

PACS number: 71.15.Qe, 71.35.-y, 73.20.Mf, 73.21.La, 73.22.Lp, 77.22.Ej, 78.20.Bh

Объемные локальные одночастичные состояния квазичастиц в квазиульмерных системах

А. П. Шпак, С. И. Покутний*, В. Н. Уваров

*Институт металлофизики им. Г. В. Курдюмова НАН Украины,
бульв. Акад. Вернадского, 36,
03680, ГСП, Киев-142, Украина*

**Отдел теоретических проблем спектроскопии низкоразмерных систем
Института металлофизики им. Г. В. Курдюмова НАН Украины,
ул. Данченко, 17А,
68002 Ильичевск, Одесская обл., Украина*

Приведен обзор результатов теоретических и экспериментальных исследований объемных локальных состояний квазичастиц (электрона и дырки), возникающих в объеме полупроводниковых сферических квантовых точек, в условиях сильного поляризационного взаимодействия носителей заряда с поверхностью квантовой точки. Показано, что в спектре объемных локальных состояний имеется область низколежащих состояний, обладающих спектром осцилляторного типа. Установлено, что объемные локальные состояния в квантовых точках являются достаточно стабильными (со временами жизни порядка 10^{-1} с).

Наведено огляд результатів теоретичних та експериментальних досліджень об'ємних локальних станів квазичастинок (електрона й дірки), які виникли в об'ємі напівпровідникових сферичних квантових точок, в умовах сильного поляризаційного взаємочину носіїв заряду з поверхнею квантової точки. Показано, що у спектрі об'ємних локальних станів є область низьколежачих станів, які характеризуються спектром осциляторного типу. Встановлено, що об'ємні локальні стани у квантових точках є достатньо стабільними (із часом життя, що має порядок 10^{-1} с).

The results of theoretical and experimental investigations of bulk local states of quasi-particles (an electron and a hole) appearing in the bulk of semiconductor spherical quantum dots under the condition of strong polarization interaction between the charge carriers and the quantum-dot surface are reviewed. As shown, there are low-lying oscillator-type states in the spectrum of bulk local states. As revealed, the bulk local states in quantum dots are stable (with a life cycle of $\cong 10^{-1}$ s).

Ключевые слова: спектр, объемные локальные состояния, квантовые точки, поляризационное взаимодействие.

(Получено 22 января 2007 г.)

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время интенсивно исследуются оптические свойства различных неоднородных конденсированных сред с пониженной размерностью [1–4]. Перестройка электронного спектра полупроводника под влиянием граничащего с ним вещества (другого полупроводника, металла или диэлектрика) и связанные с ней оптические эффекты изучались в [4–20]. Возможность локализации экситонов большого радиуса на границе раздела полупроводник–диэлектрик и полупроводник–вакуум силами электростатического изображения была показана в [4, 21–25].

Особый интерес вызывает локализация носителей заряда в квазиультимерных структурах, представляющих собой сферические полупроводниковые квантовые точки (КТ) с размерами $a \approx 1–10$ нм, диспергированные в различных диэлектрических конденсированных средах (в полупроводниках, в металлах, в диэлектриках) [26–34]. Такие размеры КТ сравнимы с характерными размерами квазичастиц в полупроводниках. В этих условиях становится существенным влияние границы сферической КТ на спектр квазичастиц, движущихся в объеме КТ. Влияние границы КТ может вызвать размерное квантование энергетического спектра ее квазичастиц, связанное как с чисто пространственным ограничением области квантования [35], так и с поляризационным взаимодействием носителей заряда с поверхностью КТ [1–3, 13, 36, 37]. В [26–34] было обнаружено, что структура спектров поглощения и люминесценции КТ определялась размерным квантованием энергетического спектра свободных квазичастиц. Влияния поляризационного взаимодействия на спектр носителей заряда и на спектр экситона большого радиуса вблизи сферической границы раздела двух различных диэлектрических сред изучались в [1–13] и в [1–3, 27–34, 36, 37].

Явление фотоионизации КТ CdS, выращенных в матрице силикатного стекла, и КТ CdS и TiO₂, помещенных в водных растворах, экспериментально исследовалось в [28, 29] и в [30–32, 38]. Было установлено, что неравновесный электрон, создаваемый при межзонном возбуждении КТ, выходил из объема КТ и захватывался на собственных электронных ловушках матрицы. В результате в объеме КТ оставался избыточный носитель заряда (дырка).

Выполненные в [12] численные расчеты энергии поляризационного взаимодействия и приближенные вариационные оценки с использованием теории возмущений [10, 11] показали, что поляризацион-

ный вклад в энергию дырки $E_n(a)$ (где n и l — главное и орбитальное квантовые числа носителя заряда) сравним с вкладом, вносимым в энергию дырки квантовым размерным эффектом, связанным с чисто пространственным ограничением области движения дырки непроницаемыми стенками сферического нанокристалла сульфида кадмия с радиусом $a \approx 5$ нм. В таких условиях, зависимость энергетического спектра носителя заряда $E_n(a)$ от размера нанокристалла a должна существенно меняться в зависимости от квантовых чисел (n, l), соответствующих разным возбужденным состояниям.

В настоящем обзоре развивается теория энергетического спектра носителей заряда, движущихся в объеме КТ. Исследуется зависимость энергетического спектра носителей заряда от радиуса a КТ, эффективной массы носителей заряда, относительной диэлектрической проницаемости в условиях, когда поляризационное взаимодействие носителей заряда с поверхностью КТ играет существенную роль. Рассматривается также сравнение полученного спектра с результатами экспериментов [28, 29]. Приводятся оценки ширин уровней объемных состояний носителей заряда в полупроводниковых сферических наносистемах.

2. ОБЪЕМНЫЕ ЛОКАЛЬНЫЕ СОСТОЯНИЯ. ГАМИЛЬТониАН ЗАДАЧИ

В качестве простой модели квазинульмерной структуры рассмотрим сферическую КТ с радиусом a , в объеме которой движется частица с зарядом e и эффективной массой m , с диэлектрической проницаемостью ε_2 , диспергированную в среде с ε_1 . Возникающее при этом поляризационное взаимодействие носителей заряда $U(r, a)$ (где r — расстояние заряда до центра микрокристалла), с индуцированным на сферической поверхности раздела двух различных диэлектрических сред поверхностным зарядом, зависит от величины относительной диэлектрической проницаемостью ($\varepsilon = \varepsilon_1/\varepsilon_2$) [5–13].

Для носителей заряда, находящихся внутри КТ существуют две возможности: 1) при $\varepsilon > 1$ поляризационное взаимодействие приводит к притяжению носителя заряда к поверхности КТ и образованию внутренних поверхностных состояний [5, 6, 9]; 2) при $\varepsilon < 1$ поляризационное взаимодействие приводит к отталкиванию носителей заряда от поверхности КТ и возникновению объемных локальных состояний [5, 6, 10–12].

Рассмотрим состояния заряженной частицы в поле притягивающих к центру нанокристалла потенциалов [5, 6, 9–12]:

$$U(r, a) = \frac{e^2\beta}{2\varepsilon_2 a} \left[\frac{a^2}{a^2 - r^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{a}{r} \right) \ln \left(\frac{a - r}{a + r} \right) \right], \quad \varepsilon_2 \geq \varepsilon_1; \quad (1)$$

$$U(r, a) = \frac{e^2}{2\varepsilon_2 a} \left[\frac{a^2}{a^2 - r^2} + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} + \left(\frac{r}{a} \right)^2 \ln \left(1 - \frac{r}{a} \right) \right], \quad \varepsilon_2 \gg \varepsilon_1; \quad (2)$$

тут параметр наносистемы

$$\beta = \frac{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{(\varepsilon_2 + \varepsilon_1)}. \quad (3)$$

Возникновение объемных локальных состояний носителей заряда в квазиульмерных системах принципиально отличалось от возникновения изученных в [5, 6, 9] внутренних поверхностных состояний. Уровни внутренних поверхностных состояний находились в потенциальной яме ниже сплошного спектра $E_{nl}(a)$, соответствующего «свободному» движению, ограниченному лишь «стенками» микрокристалла. Теперь же рассмотрим случай состояний в потенциальной яме, приближенно имеющей вид [5, 10–12]:

$$U(x, S) = \frac{Ry^*}{S} \frac{1}{1 - x^2}, \quad 0 < x = \frac{r}{a} < 1. \quad (4)$$

Здесь и далее используются единицы энергии $(Ry^*/36) = (\hbar^2/2ma_{e(h)}^2)$ и длины $S = (a/a_{e(h)})$, где

$$a_{e(h)} = \frac{\varepsilon_2 \hbar^2}{m_{e(h)} e^2} \quad (5)$$

— боровский радиус электрона (дырки), движущихся с эффективными массами $m_{e(h)}$ в нанокристалле с диэлектрической проницаемостью ε_2 . При этом логарифмический член в потенциалах (1) и (2) не менял качественной картины.

Для высоковозбужденных состояний в такой потенциальной яме (4), спектр носителя заряда совпадал со спектром «свободного» движения в прямоугольной яме [5, 6, 10, 11]:

$$E_{nl}(S) = \frac{\varphi_{nl}^2}{S^2} \quad (6)$$

(где φ_{nl} — корни функции Бесселя $J_{l+1/2}(\varphi_{nl}) = 0$), для которых частица пространственно делокализована по всему объему нанокристалла. Поэтому интерес представляют лишь низколежащие состояния, которые могут быть сильно локализованы в центре нанокристалла лишь при его достаточно больших размерах a .

Следует отметить, что глубина потенциальной ямы $U(x, S)$ (1) (при $\varepsilon_2 \geq \varepsilon_1$) и $U(x, S)$ (2) в нанокристалле, вызванная электростатическими силами изображения, ограничена эффектами пространственной дисперсии диэлектрической проницаемости ε_2 нанокри-

сталла [38–42]. Это обстоятельство, по-видимому, не будет оказывать заметного влияния на спектр низколежащих состояний, и поэтому в дальнейшем не будет учитываться.

Возможность использования потенциалов $U(r, a)$ (1), (2), которые были получены в [5–12] в рамках макроскопической электростатики, может быть оправдана, если возникающие в потенциалах $U(r, a)$ (1), (2) локальные электронные состояния будут иметь макроскопический характер, для которых:

$$a \geq b \gg a_0, \quad (7)$$

где расстояние a_0 имеет размер порядка межатомного [1, 5–12, 38]. Величина b , — среднее расстояние электрона (дырки), локализованного над плоской поверхностью раздела двух различных диэлектрических сред в основном состоянии, — равнялась [5, 6]:

$$b = 6 |\beta|^{-1} a_{e(h)}. \quad (8)$$

В безразмерных переменных гамильтониан радиального движения носителей в полупроводниковой КТ радиусом S [5, 6, 10–12] —

$$H(x, S) = -\frac{1}{S^2} \frac{d}{dx^2} + V_l(x, S), \text{ причем } V_l(x, S) = U(x, S) + \frac{L^2}{S^2 x^2}, \quad (9)$$

$$U(x, S) = \frac{\beta}{S_2} \left[\frac{1}{1-x^2} + \frac{1-\alpha}{\alpha} {}_2F_1(1, \alpha, \alpha+1, x^2) \right], \quad \varepsilon = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} < 1, \quad (10)$$

где ${}_2F_1(z)$ — гипергеометрическая функция Гаусса, а коэффициенты β и α выражаются через относительную диэлектрическую проницаемость ε следующим образом:

$$\beta = \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}, \quad \alpha = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}. \quad (11)$$

В гамильтониане $H(x, S)$ (9) энергия поляризационного взаимодействия $U(x, S)$ носителя заряда с поверхностью полупроводникового нанокристалла (т.е. потенциал самодействия) описывается формулой (10) [5, 6, 10–12]. Член $(L^2/S^2 x^2)$ в эффективной потенциальной энергии (9) определяет центробежную энергию носителей заряда, а $L^2 = l(l+1)$, где l — орбитальное квантовое число.

3. СПЕКТР НИЗКОЛЕЖАЩИХ ОБЪЕМНЫХ ЛОКАЛЬНЫХ СОСТОЯНИЙ

Для определения энергетических спектров $E_{nl}^{e(h)}(a)$ квазичастиц (электронов и дырок), которые движутся с эффективными массами

$m_{e(h)}$ в объеме КТ в центрально-симметричном поле эффективной потенциальной энергии $V_l(r, a)$ (9), необходимо решить радиальное уравнение Шрёдингера, полученное в приближении эффективной массы [5, 6, 10–12]:

$$-\frac{\hbar^2}{2m_{e(h)}} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left[r^2 \frac{dR_{nl}(r, a)}{dr} \right] + V_l(r, a) R_{nl}(r, a) = E_{nl}^{e(h)}(a) R_{nl}(r, a), \quad (12)$$

где $R_{nl}(r, a)$ — радиальная волновая функция квазичастицы. Поскольку выражение $V_l(r, a)$ (9), описывающее эффективную потенциальную энергию, согласно формулам (1), (2) и (10), содержит в себе сложные зависимости от переменной r , то это обстоятельство не позволяет получить точные решения уравнения Шрёдингера (12). В этой связи для определения энергетических спектров квазичастиц в изучаемых квазиульмерных системах использовались такие приближенные методы: вариационный [5–7, 9–11], ВКБ [7, 9, 12] и метод теории возмущений [5–7, 9–11].

Потенциальная энергия $V_l(x, S)$ (9), (10) обладает минимумом:

$$\begin{aligned} V_l^{\min}(x_0, S) &= V_l(x = x_0, S) = \\ &= S^{-1} \left[\frac{\beta}{1 - x_0^2} + \beta \frac{1 - \alpha}{\alpha} {}_2F_1(1, \alpha, \alpha + 1, x_0^2) + \left(\frac{L^2 / S}{x_0^2} \right) \right], \end{aligned} \quad (13)$$

в точке $x = x_0$, выражение для которой можно получить из решения такого уравнения [11]:

$$\frac{2\beta x}{(1 - x^2)^2} - \frac{2(L^2 / S)}{x^3} + 2\beta \frac{(1 - \alpha)}{(1 + \alpha)} x {}_2F_1(2, \alpha + 1, \alpha + 2, x^2) = 0. \quad (14)$$

Будем отсчитывать энергию носителей заряда от минимального значения потенциальной энергии $V_l^{\min}(x_0, S)$ (13). При этом энергетический спектр носителей заряда запишем в таком виде:

$$\lambda_{nl}(S) = E_{nl}(S) - V_l^{\min}(x_0, S). \quad (15)$$

Прежде всего, покажем, что в зависимости от размера КТ S , образование объемных локальных состояний носителей заряда носит пороговый характер и возможно лишь в достаточно больших КТ, радиус которых S превышает некоторый критический радиус S_c [5, 6, 10–12]. Действительно, кинетическая и потенциальная энергия заряда (9), (10) в s -состоянии (с $l=0$) по порядку величины соответственно равны (S^{-2}) и (βS^{-2}). Поэтому, кинетическая энергия может стать меньше потенциальной лишь при достаточно больших размерах микрокристалла $S > S_c \approx \beta^{-1} \geq 1$. К тому же заключению приво-

дит и критерий Йоста–Пайса [43]:

$$S^2 \int_0^1 U(x, S)(1-x) dx \geq (2l+1). \quad (16)$$

Этот критерий для состояния с радиальным квантовым числом $n_r=0$ и произвольным l дает для критического радиуса КТ S_c такое выражение [10, 11]:

$$S^2 = \beta^{-1} \left[\ln 2 + (1-\alpha) \alpha^{-1} \left({}_3F_2(1, \alpha, 2^{-1}, \alpha+1, 3/2, 1) - 2^{-1} {}_3F_2(1, \alpha, 1, \alpha+1, 2, 1) \right) \right]^{-1} (2l+1), \quad (17)$$

где ${}_3F_2(z)$ — гипергеометрическая функция. Заметим, что критерий Йоста–Пайса (16) является лишь необходимым условием возникновения связанного состояния и поэтому он может давать заниженные значения S_c .

При малых размерах КТ $S \ll S_c$ (17) состояния носителя заряда будут сильно делокализованными благодаря подавляющему вкладу кинетической (и центробежной) энергии ($\sim S^{-2}x^{-2}$). Поэтому, при малых S спектр носителей заряда $\lambda_{nl}(S)$ (15) практически совпадает со сплошным (или квазидискретным) спектром $E_{nl}(S)$ (6), который соответствует «свободному» движению носителя заряда в непроницаемой сферической яме КТ.

При больших же радиусах КТ $S \gg S_c$ (17) имеет смысл говорить о состояниях, лежащих ниже сплошного спектра в потенциальной яме $V_i(x, S)$ (9), (10). Размер области локализации таких низколежащих состояний в указанной потенциальной яме должен быть достаточно мал по сравнению с радиусом самой КТ S . В дальнейшем такие состояния носителей заряда будем называть *объемными локальными состояниями* [5, 6, 10–12].

В хорошем приближении потенциальную яму $V_i(x, S)$ (9), (10) можно представить потенциалом трехмерного гармонического осциллятора, к которому сводится $V_i(x, S)$ (9), (10) после разложения в ряд по параметру $(x-x_0)^2 \ll 1$ с точностью до первых двух членов. В результате, для низколежащих объемных локальных состояний носителей заряда получим спектр осцилляторного вида [5, 6, 10, 11]:

$$\lambda_{li}(S) = \omega_l(S) \left(t + \frac{3}{2} \right), \quad (18)$$

где частота колебаний носителя заряда

$$\omega_l(S) = 2S^{-3/2} \left[\frac{\beta}{(1-x_0^2)^2} + \frac{4\beta x_0^2}{(1-x_0^2)^3} + \frac{3(L^2/S)}{x_0^4} + \frac{\beta(1-\alpha)}{(1+\alpha)} \right] \times$$

$$\times {}_2F_1(2, 1 + \alpha, 2 + \alpha, x_0^2) + 4\beta \frac{(1 - \alpha)}{2 + \alpha} x_0^2 {}_2F_1(3, 2 + \alpha, 3 + \alpha, x_0^2) \Big]^{1/2}; \quad (19)$$

здесь $t = 2n_r + l = 0, 1, 2, \dots$ — главное квантовое число, а $n_r = 0, 1, 2, \dots$ радиальное квантовое число.

Условие справедливости разложения потенциала $V_i(x, S)$ (9), (10) в виде потенциала трехмерного гармонического осциллятора сводится к требованию [11]:

$$\langle t | (x - x_0)^2 | t \rangle \ll (1 - x_0)^2 \leq 1, \quad (20)$$

$$\langle t | (x - x_0)^2 | t \rangle = (a_{OS} / a)^2 = 2(t + 3/2) S^{-2} \omega_i^{-1}(S). \quad (21)$$

Неравенство (20) определяет малость амплитуды осцилляторных колебаний a_{OS} по сравнению с расстоянием точки x_0 к поверхности КТ (вблизи поверхности КТ при $(1 - x) \ll 1$ потенциал $V_i(x, S)$ (9), (10) не определен [5, 6, 10–12]).

Условие (20) приближенно определяет число дискретных уровней в потенциале $V_i(x, S)$ (9), (10). Заметим, что энергетические уровни осциллятора $\lambda_{it}(S)$, которые определяются формулами (18) и (19), будут эквидистантными только для таких состояний носителей заряда (t, l) , в которых параметры S и l остаются постоянными, а радиальное квантовое число n_r может меняться [5, 6, 10–12].

Следует отметить, что состояния, локализованные вблизи центра КТ, которые могут возникать в потенциале $V_i(x, S)$ (9), (10), генетически никак не связаны с поверхностными состояниями [5–9] и являются следствием замкнутости границы раздела «КТ–матрица», благодаря отталкиванию носителей заряда от границы. Существенно подчеркнуть также, что в этом случае необходимость существования барьера на поверхности раздела может оказаться необязательной, поскольку сами силы изображения препятствуют выходу носителей заряда из объема КТ [5, 6, 10–12].

Поскольку в изучаемом здесь случае относительная диэлектрическая проницаемость $\varepsilon < 1$, то параметры системы α и β (11) будут также меньше единицы ($\alpha, \beta < 1$). При этом, гипергеометрическую функцию Гаусса ${}_2F_1(z)$, которая входит в формулы (13), (14), (19), можно представить в виде степенного ряда, ограничиваясь только нулевым и первым членами такого ряда [11]:

$${}_2F_1(b, c, d, z^2) = 1 + (bc / d) z^2. \quad (22)$$

Формула (22) справедлива, если

$$(bc) z^2 / d \ll 1. \quad (23)$$

С учетом (22), уравнение (14) для нахождения точки $x = x_0$, в которой потенциальная энергия $V_l(x, S)$ (9), (10) имеет минимальное значение, принимает такой вид [11]:

$$2\beta \frac{(1-\alpha)}{2+\alpha} x^6 (1-x^2)^2 + \beta \frac{(1-\alpha)}{1+\alpha} x^4 (1-x^2)^2 + \beta x^4 - (L^2/S)(1-x^2)^2 = 0. \quad (24)$$

Решение уравнения (24) дает такое выражение для точки x_0 [11]:

$$x_0^2 = \left[1 + \sqrt{\frac{2\beta}{1+\alpha} \frac{1}{L^2/S}} \right]^{-1}. \quad (25)$$

Выражение (25) справедливо, если выполняются два неравенства

$$x_0^2 \ll 1, \quad 2 \left(\frac{1+\alpha}{2+\alpha} \right) x_0^2 \ll 1. \quad (26)$$

Выполнение первого из них дает возможность уравнение (24) представить в виде уравнения четвертой степени относительно переменной x , а второе — следует из формулы (23). Поскольку в рассматриваемой здесь системе множитель $2\{(1+\alpha)/(2+\alpha)\} \geq 1$, то условия (26) одновременно выполняются только для больших S :

$$S^{1/2} \gg 2 \left(\frac{1+\alpha}{2+\alpha} \right) \left(\frac{1+\alpha}{2\beta} L^2 \right)^{1/2}. \quad (27)$$

При этом x_0^2 (25) равняется [11]:

$$x_0^2 = \left(\frac{1+\alpha}{2\beta} \right)^{1/2} \left(\frac{L^2}{S} \right)^{1/2}. \quad (28)$$

Поэтому только при $(L^2/S)^{1/2} \ll 1$ состояния носителя заряда будут хорошо локализованы в центре КТ.

Используя формулы (22) (26) и (28), получим выражения для минимального значения потенциальной энергии $V_l^{\min}(x_0, S)$ (13), —

$$V_l^{\min}(S) = S^{-1} \left[\frac{\beta}{\alpha} + 4 \left(\frac{\beta}{2(1+\alpha)} \frac{L^2}{S} \right)^{1/2} + \frac{(1+\alpha)}{2} \frac{L^2}{S} \right], \quad (29)$$

и для частоты осцилляторных колебаний носителей $\omega_l(S)$ (19) [11]:

$$\omega_l(S) = \frac{2\sqrt{3}}{S^{3/2}} \sqrt{\frac{8\beta/3}{1+\alpha} + \frac{2(7+5\alpha)}{2+\alpha} \left(\frac{\beta}{1+\alpha} \frac{L^2}{2S} \right)^{1/2} + \frac{8+11\alpha+5\alpha^2}{2+\alpha} \frac{L^2}{2S}} \quad (30).$$

При этом условии (20) существования осцилляторного спектра $\lambda_{nl}(S)$ (18), с учетом формул (21), (26) и (30), запишем в таком виде [11]: для объемных состояний носителей заряда с $l=0$

$$S^{1/2} \gg \left(\frac{(1+\alpha)}{2\beta} \right)^{1/2} 2^{-1} \left(t + \frac{3}{2} \right), \quad S \gg S_c, \quad (31)$$

и для объемных локальных состояний с $l \neq 0$

$$S^{1/4} \gg 2^{-1} \left(\frac{2\beta}{(1+\alpha)} \right)^{-1/4} (L^2)^{1/4} \left[1 - (1 - 2^{-1} D_l)^{1/2} \right]^{-1} D_l, \quad S \gg S_c, \\ D_l = 2 \left(\frac{3}{8} \frac{7 + 5\alpha}{2 + \alpha} + 1 \right) - \left(t + \frac{3}{2} \right) (L^2)^{-1/2}, \quad (32)$$

где критический размер КТ S_c определяется в (17).

Заметим, что в формулах (29) и (30) основной вклад вносят первые члены суммы, тогда как последующие члены будут давать только малые поправки, величины которых, согласно условию (27), много меньше единицы.

Таким образом, низколежащие объемные локальные состояния носителей заряда имеют спектр $\lambda_{nl}(S)$ (18), (30) осцилляторного типа только для больших КТ с радиусами S , удовлетворяющими неравенствам (27), (31) и (32). Причем этот спектр отсчитывается от минимального значения потенциальной энергии $V_l^{\min}(S)$ (29). Функциональная зависимость спектра $\lambda_{nl}(S)$ (18), (30) от размера КТ S $\lambda_{nl}(S) = f(S^{-3/2})$ имеет сильное отличие от таковой зависимости $\lambda_{nl}(S) = f(S^{-2})$ (6), которая определяет спектр «свободного» движения носителя заряда в непроницаемой сферической яме КТ [5, 6, 10–12].

Как следует из вышеизложенного, зависимость энергетического спектра носителей заряда, совершающих движение в объеме КТ радиуса S , от S можно описать простой степенной функцией от S [5, 6, 10–12]:

$$\lambda_{nl}(S) \propto S^{-j(S)}, \quad (33)$$

где параметр $(3/2) \leq j(S) \leq 2$. При малых S , таких, что $S \ll S_c$ (17), величина $j(S)$ принимает значение $j(S) = 2$, а при больших S , определяемых неравенствами (27), (31) и (32), параметр $j(S) = 3/2$.

4. РАСЧЕТ МЕТОДОМ ВКБ СПЕКТРА ОБЪЕМНЫХ ЛОКАЛЬНЫХ СОСТОЯНИЙ

В предыдущем параграфе был получен спектр низколежащих объемных локальных состояний только для больших нанокристаллов,

размер которых S удовлетворял условиям (17), (27), (31), (32) при произвольных значениях квантовых чисел (n, l) и относительной диэлектрической проницаемости $\varepsilon < 1$.

В настоящем параграфе, используя метод ВКБ, найдем спектр объемных локальных состояний $E_{nl}(S)$ при произвольных значениях параметров квазинульмерной структуры (S, n, l) , но при сильном отличии диэлектрических проницаемостей полупроводникового нанокристалла и окружающей его матрицы (т.е. $\varepsilon_2 \gg \varepsilon_1$, или $\varepsilon \ll 1$) [12]. Тогда потенциал самодействия $U(x, S)$ (9), (10) принимал такой вид [5, 6, 10–12]:

$$U(x, S) = \frac{1}{S} \frac{1}{(1-x^2)} + \frac{1}{S} \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}. \quad (34)$$

При этом потенциальная энергия носителя заряда в объеме полупроводникового нанокристалла

$$V_l(x, S) = U(x, S) + \frac{L^2}{S^2 x^2} = \frac{1}{S} \frac{1}{1-x^2} + \frac{1}{S} \frac{1}{\varepsilon} + \frac{L^2}{S^2 x^2}, \quad (35)$$

согласно формуле (29), обладает минимальным значением

$$V_l^{\min}(S) = \frac{1}{S} \left[\frac{1}{\varepsilon} + 4 \left(\frac{1-2\varepsilon L^2}{2S} \right)^{1/2} + \frac{1+\varepsilon L^2}{2S} \right]. \quad (36)$$

Исследуем спектр объемных локальных состояний $E_{nl}(S)$ методом ВКБ для произвольных значений параметров задачи (S, n, l) . При этом правило квантования можно представить в виде [12]:

$$\frac{2}{\pi} (1 - u_1/u_2) (u_1)^{-1/2} \times \\ \times \int_0^1 \frac{dz z^2 \sqrt{1-z^2}}{\left[(u_1^{-1} - 1)/(1 - u_1/u_2) + z^2 \right] \sqrt{1 - (1 - u_1/u_2) z^2}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{N^2}{S}. \quad (37)$$

Здесь квантовое число носителя заряда $N = n_r + 1/2$, переменная $z^2 = 1 - (u_2^{-1} - u_2^{-1} x^2 - u_1 u_2^{-2}) / (1 - u_1 u_2^{-1})$. Величины $u_{1,2}$, связанные с точками поворота $x_{1,2}$ в потенциале (35) выражением ($u_{1,2} = 1 - x_{1,2}^2$), определяются соотношениями:

$$\lambda_{Nl}(S) = \frac{6}{S} \left(\frac{1-u_1}{u_1} + \frac{L^2}{6S} \frac{1}{1-u_1} \right); \quad \frac{u_1}{u_2} = u_1 + \frac{L^2}{6S} \frac{u_1^2}{1-u_1} \leq 1. \quad (38)$$

Будем отсчитывать энергию носителя заряда от минимального значения энергии $V_l^{\min}(S)$ (36). Поэтому в формулах (38) энергетиче-

ческий спектр $\lambda_{NI}(S)$ определялся следующим образом:

$$\lambda_{NI}(S) = E_{NI}(S) - V_l^{\min}(S). \quad (39)$$

Величина u_1/u_2 в (38) как функция u_1 при $u_1 = u_1^0 = [1 + (L^2/6S)]^{-1}$ равна единице. Поэтому для выполнения неравенства $(u_1/u_2) \leq 1$ необходимо, чтобы

$$0 \leq u_1 \leq u_1^0 = [1 + (L^2/6S)]^{-1}. \quad (40)$$

Если выполняется соотношение

$$1 - \frac{u_1}{u_2} = 1 - u_1 - \frac{L^2}{6S} \frac{u_1^2}{1 - u_1} \ll 1, \quad (41)$$

тогда, считая, что $\sqrt{1 - (1 - u_1 u_2^{-1})z^2} \approx 1$ в подынтегральном выражении (37), правило квантования (37) запишем в виде [12]:

$$(1 - u_1/u_2) u_1^{-1/2} \left[\frac{1}{2} + \frac{(u_2^{-1} - 1)}{1 - u_1 u_2^{-1}} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{1 - u_1 u_2^{-1}}{u_2^{-1} - 1}} \right) \right] = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{N^2}{S}. \quad (42)$$

Рассмотрим случай, в котором

$$\frac{1 - u_1 u_2^{-1}}{u_2^{-1} - 1} = \frac{6S}{L^2} \frac{(1 - u_1)^2}{u_1} - u_1 \ll 1. \quad (43)$$

Сначала будем считать, что

$$u_1 \leq u_1^0 \approx 1 - \sqrt{\frac{L^2}{6S}} \approx 1. \quad (44)$$

При этом, как легко показать, решение уравнения (42) запишется так [12]:

$$u_1 \approx 1 - \sqrt{\frac{L^2}{6S}} \left(1 + \sqrt{\frac{N}{L}} \right)^2. \quad (45)$$

Требование одновременного выполнения соотношений (41), (43) и (45) приводит к условию

$$2\sqrt{\frac{N}{L}} \ll 1 \ll \sqrt{\frac{6S}{L^2}}. \quad (46)$$

Спектр $\lambda_{Nl}(S)$ (38), с учетом (45), в области параметров задачи (S, N, L) , определяемой условием (46), имеет вид [12]:

$$\lambda_{Nl}(S) = 2\sqrt{6} \frac{L}{S^{3/2}} \left(1 + 2 \frac{N}{L} \right), \quad \frac{N}{L} \ll 1. \quad (47)$$

В спектр объемных локальных состояний $\lambda_{Nl}(S)$ (47) основной вклад вносит первый член, который ($\propto L/S^{3/2}$). Второй член в (47) выступает лишь в качестве малой поправки ($\propto N/S^{3/2}$).

Рассмотрим случай, в котором выполняются условия (41), (44), а также условие

$$\left(\frac{1 - u_1 u_2^{-1}}{u_2^{-1} - 1} \right)^{1/2} \gg 1. \quad (48)$$

В этом случае, уравнение (42) имеет своим решением:

$$u_1 = 1 - \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{N^2}{S} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{L^2}{4N^2}} \right). \quad (49)$$

Требование одновременного выполнения неравенств (41), (44) и (48) сводится к условию

$$1 \ll 2 \frac{N}{L} \ll \sqrt{\frac{6S}{L^2}}. \quad (50)$$

В области параметров (S, N, L) , определяемой неравенствами (50), спектр $\lambda_{Nl}(S)$ (39), с учетом (49), имеет вид [12]:

$$\lambda_{Nl}(S) = 2\sqrt{6} \frac{N}{S^{3/2}}. \quad (51)$$

Следует подчеркнуть, что формулы (47) и (51) являются частными выражениями более общих формул (18), (19), которые описывают спектр $\lambda_{il}(S)$ (18), (30) низколежащих объемных локальных состояний носителя заряда (t, l) осцилляторного типа. При этом формулы (47) и (51) определяют спектр $\lambda_{il}(S)$, имеющий осцилляторный характер.

Рассмотрим случай, в котором

$$\frac{u_1}{u_2} = u_1 + \frac{L^2}{6S} \frac{u_1^2}{1 - u_1} \ll 1, \quad (52)$$

и, считая, что $\sqrt{1 - (1 - u_1 u_2^{-1}) z^2} \approx \sqrt{1 - z^2}$ в подынтегральном выражении (37), правило квантования (37) сведем к выражению [12]:

$$u_1^{-1/2} (1 - u_1 u_2^{-1}) \left[1 - \sqrt{\frac{u_2^{-1} - 1}{1 - u_2^{-1} u_1}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1 - u_2^{-1} u_1}{u_2^{-1} - 1}} \right] = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{N^2}{S}. \quad (53)$$

Если, кроме неравенства (52), выполняется также неравенство

$$\sqrt{\frac{1 - u_1 u_2^{-1}}{u_2^{-1} - 1}} = u_1^{1/2} \sqrt{\frac{6S}{L^2} \left(\frac{1 - u_1}{u_1} \right) - 1} \gg 1, \quad (54)$$

то при этом в уравнении (53) можно заменить значение

$$\operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1 - u_1 u_2^{-1}}{u_2^{-1} - 1}} \approx \frac{\pi}{2}. \quad (55)$$

Требование одновременного выполнения условий (52) и (54), сводится к неравенству

$$\pi^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{N}{L} \right)^2 \gg 1 \gg \frac{4}{\pi^2} \left(\frac{6S}{L^2} \right) \left(1 + \frac{2N}{L} \right)^{-2}. \quad (56)$$

В области параметров (S, N, L) (56) спектр объемных локальных состояний $\lambda_{Nl}(S)$ (39), с учетом (55), принимает вид [12]:

$$\lambda_{Nl}(S) = \frac{\pi^2 N^2}{S^2} \left(1 + \frac{N}{L} \right) + \frac{L^2}{S^2}; \quad \frac{N}{L} \ll 1. \quad (57)$$

При этом спектр $\lambda_{Nl}(S)$ (57) совпадает со спектром частицы $E_{nl}(S)$ (6), совершающей финитное движение в сферической потенциальной яме бесконечной глубины КТ [44].

С правилом квантования (37) выше был получен спектр объемных локальных состояний $\lambda_{Nl}(S)$ (39) при выполнении условий на параметры (N, l, S) (44), (46), (56). Очевидно, при $S \ll 1$ (как и в случае внутренних поверхностных состояний) спектр объемных локальных состояний $\lambda_{Nl}(S)$ (57) представляет собой спектр частицы $E_{nl}(S)$ (6), совершающей финитное движение в бесконечно глубокой сферической яме КТ. В другом предельном случае, определяемом условиями (46), (50) при $S \gg 1$, спектр объемных локальных состояний $\lambda_{Nl}(S)$ (47), (51) имеет осцилляторный характер $\lambda_{Nl}(S) \propto S^{-3/2}$ (18), (30) [12].

Таким образом, для произвольных параметров задачи (S, N, L) спектр объемных локальных состояний $\lambda_{Nl}(S)$ (39) носителя заряда в объеме полупроводникового нанокристалла радиуса S , полученный методом ВКБ, принимал вид $\lambda_{Nl}(S) \propto S^{-j(S)}$ (33) [12]. При этом параметр $j(S)$ для малых $S \ll 1$ равнялся $j(S) = 2$, а для больших $S \gg 1$ параметр $j(S) = 3/2$. В этих двух предельных случаях параметр $j(S)$ принимал такие же значения, как и в случае низколежащих объемных локальных состояний [11, 12].

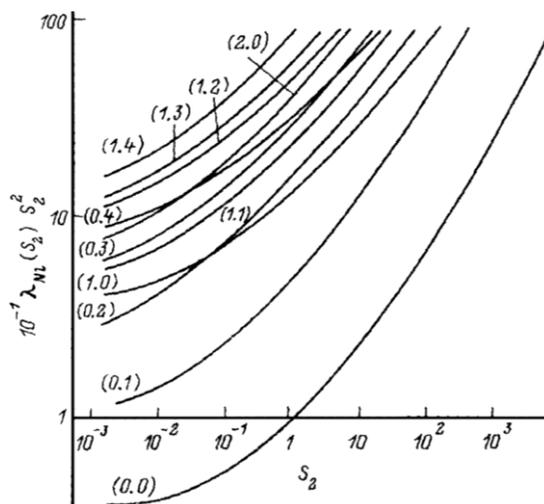


Рис. 1. Энергетический спектр объемных локальных состояний $\lambda_{Nl}(S)$, как функция радиуса диэлектрической частицы S . Цифры при кривых указывают состояния (n_r, l) . Рис. взят из работы [12].

Такую зависимость $\lambda_{Nl}(S) \propto S^{-j(S)}$ также подтверждают результаты численных расчетов спектра объемных локальных состояний $\lambda_{Nl}(S)$ (37)–(39), которые представлены на рис. 1. На рис. 1. приведен спектр объемных локальных состояний $\lambda_{Nl}(S)$ (39) с квантовыми числами $n_r=0, 1, 2, 3, 4$ и $l=0, 1, 2, 3, 4$, как функция размера нанокристалла S в интервале его радиусов от $S=10^{-3}$ до $S=10^3$ [12].

Как следует из результатов численных расчетов спектра объемных локальных состояний $\lambda_{Nl}(S)$ (39), приведенных на рис.1 [12], влияние границы нанокристалла на спектр носителя заряда, движение которого ограничено бесконечной сферической ямой радиуса S нанокристалла, сводилось к размерным квантовым эффектам, связанным с чисто пространственным ограничением области квантования только для нанокристаллов с размерами $S \leq 10^{-2}$. Для нанокристаллов с радиусами $S \geq 10^{-1}$ спектр носителя заряда $\lambda_{Nl}(S)$ (39), в основном, определялся поляризационным взаимодействием заряда со сферической поверхностью раздела двух диэлектрических сред. При этом для больших нанокристаллов с радиусами $S \geq 10^2$, спектр носителя заряда имел осцилляторный характер $\lambda_{Nl}(S) \propto S^{-3/2}$.

5. ШИРИНЫ УРОВНЕЙ ОБЪЕМНЫХ СОСТОЯНИЙ

Все полученные выше результаты, относящиеся к энергетическим уровням объемных локальных состояний, предполагают, что уширение таких состояний достаточно мало. В настоящее время отсут-

ствуется информация о структуре границы раздела двух различных диэлектрических сред. Однако можно предполагать, что размеры d области переходного слоя, на котором происходит резкое изменение потенциала, ответственное за контактную разность потенциалов, имеют микроскопические масштабы $d \ll a$ [25].

Если барьер обусловлен контактной разностью потенциалов, то его величина (обычно $\cong 1$ эВ [25]), значительно превышающая масштаб энергий рассмотренных состояний, обеспечивает практически бесконечно долгое существование этих состояний. Если же барьер вызван только какими-либо рода особенностями структуры поверхности микроскопических масштабов, например, загрязнениями поверхности, то уширение Γ рассмотренных состояний, в значительной мере, зависит от ширины этого барьера Δ .

Оценки величины Γ с использованием прямоугольной формы барьера при $\Delta = 0,3$ и $0,5$ нм и высотой $\cong 1$ эВ, дают в результате расчетов, аналогичных [5], значение $(\Gamma/E_{1,0}) \cong 10^{-2} - 10^{-3}$, что соответствует времени жизни $\tau = (\hbar/\Gamma) \cong 10^{-9} - 10^{-8}$ с [10].

С точки зрения оптической спектроскопии эти величины таковы, что их вклад в величину полной ширины Γ можно не учитывать. В то же время, малая величина τ может накладывать определенные ограничения на способ инжекции носителей зарядов. В частности, в этом случае наиболее предпочтительным методом, по-видимому, является создание электронно-дырочных пар в полупроводниковом нанокристалле при межзонном оптическом поглощении [1–3].

В случае образования осцилляторных состояний, локализованных в центре нанокристалла, сами силы изображения (действующие на носители заряда, помещенные в нанокристалл) препятствуют выходу носителя заряда из объема нанокристалла. Оценки величины Γ , связанной с туннелированием носителя заряда через потенциальный барьер (9) и (10) (при $\varepsilon_2 \gg \varepsilon_1$) (без учета логарифмического члена в скобке), дают значение $(\Gamma/E_{1,0}(S)) \cong 10^{-10} - 10^{-11}$ (при $S = 10^2$ и $(\varepsilon_2/\varepsilon_1) \cong 10$), что соответствует времени жизни состояния $\tau \cong 10^{-1}$ с [10]. При точном учете потенциального барьера (9) и (10) (при $\varepsilon_2 \gg \varepsilon_1$) величина τ должна быть еще больше.

Таким образом, рассмотренные выше объемные состояния квазичастиц (электронов и дырок) являются хорошо определенными, а при наличии контактной разности потенциалов — практически стабильными. Поэтому они представляют собой перспективный объект для спектроскопических исследований, а также вызывают интерес с точки зрения их роли в различных физических процессах в ультрадисперсных конденсированных средах [1–3, 5–20].

6. СРАВНЕНИЕ ТЕОРИИ С ЭКСПЕРИМЕНТАМИ

В экспериментальных работах [28, 29] было показано, что при меж-

зонном оптическом возбуждении КТ CdS (с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon_2 = 9,3$) диспергированных в стеклообразной матрице с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon_1 = 2,25$, происходила их ионизация, обусловленная выходом фотоэлектронов из КТ в матрицу и захватом электронов на глубоких ловушках стекла. В результате, в объеме КТ оставался избыточный носитель зарядов (дырка). Был также обнаружен коротковолновый сдвиг $\Delta E \cong 20$ мэВ линии дырочной люминесценции КТ со средним значением радиуса нанокристалла $\bar{a} = 5,4$ нм (т.е. $S = 54,9$).

К анализу экспериментальных результатов [28, 29] применим выше изученную теоретическую модель [5–12]. Будем считать, что основной вклад в такой коротковолновый сдвиг дырочной линии вносит потенциальная энергия взаимодействия дырки $U(x, S)$ (9), (10), которая зависит от размера КТ S , с полем индуцированной дыркой на поверхности КТ поляризацией. При этом будем пренебрегать энергией кулоновского взаимодействия дырки с электроном, локализованным на глубокой ловушке матрицы. Это оправдано, если расстояние d от такой ловушки до центра КТ велико по сравнению с радиусом КТ a , т.е. если $d \gg a$.

Параметры рассматриваемой квазинульмерной системы α и β (11) в условиях экспериментов [28, 29] равнялись $\alpha = 0,195$ и $\beta = 0,61$. Энергетический спектр осцилляторного вида $\lambda_{nl}(S)$ (29), (30) полученный в [5, 10] не может количественно описать коротковолновый сдвиг уровня дырки $\Delta E \cong 20$ мэВ, поскольку для КТ радиусом $a = 5,4$ нм ($S = 54,9$) не выполнялись условия существования состояний осцилляторного типа (27), (31) и (32). В этой связи для произвольных значений радиусов КТ S , в условиях экспериментов [28, 29], определим энергию основного состояния ($n = 1, l = 0$) гамильтониана дырки $H(x, S)$ (9), (10) вариационным методом [11]. При этом в гамильтониане $H(x, S)$ (9), (10) в качестве потенциальной энергии использовалось выражение $U(x, S)$ (9), (10), в котором гипергеометрическая функция Гаусса представлялась в виде ряда:

$${}_2F_1(1, \alpha, \alpha + 1, x^2) = \sum_{k=0}^{k=13} \frac{(1)_k (\alpha)_k}{(1 + \alpha)_k} \frac{x^{2k}}{k},$$

где коэффициенты $(c)_k = c(c + 1) \dots (c + k - 1)$ (причем $(c)_0 = 1$).

Вводя стандартную замену радиальной волновой функции дырки $R_l(x) = \chi_l(x)/x$, вариационную функцию $\chi_l(x)$ зададим в виде [11]:

$$\chi_l(x) = A_l x^{l+1} (1 - x^2) \exp(-\mu x), \quad (58)$$

где $\mu(S)$ — вариационный параметр, а постоянная A_l определялась из условия нормировки волновой функции $\chi_l(x)$:

$$A_0 = \sqrt{8\mu}^{7/2} [2\mu^4 - 12\mu^2 + 45 - (8\mu^4 + 36\mu^3 + 78\mu^2 + 90\mu + 45)e^{-2\mu}]^{-1/2}.$$

Выбор функции $\chi_l(x)$ (58) обеспечивает ее правильный вид для «свободного» движения дырки при $x \rightarrow 0$.

Не выписывая громоздких выражений для энергии $\lambda_{1,0}(\mu, S)$ и ее производной $\partial\lambda_{1,0}(\mu, S)/\partial\mu = 0$, приведем результаты расчета спектра дырки [11]:

$$E_{1,0}(\mu, S) = \lambda_{1,0}(\mu, S) + V_0^{\min}(S), \quad (59)$$

где энергия $V_0^{\min}(S)$ для $l=0$, согласно формуле (29), равнялась $V_0^{\min}(S) = (\beta/\alpha)S^{-1}$. Спектр $E_{1,0}(\mu, S)$ (59) для КТ радиусом $S=54,9$ давал значение $E_{1,0}(\mu, S)=22,4$ мэВ. Такое значение энергии дырки находилось в хорошем согласии с экспериментально обнаруженным коротковолновым сдвигом $\Delta E \cong 20$ мэВ [28, 29], отличаясь от последнего лишь незначительно ($\leq 12\%$). Это отличие, по-видимому, вызвано неучетом кулоновского взаимодействия между дыркой и электроном, локализованным на глубокой ловушке стекла.

Таким образом, полученные результаты показывают, что в КТ размером S , много большим критического размера S_c (17), дырка локализуется вблизи центра КТ и размерный сдвиг дырочного уровня обусловлен зависимостью энергии основного состояния от размера КТ S [10–12].

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. С. И. Покутний, *Теория экситонов в квазинульмерных полупроводниковых системах* (Одесса: Астропринт: 2003).
2. А. П. Шпак, С. И. Покутний, Ю. А. Куницкий, *Діагностика наносистем. Нанівпрвідникові квазінульвимірні системи* (Київ: Академперіодика: 2004).
3. А. П. Шпак, С. И. Покутний, Ю. А. Куницкий, *Спектроскопия электронных и экситонных состояний в низкоразмерных системах* (Киев: Академперіодика: 2005).
4. В. М. Агранович, Ю. Е. Ломовик, *Письма в ЖЭТФ*, **17**, № 4: 209 (1973).
5. Н. А. Ефремов, С. И. Покутний (Москва: 1984) (Препринт/Институт спектроскопии АН СССР, № 1, 1984, с. 34).
6. Н. А. Ефремов, С. И. Покутний, *ФТТ*, **27**, № 1: 48 (1985).
7. Н. А. Ефремов, С. И. Покутний, *ФТТ*, **32**, № 10: 2921 (1990).
8. Н. А. Ефремов, С. И. Покутний, *ФТТ*, **33**, № 10: 2845 (1991).
9. S. I. Pokutnyi and N. A. Efremov, *Phys. Stat. Sol. B*, **165**, No. 1: 109 (1991).
10. S. I. Pokutnyi, *Phys. Stat. Sol. B*, **172**, No. 2: 573 (1992).
11. С. И. Покутний, *ФТТ*, **35**, № 2: 257 (1993).
12. С. И. Покутний, *ФТП*, **31**, № 12: 1443 (1997).
13. А. П. Шпак, С. И. Покутний, Ю. А. Куницкий, *Наносистемы, наноматериалы, нанотехнології*, **3**, № 3: 667 (2005).
14. А. П. Шпак, С. И. Покутний, Ю. А. Куницкий, *Наносистемы, наноматериалы, нанотехнології*, **3**, № 4: 877 (2005).
15. S. I. Pokutnyi, *Phys. Low-Dim. Struct.*, **9/10**: 21 (2001).
16. S. I. Pokutnyi, *Phys. Low-Dim. Struct.*, **7/8**: 39 (2002).

17. S. I. Pokutnyi, *Phys. Low-Dim. Struct.*, **11/12**: 67 (2002).
18. S. I. Pokutnyi, *J. Appl. Phys.*, **96**, No. 2: 1115 (2004).
19. S. I. Pokutnyi, *Phys. Lett. A*, **342**: 347 (2005).
20. S. I. Pokutnyi, *Semiconductors*, **40**, No. 2: 217 (2006).
21. М. Ф. Дейген, М. Д. Глинчук, *ФТТ*, **5**, № 11: 3250 (1963).
22. М. П. Лисица, Н. Р. Кулиш, В. И. Геец, П. Н. Коваль, *Опт. и спектр.*, **20**, № 3: 508 (1966).
23. V. G. Litovchenko, *Thin Solid Films*, **36**, No. 1: 205 (1976).
24. Ю. Е. Лозовик, В. Н. Нишанов, *ФТТ*, **18**, № 11: 3267 (1976).
25. В. Г. Литовченко, *Основы физики полупроводниковых слоистых систем* (Киев: Наукова думка: 1980).
26. А. И. Екимов, А. А. Онущенко, *Письма в ЖЭТФ*, **34**, № 6: 363 (1981).
27. А. И. Екимов, А. А. Онущенко, *Письма в ЖЭТФ*, **40**, № 8: 337 (1984).
28. В. Я. Грабовскис, Я. Я. Дзенис, А. И. Екимов, *ФТТ*, **31**, № 1: 272 (1989).
29. D. Cherik, A. Efros, and A. Eкимov, *J. Luminesc.*, **47**, No. 3: 113 (1990).
30. J. Kuczynski and I. Thomas, *Chem. Phys. Lett.*, **104**, No. 7: 445 (1982).
31. D. Duongnoug, I. Ramsten, and M. Gratzel, *J. Am. Chem. Soc.*, **104**, No. 10: 2977 (1982).
32. R. Rossetti and L. Brus, *J. Am. Chem. Soc.*, **104**, No. 10: 7322 (1982).
33. Н. Р. Кулиш, В. П. Кунец, М. П. Лисица, *УФЖ*, **35**, № 12: 1817 (1990).
34. Н. Р. Кулиш, В. П. Кунец, М. П. Лисица, *ФТТ*, **39**, № 10: 1865 (1997).
35. Ал. Л. Эфрос, А. Л. Эфрос, *ФТП*, **16**, № 7: 1209 (1982).
36. А. П. Шпак, С. И. Покутний, *УФМ*, **6**, № 2: 105 (2005).
37. S. I. Pokutnyi, *Ukr. J. Phys. Rev.*, **3**, No. 1: 46 (2006).
38. В. М. Агранович, В. Л. Гинзбург, *Кристаллооптика с учетом пространственной дисперсии и теория экситонов* (Москва: Наука: 1979).
39. А. М. Габович, Л. Г. Ильченко, Э. А. Пашицкий, *ЖЭТФ*, **79**, № 2: 665 (1980).
40. Yu. V. Kryuchenko and V. I. Sugakov, *Phys. Stat. Sol. B*, **111**, No. 1: 177 (1982).
41. О. С. Зинец, Ю. З. Крюченко, В. И. Сугаков, *ФТТ*, **26**, № 9: 2587 (1984).
42. И. Ю. Голиней, В. И. Сугаков, *ФНТ*, **11**, № 7: 775 (1985).
43. А. И. Базь, Я. Б. Зельдович, А. М. Переломов, *Рассеяние, реакции и распады в нерелятивистской квантовой механике* (Москва: Наука: 1971).
44. А. С. Давыдов, *Квантовая механика* (Москва: Наука: 1973).