность метода. а также общая погрешность, которая может возникать при числовой реализации предложенного метода построения математической модели. Экспериментальные данные, которые используются в математической модели, могут быть получены при помощи акселерометров, которые размещены на разных глубинах как вертикальных так и наклонных скважин, а также в разных точках поверхности планеты.*

**Ключевые слова:** математическая модель, вектор ускорения, следы вектора, сейсморазведка, погрешность приближения.

*О.О. Lytvyn*

Ukrainian Engineering Pedagogics Academy, Kharkiv  
E-mail: olegolitvin55@gmail.com

#### A MATHEMATICAL MODEL OF THE ACCELERATION VECTOR BY ITS TRACKS IN SEISMIC PROSPECTING

*A method of constructing a mathematical model of the 4D distribution of the acceleration vector  $\bar{W}(x, y, z, t)$ , with which particles of Earth's crust oscillate due to the passage of seismic waves. The method uses both tracks of  $\bar{W}$  in a given system of wells  $\Gamma_k, k = \overline{1, M}$ , and the trace  $\bar{W}(x, y, 0, t)$  of the vector  $\bar{W}$  on Earth's. The error of the method and the total error that can occur in a numerical realization of the proposed method are studied. Experimental data used in a mathematical model can be obtained with the use of accelerometers, which are arranged at different depths of both vertical and inclined wells and also at various points on Earth's surface.*

**Keywords:** mathematical model, acceleration vector, traces of a vector, seismic prospecting, approximation error.