ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

10 • 2016

МАТЕМАТИКА

http://dx.doi.org/10.15407/dopovidi2016.10.005

УДК 517.5

С.В. Волков, В.И. Рязанов

Институт прикладной математики и механики
НАН Украины, Славянск
E-mail: sergey.v.volkov@mail.ru, vl.ryazanov1@gmail.com

К теории граничного поведения отображений класса Соболева на римановых поверхностях

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины В.Я. Гутлянским)

В терминах дилатаций сформулирован ряд критериев для гомеоморфного продолжения на границу отображений класса Соболева между областями на римановых поверхностях.

Ключевые слова: *римановы поверхности, граничное поведение, гомеоморфное продолжение, классы Соболева, слабо плоские границы.*

Теория граничного поведения отображений класса Соболева $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$ с приложениями к краевым задачам на плоскости развивалась в недавних работах (см., например, [1—3]).

Концепция римановой поверхности, которая восходит к Б. Риману (1851—1857 г.), оказалась весьма плодотворной как для чисто теоретических, так и прикладных аспектов теории функций комплексного переменного.

Теория квазиконформных отображений, начало которой положили исследования М.А. Лаврентьева и Г. Греча, еще в тридцатых годах прошлого века стала применяться к теории римановых поверхностей в качестве удобного рабочего метода (Л.И. Волковыский, А. Пфлюгер и др.), а в сороковых годах уже О. Тейхмюллер предугадал значительно более глубокие связи между этими теориями.

Определение римановой поверхности $\mathbb{S}$ широко известно и его можно найти в многочисленных монографиях на эту тему, например в [4], а определение ее компактификации Керекьярто—Стоилова $\overline{\mathbb{S}}$ — в книге [5].

1. Об отображениях с конечным искажением. Пусть D и D^* — области на римановых поверхностях $\mathbb{S}$ и $\mathbb{S}^*$ соответственно. Будем говорить, что отображение $f : D \to D^*$ принадлежит классу Соболева $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$, если f принадлежит $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$ в локальных координатах, т.е. если для любой точки $p \in \mathbb{S}$ найдутся карты $g : U \to V \subseteq \mathbb{C}$ и $g_* : U_* \to V_* \subseteq \mathbb{C}$ на $\mathbb{S}$ и $\mathbb{S}^*$ соответственно такие, что $p \in U, f(U) \subseteq U_*$ и классу $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$ принадлежит отображение

$$F := g_* \circ f \circ g^{-1} : V \to V_* . \tag{1}$$

Отображение $f \in W^{1,1}_{\text{loc}}$ в комплексной плоскости $\mathbb{C}$ называется *конечного искажения*, если п. в. либо $|f_z| > |f_{\bar{z}}|$, либо $f_z = 0 = f_{\bar{z}}$, где

$$f_{\bar{z}} = \left(f_x + if_y\right)/\,2,\;\; f_z = \left(f_x - if_y\right)/\,2,\;\; z = x + iy,$$

и f_x и f_y — частные производные f по x и y соответственно. При этом полагают

$$K_f\left(z\right) = \frac{|f_z| + |f_{\bar{z}}|}{|f_z| - |f_{\bar{z}}|} \tag{2}$$

при $|f_z| > |f_{\bar{z}}|$, 1 при $f_z = 0 = f_{\bar{z}}$ и ∞ в противном случае, т. е. $K_f(z) < \infty$ п. в. Величина $K_f(z)$ называется *дилатацией* отображения f в точке z.

Гомеоморфизм $f : D \to D^*$ между областями D и D^* на римановых поверхностях $\mathbb{S}$ и $\mathbb{S}^*$ будем называть *отображением с конечным искажением*, если он является таковым в локальных координатах. В этом случае $K_f(z)$ обозначает дилатацию отображения f в локальных координатах, т.е. дилатацию отображения F из (1). Указанная величина инвариантна при замене локальных координат, т. е. K_f на самом деле является функцией $K_f(p)$ точки $p \in \mathbb{S}$, а не локальных координат.

2. О регулярных областях. Напомним, что область D на многообразии называется *локально связной в точке* ∂D, если для любой окрестности U этой точки существует ее окрестность $V \subseteq U$ такая, что $V \cap D$ — область.

Далее, борелевскую функцию $\rho : \Omega \to [0, \infty]$ называют *допустимой функцией* для семейства Γ кривых γ в открытом множестве $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, пишут $\rho \in \operatorname{adm}\Gamma$, если

$$\int\limits_{\gamma} \rho\, ds \geqslant 1 \quad \forall \gamma \in \Gamma. \tag{3}$$

Конформным модулем семейства Γ называется величина

$$M(\Gamma) = \inf_{\rho \in \operatorname{adm}\Gamma} \int\limits_{\Omega} \rho^2(z)\, dm(z), \tag{4}$$

где $dm(z)$ соответствует мере Лебега в $\mathbb{C}$.

Ниже $\Delta(E, F; \Omega)$ обозначает семейство всех кривых $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$, которые соединяют множества E и F в Ω, т. е. $\gamma(a) \in E$, $\gamma(b) \in F$ и $\gamma(t) \in \Omega$ при $a < t < b$. Говорят (см., например, [6, 7], что граница области D в $\mathbb{C}$ *слабо плоская*, если для любой точки $z_0 \in \partial D$, любой ее окрестности U и любого числа $N > 0$ найдется окрестность $V \subset U$ точки z_0 такие, что

$$M(\Delta(E, F; D)) \geqslant N \tag{5}$$

для всех континуумов E и F в D, пересекающих ∂U и ∂V. Отметим, что *гладкие* и *липшицевы границы* являются слабо плоскими.

Как известно, если граница D из $\mathbb{C}$ является слабо плоской в точке $z_0 \in \partial D$, то D локально связна в z_0 (см., например, лемму 5.1 в [6] или лемму 13.15 в [8]). Очевидно, что локальная связность в граничной точке является инвариантом при гомеоморфных отображениях ее окрестности. Таким образом, имеем следующее заключение.

Предложение 1. *Если область D на римановой поверхности $\mathbb{S}$ является слабо плоской в точке ∂D, то она локально связна в этой точке.*

Поскольку конфомный модуль инвариантен относительно конформных отображений, перечисленные понятия переносятся на римановы поверхности в терминах локальных координат.

Модуль семейства Γ кривых $\gamma : (a, b) \to \mathbb{S}$ на римановой поверхности $\mathbb{S}$ через карты можно ввести следующим образом. Прежде всего, по теореме Линделефа из карт $g : U \to V$ ее комплексной структуры можно выделить счетный набор $g_l : U_l \to V_l$, $l = 1, 2, \ldots$, накрывающий Γ (см., например, 5.XI в [9]). Заметим, что $\Delta_l := \gamma^{-1}(U_l)$ является открытым подмножеством вещественной оси, поскольку $\gamma : (a, b) \to \mathbb{S}$ — непрерывное отображение, т.е. каждое Δ_l состоит из счетного числа интервалов. Таким образом, $\gamma_l^* := g_l \circ \gamma_l|_{\Delta_l} : \Delta_l \to \mathbb{C}$ — штриховые линии в $\mathbb{C}$ (см., например, [8] или [6]). Модули семейств Γ_l штриховых линий γ_l^* определяются аналогично (3), (4). Наконец, полагаем

$$M(\Gamma) = \inf \sum_{l=1}^{\infty} M(\Gamma_l), \tag{6}$$

где инфимум берется по всем покрытиям Γ счетными наборами карт римановой поверхности $\mathbb{S}$.

3. Основные результаты. Далее мы подразумеваем, что дилатация K_f продолжена нулем вне области D.

Теорема 1. *Пусть $\mathbb{S}$ и $\mathbb{S}^*$ — римановы поверхности, D и D^* — области в $\overline{\mathbb{S}}$ и $\overline{\mathbb{S}^*}$ соответственно, $\partial D \subset \mathbb{S}$ и $\partial D^* \subset \mathbb{S}^*$, D локально связна на границе, а ∂D — слабо плоская, и пусть $f : D \to D^*$ — гомеоморфизм конечного искажения с $K_f \in L^1_{\mathrm{loc}}$. Если для любой точки $p_0 \in \partial D$ с локальной координатой z_0 в некоторой карте U поверхности $\mathbb{S}$*

$$\int_0^{\delta} \frac{dr}{\|K_f\|(z_0, r)} = \infty \tag{7}$$

при всех достаточно малых $\delta > 0$, где

$$\|K_f\|(z_0, r) = \int_{|z - z_0| = r} K_f(z)\,|dz|, \tag{8}$$

то отображение f продолжимо до гомеоморфизма $\overline{D}$ на $\overline{D^*}$.

Следствие 1. *В частности, заключение теоремы 1 имеет место, если для любой точки $p_0 \in \partial D$ с локальной координатой z_0 в карте U поверхности $\mathbb{S}$*

$$K_f(z) = O\left(\log \frac{1}{|z - z_0|}\right) \text{ при } z \to z_0 \tag{9}$$

или, более общо,

$$k_{z_0}(\varepsilon) = O\left(\log \frac{1}{\varepsilon}\right) \text{ при } \varepsilon \to 0, \tag{10}$$

где $k_{z_0}(\varepsilon)$ — среднее значение функции K_f на окружности $|z - z_0| = \varepsilon$.

Теорема 2. *При условиях теоремы 1, если для любой точки $p_0 \in \partial D$ найдется карта поверхности $\mathbb{S}$, содержащая p_0, в локальных координатах которой*

$$\int \Phi\big(K_f(z)\big)\,dm(z) < \infty, \tag{11}$$

где $\Phi : \overline{\mathbb{R}}_+ \to \overline{\mathbb{R}}_+$ – неубывающая выпуклая функция с условием

$$\int_{\delta}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau \Phi^{-1}(\tau)} = \infty, \ \delta > \Phi(0), \tag{12}$$

то отображение f продолжимо до гомеоморфизма $\overline{D}$ на $\overline{D^*}$.

Следствие 2. *В частности, заключение теоремы 2 имеет место, если при некотором $\alpha > 0$*

$$\int e^{\alpha K_f(z)}\,dm(z) < \infty. \tag{13}$$

Следуя работе [10], говорим, что функция $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ в открытом множестве $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ имеет конечное среднее колебание в точке $z_0 \in D$, пишем $\varphi \in \mathrm{FMO}(z_0)$, если

$$\limsup_{\varepsilon \to 0} \;\; \fint_{B(z_0,\varepsilon)} \left|\varphi(z) - \widetilde{\varphi}_\varepsilon\right| dm(z) < \infty, \tag{14}$$

где $\tilde{\varphi}_\varepsilon$ — среднее значение φ в круге $B(z_0, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \varepsilon\}$.

Теорема 3. *Если при условиях теоремы 1 для любой точки $p_0 \in \partial D$ с локальной координатой z_0 в некоторой карте U поверхности $\mathbb{S}$*

$$K_f(z) \leqslant Q(z) \in \mathrm{FMO}(z_0), \tag{15}$$

то отображение f продолжимо до гомеоморфизма $\overline{D}$ на $\overline{D^*}$.

Следствие 3. *В частности, заключение теоремы 3 имеет место, если*

$$\limsup_{\varepsilon \to 0} \;\; \fint_{B(z_0,\varepsilon)} K_f(z)\, dm(z) < \infty. \tag{16}$$

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. *Ковтонюк Д.А., Петков И.В., Рязанов В.И.* О граничном поведении решений уравнений Бельтрами // Укр. мат. журн. — 2011. — **63**, № 8. — С. 1078—1091.
2. *Ковтонюк Д.А., Петков И. В., Рязанов В.И.* О задаче Дирихле для уравнений Бельтрами в конечносвязных областях // Укр. мат. журн. — 2012. — **64**, № 7. — С. 932—944.
3. *Ковтонюк Д.А., Петков И.В., Рязанов В.И., Салимов Р. Р.* Граничное поведение и задача Дирихле для уравнений Бельтрами // Алгебра и анализ. — 2013. — **25**, вып. 4. — С. 101—124.
4. *Форстер О.* Римановы поверхности. — Москва: Мир, 1980. — 248 с.
5. *Стоилов С.* Лекции о топологических принципах теории аналитических функций. — Москва: Наука, 1964. — 226 с.
6. *Ковтонюк Д.А., Рязанов В.И.* К теории нижних Q-гомеоморфизмов // Укр. мат. вестник. — 2008. — **5**, № 2. — С. 159—184.
7. *Рязанов В.И., Салимов Р.Р.* Слабо плоские пространства и границы в теории отображений // Укр. мат. вестник. — 2007. — **4**, № 2. — С. 199—234.
8. *Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* Moduli in Modern Mapping Theory. — New York: Springer, 2009. — 367 p.
9. *Куратовский К.* Топология. Т. 1. — Москва: Мир, 1966. — 594 с.
10. *Игнатьев А.А., Рязанов В.И.* Конечное среднее колебание в теории отображений // Укр. мат. вестник. — 2005. — **2**, № 3. — С. 395—417.

REFERENCES

1. *Kovtonyuk D.A., Petkov Y.V., Ryazanov V.Y.* Ukr. mat. zhurn., 2011, **63**, No 8: 1078-1091 (in Russian).
2. *Kovtonyuk D.A., Petkov Y.V., Ryazanov V.Y.* Ukr. mat. zhurn., 2012, **64**, No 7: 932-944 (in Russian).
3. *Kovtonyuk D.A., Petkov Y.V., Ryazanov V.Y., Salymov R.R.* Alhebra i Analyz, 2013, **25**, Iss. 4: 101-124 (in Russian).
4. *Forster O.* Rymanovy poverkhnosty, Moscow: Mir, 1980 (in Russian).
5. *Stoylov S.* Lektsyy o topolohycheskykh pryntsypakh teoryy analytycheskykh funktsyy, Moscow: Nauka, 1964 (in Russian).
6. *Kovtonyuk D.A., Ryazanov V.Y.* Ukr. mat. vestnyk, 2008, **5**, No 2: 159-184 (in Russian).
7. *Ryazanov V.Y., Salymov R.R.* Ukr. mat. vestnyk, 2007, **4**, No 2: 199-234 (in Russian).
8. *Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* Moduli in Modern Mapping Theory, New York: Springer, 2009.
9. *Kuratovskyy K.* Topolohyya, T. 1, Moscow: Mir, 1966 (in Russian).
10. *Yhnat'ev A. A., Ryazanov V.Y.* Ukr. mat. vestnyk, 2005, **2**, No 3: 395-417 (in Russian).

Поступило в редакцию 15.04.2016

С.В. Волков, В.І. Рязанов

Інститут прикладної математики і механіки
НАН України, Слов'янськ
E-mail: sergey.v.volkov@mail.ru, vl.ryazanov1@gmail.com

ДО ТЕОРІЇ ГРАНИЧНОЇ ПОВЕДІНКИ ВІДОБРАЖЕНЬ
КЛАСУ СОБОЛЄВА НА РІМАНОВИХ ПОВЕРХНЯХ

У термінах дилатацій сформульовано ряд критеріїв для гомеоморфного продовження на межу відображення класу Соболєва між областями на ріманових поверхнях.

Ключові слова: *ріманові поверхні, гранична поведінка, гомеоморфне продовження, класи Соболєва, слабо плоскі межі.*

S.V. Volkov, V.Y. Ryazanov

Institute of Applied Mathematics and Mechanics
of the NAS of Ukraine, Slovyansk
E-mail: sergey.v.volkov@mail.ru, vl.ryazanov1@gmail.com

ON THE THEORY OF THE BOUNDARY BEHAVIOR
OF MAPPINGS OF THE SOBOLEV CLASS ON RIEMANN SURFACES

In terms of dilatations, a number of criteria for a homeomorphic extension to the boundary of mappings in the Sobolev class between domains on Riemann surfaces are formulated.

Keywords: *Riemann surfaces, boundary behavior, homeomorphic extension, Sobolev classes, weakly flat boundaries.*