

the change of the conjugation conditions from gap to negative allowance, caused by the influence of contact surfaces thermal deformation. So the absence of the air gap between the front surfaces of shaft and sleeve caused the absence of sharp temperature gradients in the places of their fitting.

### Conclusions

The new more correct mathematical model that could be used for the shaft and sleeve thermoelasticity problems solution has been successfully created. This model is based on the three-dimensional finite elements of hexagon type usage. The fields of displacement and temperatures on the details contacting surfaces have also been obtained. It has also been established that the conjugation conditions in such type of subassemblies are changed from the gap to negative allowance type due to the heat extension of material. On the base of this mathematical model the thermal stress-strained state of such structures, widely used in marine engine building, could also be investigated.

### References

1. Пыхалов, А. А. Статический и динамический анализ сборных роторов турбомашин / А. А. Пыхалов, А. Е. Милов. – Иркутск: Изд-во Иркут. техн. ун-та, 2007. – 194 с.
2. Цвик, Л. Б. Принцип поочередности в задачах о сопряжении и контакте твердых деформируемых тел / Л. Б. Цвик // Прикл. механика. – 1980. – Т. 16. – № 1. – С. 13–18.
3. Gaill, P. Isoparametric finite elements for analysis of shell segments and non-axisymmetric shells / P. Gaill // J. Sound and Vibration. – 1999. – Vol. 65, № 2. – P. 259–273.
4. Сосунов, В. А. Теория, расчет и проектирование авиационных двигателей и энергетических установок / В. А. Сосунов, В. М. Чепкин – М.: Моск. энерг. ин-т, 2003. – 677 с.
5. Самарский, А. А. Вычислительная теплопередача / А. А. Самарский, П. Н. Вабицевич. – М.: Эдиториал, 2009. – 784 с.
6. Jiang, D. The construction of non-linear models for systems with internal resonance / D. Jiang, C. Pierre, S. W. Shaw // Intern. J. Non-Linear Mechanics. – 2005. – № 40. – P. 729–746.
7. Chen, L. W. Dynamic stability of rotating shafts with geometrical non-linearity / L. W. Chen, W. K. Peng // J. Sound and Vibration. – 1995. – № 187. – P. 421–433.
8. Liew, K. M. Vibration of doubly-curved shallow shells / K. M. Liew, C. W. Lim // Acta Mechanica. – 2016. – № 114. – P. 95–119.

Поступила в редакцию 15.03.17

**М. В. Мир-Салим-заде,**  
канд. физ.-мат. наук

Институт математики и механики  
НАН Азербайджана, г. Баку, e-mail:  
minavar.mirsalimzade@imm.az

УДК 539.375

## ЧАСТИЧНОЕ ЗАКРЫТИЕ ПРЯМОЛИНЕЙНЫХ ТРЕЩИН СО СВЯЗЯМИ В СТРИНГЕРНОЙ ПЛАСТИНЕ С ОТВЕРСТИЕМ

**Ключові слова:** стрингерна пластина, круговий отвір, сили зчеплення в зв'язках, контакт берегів тріщин, контактні напруження.

Досліджується підкріплена стрингерами пружна ізотропна пластина, що має круговий отвір, з якого виходять прямолінійні тріщини зі зв'язками між берегами. Розглянуто випадок часткового закриття тріщин. Для визначення параметрів, що характеризують закриття тріщин, отримано сингулярне інтегральне рівняння, яке за допомогою процедури алгебраїзації зведене до скінченної нелінійної алгебраїчної системи. Розв'язуючи алгебраїчну систему методом послідовних наближень, знайдені сили зчеплення в зв'язках, контактні напруження й розмір контактних зон тріщин.

### Введение

Тонкие пластины, имеющие отверстия, являются широко распространенным элементом конструкций. Поскольку отверстие создает повышенную концентрацию напряжений в пластине, пред-

ставляет интерес задача о зарождении или развитии трещин, исходящих из его контура [1–14]. В частности, остановке трещины или контакту ее берегов способствует усиление пластины ребрами жесткости [15–19]. В настоящей работе исследуется частичный контакт берегов трещин в стрингерной пластине, ослабленной круговым отверстием. При этом полагается, что берега трещин взаимодействуют.

### Постановка задачи

Рассматривается бесконечная изотропная тонкая пластина, имеющая круговое отверстие радиуса  $R$ . Из контура отверстия исходят две прямолинейные симметричные трещины вдоль оси абсцисс (рис. 1). К пластине приклепаны поперечные ребра жесткости в точках  $z = \pm(2m+1)L \pm iny_0$  ( $m = 0, 1, 2, \dots; n = 1, 2, \dots$ ) с постоянным шагом по всей длине стрингеров, симметрично относительно поверхности пластины. Пластина и стрингеры выполнены из упругих материалов.

Полагается, что в зонах трещин, примыкающих к вершинам, между берегами происходит взаимодействие, которое моделируется связями между берегами (силами сцепления). Физическая природа связей между берегами (сил сцепления) зависит от материала пластины, размеров трещин и зон взаимодействия (концевых зон). В рассматриваемом случае берега трещин частично сомкнулись (рис. 1). Размер зон контакта заранее неизвестен.

На бесконечности пластина подвержена однородному растяжению вдоль стрингеров напряжением  $\sigma_y^\infty = \sigma_0$ . Считается, что при деформации толщина стрингеров неизменяема, а напряженное состояние – одноосное. Стрингеры не подвергаются изгибу и работают только на растяжение. Действие стрингеров в расчетной схеме заменяется неизвестными эквивалентными сосредоточенными силами  $P_{mn}$ , приложенными в точках соединения ребер с пластиной.

Принимаются следующие допущения: а) в тонкой пластине реализуется плоское напряженное состояние; б) подкрепляющая система стрингеров ферменного типа, их ослабление за счет постановки точек крепления не учитывается; в) пластина и стрингеры взаимодействуют друг с другом в одной плоскости и только в точках крепления; г) точки крепления одинаковы, их радиус (площадка сцепления) мал по сравнению с их шагом и другими характерными размерами. Действие точки крепления моделируем: в стрингере – действием в сплошном ребре сосредоточенной силы, приложенной в точке, соответствующей центру точки крепления, в пластине – действием сосредоточенной силы.

Контур кругового отверстия и берега трещин вне концевых зон свободны от внешних усилий. В зонах контакта  $[-l_1, -l_2]$  и  $[l_2, l_1]$  будут возникать нормальные напряжения  $\sigma_y = q(x)$ . Величина контактных напряжений  $q(x)$ , также и сил сцепления  $p(x)$  заранее неизвестна и подлежит определению в процессе решения задачи.

Граничные условия в рассматриваемой задаче имеют вид

$$\text{на контуре отверстия } \sigma_r - i\tau_{r\theta} = 0, \text{ при } |z| = R; \quad (1)$$

на берегах трещины

$$\sigma_y - i\tau_{xy} = 0, \text{ при } y = 0, R \leq |x| < l,$$

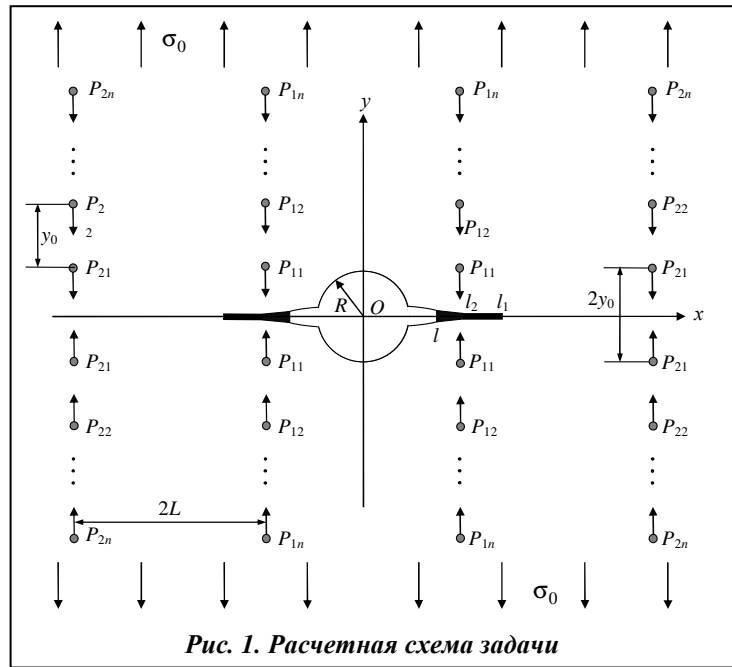


Рис. 1. Расчетная схема задачи

$$\sigma_y - i\tau_{xy} = p(x), \text{ при } y = 0, l \leq |x| < l_2, \quad (2)$$

$$\sigma_y - i\tau_{xy} = q(x), \text{ при } y = 0, l_2 \leq |x| \leq l_1.$$

Для перемещений раскрытия трещин имеем условия

$$v^+(x,0) - v^-(x,0) = C(x, p(x))p(x), \quad l \leq |x| < l_2, \quad (3)$$

$$v^+(x,0) - v^-(x,0) = 0 \quad l_2 \leq |x| \leq l_1.$$

Здесь  $C(x, p(x))$  есть эффективная податливость связей, зависящая от их натяжения.

На основании формул Колосова-Мусхелишвили [20] и граничных условий на контуре отверстия и берегах трещин (1)–(2) задача сводится к определению двух аналитических функций  $\Phi(z)$  и  $\Psi(z)$  из условий

$$\Phi(\tau) + \overline{\Phi(\tau)} - [\overline{\tau}\Phi'(\tau) + \Psi(\tau)]e^{2i\theta} = 0, \quad (4)$$

$$\Phi(t) + \overline{\Phi(t)} + t\Phi'(t) + \Psi(t) = \begin{cases} 0 & R \leq |x| < l \\ p(x) & l \leq |x| \leq l_2, \\ q(x) & l_2 \leq |x| \leq l_1 \end{cases}, \quad (5)$$

где  $\tau = Re^{i\theta}$ ,  $t$  – аффикс точек берегов трещин.

#### Метод решения задачи

Решение краевой задачи (4)–(5) ищем в виде

$$\Phi(z) = \Phi_0(z) + \Phi_1(z) + \Phi_2(z), \quad \Psi(z) = \Psi_0(z) + \Psi_1(z) + \Psi_2(z). \quad (6)$$

Здесь потенциалы  $\Phi_0(z)$  и  $\Psi_0(z)$  определяют поле напряжений и деформаций в сплошной стрингерной пластине

$$\begin{aligned} \Phi_0(z) &= \frac{1}{4}\sigma_0 - \frac{i}{2\pi h(1+\kappa)} \sum'_{m,n} P_{mn} \left[ \frac{1}{z - mL + iny_0} - \frac{1}{z - mL - iny_0} \right], \\ \Psi_0(z) &= \frac{1}{2}\sigma_0 - \frac{i\kappa}{2\pi h(1+\kappa)} \sum'_{m,n} P_{mn} \left[ \frac{1}{z - mL + iny_0} - \frac{1}{z - mL - iny_0} \right] + \\ &+ \frac{i}{2\pi h(1+\kappa)} \sum'_{m,n} P_{mn} \left[ \frac{mL - iny_0}{(z - mL - iny_0)^2} - \frac{mL + iny_0}{(z - mL + iny_0)^2} \right], \end{aligned}$$

где  $h$  – толщина пластины;  $\kappa = (3-\nu)/(1+\nu)$ ;  $\nu$  – коэффициент Пуассона материала пластины, штрих у знака суммы указывает на то, что при суммировании исключается индекс  $m = n = 0$ .

Функции  $\Phi_1(z)$  и  $\Psi_1(z)$  ищем в виде

$$\Phi_1(z) = \frac{1}{2\pi} \int_L \frac{g(t)}{t-z} dt, \quad \Psi_1(z) = \frac{1}{2\pi} \int_L \left[ \frac{1}{t-z} - \frac{t}{(t-z)^2} \right] g(t) dt,$$

где  $L = [-l_1, -R] + [R, l_1]$ ;  $g(x) = \frac{2\mu}{1+\kappa} \frac{d}{dx} [v^+(x,0) - v^-(x,0)]$ ;  $\mu$  – модуль сдвига материала пластины.

Неизвестная функция  $g(x)$  и потенциалы  $\Phi_2(z)$  и  $\Psi_2(z)$  должны быть определены из краевых условий (4)–(5). Для их определения представим граничное условие (4) в виде

$$\Phi_2(\tau) + \overline{\Phi_2(\tau)} - [\overline{\tau}\Phi_2'(\tau) + \Psi_2(\tau)]e^{2i\theta} = -\Phi_*(\tau) - \overline{\Phi_*(\tau)} + e^{2i\theta} [\overline{\tau}\Phi_*(\tau) + \Psi_*(\tau)],$$

где  $\Phi_*(\tau) = \Phi_0(\tau) + \Phi_1(\tau)$ ,  $\Psi_*(\tau) = \Psi_0(\tau) + \Psi_1(\tau)$ .

Для решения определения потенциалов  $\Phi_2(z)$  и  $\Psi_2(z)$  воспользуемся решением Н. И. Мусхелишвили [20]. В результате имеем

$$\begin{aligned} \Phi_2(z) &= \frac{\sigma_0}{2z^2} + \frac{1}{2\pi} \int_L \left[ \frac{1-t^2}{t(1-tz)} + \frac{z-t}{(1-tz)^2} \right] g(t) dt - \frac{i}{2\pi h(1+\kappa)} \times \\ &\times \sum_{m,n} P_{mn} \left\{ \frac{(mL-iny_0)(mL+iny_0)-1}{(mL-iny_0)[z(mL-iny_0)-1]^2} - \frac{(mL+iny_0)(mL-iny_0)-1}{(mL+iny_0)[z(mL+iny_0)-1]^2} \right\} + \\ &+ \frac{i\kappa}{2\pi h(1+\kappa)} \sum_{m,n} P_{mn} \left\{ \frac{1}{z[z(mL-iny_0)-1]} - \frac{1}{z[z(mL+iny_0)-1]} \right\}, \\ \Psi_2(z) &= \frac{\sigma_0}{2z^2} + \frac{\Phi_2(z)}{z^2} - \frac{\Phi_2'(z)}{z^2} + \\ &+ \frac{1}{2\pi z} \int_L \left[ \frac{2}{tz} - \frac{t}{z(1-tz)} + \frac{t^2 z - z - t}{z(1-tz)^2} - \frac{2t(z-t)}{(1-tz)^3} \right] g(t) dt + \frac{i}{2\pi h(1+\kappa)z} \times \\ &\times \sum_{m,n} P_{mn} \left\{ \frac{1}{z(mL-iny_0)-1} - \frac{1}{z(mL+iny_0)-1} + \frac{1}{z(mL-iny_0)} - \frac{1}{z(mL+iny_0)} \right\}. \end{aligned} \quad (7)$$

В формулах (7) все линейные размеры отнесены к радиусу кругового отверстия  $R$ .

Требую, чтобы функции (6) удовлетворяли краевому условию (5) на берегах трещин, получим сингулярное интегральное уравнение относительно  $g(x)$

$$\frac{1}{\pi} \int_L \frac{g(t)}{t-x} dt + \frac{1}{\pi} \int_L K(t,x) g(t) dt = f_0(x) + f_1(x) + p_*(x); \quad (8)$$

$$K(t,x) = \frac{x-t}{xt(1-tx)^2} + \frac{1}{x^2 t} + \frac{1}{2} \left[ \frac{2t(x-t)(x^2-1)}{x(1-tx)^3} + \frac{2x^3-x-2t+2t^2x-x^3t^2}{x^2(1-tx)^2} \right];$$

$$p_*(x) = \begin{cases} 0 & R \leq |x| \leq l \\ p(x) & l \leq |x| \leq l_2 \\ q(x) & l_2 \leq |x| \leq l_1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f_0(x) &= -\sigma_0 + \frac{\kappa+2}{\pi h(1+\kappa)} \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} P_{-m,n} n y_0 \left[ \frac{1}{(x-mL)^2 + n^2 y_0^2} \right] + \sum_{m,n=1}^{\infty} P_{m,n} n y_0 \left[ \frac{1}{(x+mL)^2 + n^2 y_0^2} \right] \right\} - \\ &- \frac{1}{\pi h(1+\kappa)} \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} P_{m,n} n y_0 \frac{(x-mL)^2 - n^2 y_0^2 - (x^2 - m^2 L^2)}{[(x-mL)^2 + n^2 y_0^2]^2} + \right. \\ &\left. + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} P_{-m,n} n y_0 \frac{(x+mL)^2 - n^2 y_0^2 - (x^2 - m^2 L^2)}{[(x+mL)^2 + n^2 y_0^2]^2} \right\}, \\ f_1(x) &= -\frac{1}{2\pi(1+\kappa)h} \sum_{m,n=1}^{\infty} P_{-m,n} n \left\{ \left( 2 + \frac{1}{x^2} \right) \times \right. \\ &\times \left. \left\langle \frac{2(m^2 L^2 + n^2 y_0^2 - 1)[x^2(3m^2 L^2 - n^2 y_0^2) + 4xmL + 1]}{(m^2 L^2 + n^2 y_0^2)[(xmL+1)^2 + x^2 n^2 y_0^2]} + \frac{2\kappa}{(mxL+1)^2 + x^2 n^2 y_0^2} \right\rangle + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left( \kappa - \frac{1}{\kappa} \right) \left( -4(m^2 L^2 + n^2 y_0^2 - 1) \frac{[x^3(3m^2 L^2 - n^2 y_0^2) + 6x^2 mL + 3x]}{[(xmL + 1)^2 + x^2 n^2 y_0^2]^3} - \right. \\
 & - 4\kappa \frac{mL + x(m^2 L^2 + n^2 y_0^2)}{[(mxL + 1)^2 + x^2 n^2 y_0^2]^2} \left. \right) - 2 \left[ \frac{1}{(mxL + 1)^2 + x^2 n^2 y_0^2} + \frac{1}{m^2 L^2 + n^2 y_0^2} \right] \left. \right\} - \\
 & - \frac{1}{2\pi(1 + \kappa)h} \sum_{m,n=1}^{\infty} P_{m,n} \left( 2 + \frac{1}{x^2} \right) \left( \frac{2(m^2 L^2 + n^2 y_0^2 - 1)[x^2(3m^2 L^2 - n^2 y_0^2) - 4xmL + 1]}{(m^2 L^2 + n^2 y_0^2)[(xmL - 1)^2 + x^2 n^2 y_0^2]^2} + \right. \\
 & + \frac{2\kappa_0}{(mxL - 1)^2 + x^2 n^2 y_0^2} \left. \right) + \left( \kappa - \frac{1}{\kappa} \right) \left( -4(m^2 L^2 + n^2 y_0^2 - 1) \times \right. \\
 & \times \frac{x^3(3m^2 L^2 - n^2 y_0^2) - 6x^2 mL + 3x}{[(xmL - 1)^2 + x^2 n^2 y_0^2]^3} + 4\kappa \frac{mL - x(m^2 L^2 + n^2 y_0^2)}{[(mxL - 1)^2 + x^2 n^2 y_0^2]^2} \left. \right) \\
 & - 2 \left[ \frac{1}{(mxL - 1)^2 + x^2 n^2 y_0^2} + \frac{1}{m^2 L^2 + n^2 y_0^2} \right] \left. \right\} - \frac{\sigma_0}{2x^2} - \frac{3}{2} \frac{\sigma_0}{x^4}.
 \end{aligned}$$

В полученное сингулярное интегральное уравнение (8) входят неизвестные величины сосредоточенных сил  $P_{mn}$  ( $m=1,2,\dots; n=1,2,\dots$ ), сил сцепления  $p(x)$  и контактных напряжений  $q(x)$ .

Согласно закону Гука величина сосредоточенной силы  $P_{mn}$ , действующей на каждую точку соединения со стороны  $m$ -го стрингера

$$P_{mn} = \frac{E_S F}{2ny_0} \Delta v_{mn}, \quad (m = 0, 1, 2, \dots; n = 1, 2, \dots), \quad (9)$$

где  $E_S$  – модуль Юнга материала стрингера;  $F$  – площадь поперечного сечения стрингера;  $2ny_0$  – расстояние между рассматриваемыми точками крепления;  $\Delta v_{mn}$  – взаимное смещение рассматриваемых точек крепления, равное удлинению соответствующего участка стрингера.

Полагаем, что взаимное упругое смещение точек  $z = mL + i(ny_0 - a)$  и  $z = mL - i(ny_0 - a)$  равно взаимному смещению точек крепления  $\Delta v_{mn}$ , где  $a$  – радиус точки крепления (площадки сцепления). С помощью комплексных потенциалов (6) и формул Колосова-Мухомелишвили [20] находим взаимное смещение  $\Delta v_{mn}$  указанных точек [7].

Таким образом, для определения величин сосредоточенных сил  $P_{mn}$  имеем бесконечную линейную систему уравнений (9).

Так как напряжения в пластине ограничены, решение сингулярного интегрального уравнения (8) следует искать в классе всюду ограниченных функций. Для построения решения сингулярного интегрального уравнения используем метод прямого решения сингулярных уравнений [21, 22]. Переходя к безразмерным переменным, решение представим в виде

$$g(\eta) = \sqrt{1 - \eta^2} g_0(\eta),$$

где  $g_0(\eta)$  – ограниченная функция.

Использование квадратурных формул [21, 22] позволяет интегральное уравнение (8) свести к системе  $M+1$  алгебраических уравнений с  $M$  неизвестными  $g_0(\tau_1), \dots, g_0(\tau_m)$ :

$$\sum_{m=1}^M \frac{g^0(\tau_m)}{M+1} \sin^2 \frac{\pi m}{M+1} \left[ \frac{1}{\tau_m - \eta_r} + K(\tau_m, \eta_r) \right] = \pi F_*(\eta_r), \quad (10)$$

$$F_*(\eta_r) = \begin{cases} f(\eta_r) & R \leq |x| < l \\ f(\eta_r) + p(\eta_r) & l \leq |x| \leq l_2 \\ f(\eta_r) + q(\eta_r) & l_2 \leq |x| \leq l_1 \end{cases}$$

Здесь  $\tau_m = \cos \frac{\pi m}{M+1}$ ;  $m = 1, 2, \dots, M$ ;  $\eta_r = \cos \frac{2r-1}{2(M+1)}$ ;  $r = 1, 2, \dots, M+1$ .

Так как решение сингулярного интегрального уравнения (8) ищется в классе всюду ограниченных функций, то оно существует при выполнении дополнительного условия (условия разрешимости краевой задачи) [20]. Выполнение дополнительного условия обеспечивает полученная алгебраическая система из  $M+1$  уравнений (10), служащая для определения неизвестных  $g_0(\tau_1)$ ,  $g_0(\tau_2), \dots, g_0(\tau_m)$  и  $l_2$ .

В правую часть системы (10) входят неизвестные значения сил сцепления  $p(\eta_r)$  и контактных напряжений  $q(\eta_r)$  в узловых точках, принадлежащих соответственно зонам  $[l, l_2]$  и  $[l_2, l_1]$ . Неизвестные силы сцепления и контактное напряжение, возникающее на берегах трещин, определяется из условия (3). Запишем его для производной раскрытия смещений берегов трещин

$$\frac{1+\kappa}{2\mu} g(x) = \frac{d}{dx} [C(x, p(x))p(x)], \quad l \leq |x| < l_2, \quad (11)$$

$$\frac{1+\kappa}{2\mu} g(x) = 0, \quad l_2 \leq |x| \leq l_1. \quad (12)$$

Требую выполнения условия (11) в узловых точках, содержащихся в зонах  $[l, l_2]$ , получим недостающие уравнения для определения приближенных значений сил сцепления  $p(\tau_m)$  в узловых точках

$$g^0(\tau_{m_1}) = \frac{2\mu}{1+\kappa} \frac{M}{\pi(l_1-R)} C(\tau_{m_1}, p(\tau_{m_1}))p(\tau_{m_1}),$$

$$g^0(\tau_{m_1}) + g^0(\tau_{m_2}) = \frac{2\mu}{1+\kappa} \frac{M}{\pi(l_1-R)} C(\tau_{m_2}, p(\tau_{m_2}))p(\tau_{m_2}), \quad (13)$$

$$\sum_{m_1}^{M_1} g^0(\tau_{m_1}) = \frac{2\mu}{1+\kappa} \frac{M}{\pi(l_1-R)} C(\tau_{M_1}, p(\tau_{M_1}))p(\tau_{M_1}),$$

Здесь  $m = 1, 2, \dots, M_1$ ;  $M_1$  – число узловых точек в отрезке  $[l, l_2]$ .

Аналогично, требуя выполнения условия (12) в узловых точках, содержащихся в зонах  $[l_2, l_1]$ , получим недостающие уравнения для определения приближенных значений контактного напряжения  $q(\tau_m)$  в узловых точках

$$g(\tau_{m_2}) = 0, \quad m_2 = 1, 2, \dots, M_2, \quad (14)$$

где  $M_2$  число узловых точек в отрезке  $[l_2, l_1]$ .

Алгебраические системы (9), (10), (13), (14) связаны между собой и должны решаться совместно. Решение полученной системы (9), (10), (13), (14) позволяет определить значения искомой функции  $g(x)$  в узловых точках, сил сцепления в связях  $p(x)$ , контактных напряжений  $q(x)$ , величину сосредоточенных сил  $P_{mn}$ , а также размер зон контакта трещин. Из-за неизвестного размера зон контакта трещин  $l_2$  алгебраическая система (9), (10), (13), (14) оказалась нелинейной. Поэтому полученная система решалась методом последовательных приближений следующим образом. При некотором определенном значении параметра  $l_2$  система (9), (13), (14) и (10) без условия разрешимости краевой задачи решалась относительно входящих в нее линейным образом неизвестных  $P_{11}, \dots, P_{N_1 N_2}, g_{01}, g_{02}, \dots$ ,

$g_{0M}, P_1, P_2, \dots, P_{M_1}, q_1, q_2, \dots, q_{M_1}$ . Найденные таким образом значения  $P_{11}, \dots, P_{N_1N_2}, g_{01}, g_{02}, \dots, g_{0M}, P_1, P_2, \dots, P_{M_1}, q_1, q_2, \dots, q_{M_1}$  и выбранное значение  $l_2$  подставляются в неиспользованное уравнение системы (10) (условия разрешимости). Поскольку эти значения, вообще говоря, не будут удовлетворять неиспользованному уравнению системы (10), то, подбирая значения размера зон контакта  $l_2$ , следует многократно повторять вычисления, пока это уравнение не будет удовлетворяться с заданной точностью.

В проведенных расчетах система уравнений (9), (10), (13), (14) в каждом приближении решалась методом Гаусса с выбором главного элемента для разных значений порядка  $M$  (до  $M = 40$ ). Определялись значения контактных напряжений и размера зон контакта берегов трещин в зависимости от геометрических и физических параметров стрингерной пластины при  $\nu = 0,3$ ;  $a/L = 0,01$ ;  $y_0/L = 0,25$ ;  $E = 7,1 \cdot 10^4$  МПа (сплав В95);  $E_S = 11,5 \cdot 10^4$  МПа (композит Al-сталь);  $F_1/y_0h = 1$ . Результаты расчетов представлены на рис. 2. Число стрингеров и точек крепления принималось равным 14. При расчетах были использованы безразмерные координаты  $x' = \frac{2x - (l_1 + l_2)}{l_1 - l_2}$ . Кривая 1 соответствует безразмерной длине трещин  $l_* = l_1/L = 0,75$ ; кривая 2 –  $l_* = 0,50$ .

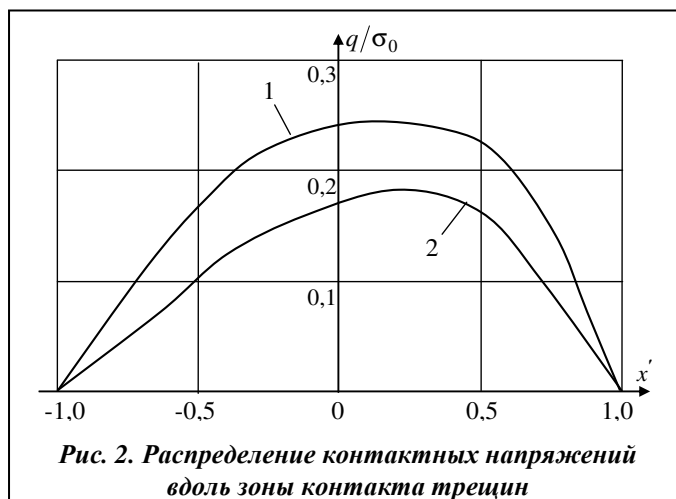


Рис. 2. Распределение контактных напряжений вдоль зоны контакта трещин

## Выводы

Анализ модели частичного закрытия трещин со связями между берегами, исходящих из контура кругового отверстия, в бесконечной изотропной тонкой пластине сводится к параметрическому совместному исследованию сингулярного уравнения (8) и бесконечной алгебраической системы (9), (13), (14) при различных геометрических и физических параметрах усиленной пластины, законах деформирования связей и размерах концевых зон трещин. Непосредственно из решения полученных алгебраических систем определяются контактные напряжения, усилия в связях, размеры зон взаимодействия берегов трещин и их контакта. Полученные соотношения позволяют решать обратную задачу, т.е. определить характеристики и напряженное состояние стрингерной пластины с круговым отверстием, при которых достигается заданная область контакта берегов трещин.

## Литература

1. Мирсалимов, В. М. Исследование предельного поля напряжений возле трещин, исходящих из контуров отверстий перфорированной пластины / В. М. Мирсалимов // Прикл. механика и техн. физика. – 1977. – № 2. – С. 147–154.
2. Мирсалимов, В. М. Упруго-пластическое равновесие пластины, ослабленной двоякопериодической системой круглых отверстий и трещинами, выходящими на контуры отверстий / В. М. Мирсалимов // Изв. АН Аз.ССР сер. физ.-техн. и мат. наук. – 1979. – № 2. – С. 118–125.
3. Мирсалимов, В. М. Хрупкое разрушение пластины, ослабленной периодической системой круглых отверстий с выходящими на их контуры трещинами / В. М. Мирсалимов // Прикл. механика. – 1980. – Т. 16, № 11. – С. 118–125.
4. Mir-Salim-zadeh, M. V. Fracture of an elastic rib reinforced plate weakened by a circular cracked hole / M. V. Mir-Salim-zadeh // Int. J. of Fracture. – 2003. – Vol. 122, № 1-2. – P. L113–L117.
5. Yan Xiangqiao. Cracks emanating from circular hole or square hole in rectangular plate in tension / Xiangqiao Yan // Eng. Fracture Mech. – 2006. – Vol. 73, Iss. 12. – P. 1743–1754.
6. Мир-Салим-заде, М. В. Моделирование зарождения трещины в подкрепленной пластине с круговым отверстием / М. В. Мир-Салим-заде // Деформация и разрушение материалов. – 2007. – № 8. – С. 40–47.
7. Мир-Салим-заде, М. В. Предельное равновесие пластины с регулярной системой стрингеров и исходящими из кругового отверстия трещинами / М. В. Мир-Салим-заде // Пробл. машиностроения и надежности машин. – 2008. – № 4. – С. 44–51.

8. *Мирсалимов, В. М.* Предельное равновесие тепловыделяющей среды с периодической системой отверстий и прямолинейных трещин / В. М. Мирсалимов, Э. Г. Шахбандаев // Вестн. ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Сер.: Механика предельного состояния. – 2008. – № 1 (4). – С. 98–107.
9. *Shahbandaev, E. G.* On partial closing of cracks in heat-releasing medium weakened by a periodic system of circular holes / E. G. Shahbandaev // Proc. of IMM of NAS of Azerbaijan. – 2008. – Vol. XXIX, Iss. XXXVII. – P. 215–224.
10. *Chen, Y. Z.* A semi-analytic solution for multiple curved cracks emanating from circular hole using singular integral equation / Y. Z. Chen, X. Y. Lin, Z. X. Wang // Appl. Mathematics and Computation. – 2009. – Vol. 213, Iss. 2. – P. 389–404.
11. *Мир-Салим-заде, М. В.* Упругопластическое разрушение перфорированной стрингерной пластины / М. В. Мир-Салим-заде // Пробл. машиностроения и надежности машин. – 2012. – № 3. – С. 41–47.
12. *Мирсалимов, В. М.* Зарождение трещин при однородном изгибе изотропной пластины, ослабленной периодической системой круговых отверстий / В. М. Мирсалимов, Р. А. Искендеров // Вестн. ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Сер.: Механика предельного состояния. – 2013. – № 1 (15). – С. 145–152.
13. *Гасанов, Ф. Ф.* Моделирование зарождения трещин сдвига в теле, ослабленном периодической системой круглых отверстий / Ф. Ф. Гасанов // Пробл. машиностроения. – 2013. – Т. 16, № 3. – С. 29–37.
14. *Mirsalimov, V. M.* Cracking in heat-releasing perforated material / V. M. Mirsalimov // Acta Mechanica. – 2017. – Vol. 228, Iss. 1. – P. 201–214.
15. *Мирсалимов, В. М.* Некоторые задачи конструкционного торможения трещин / В. М. Мирсалимов // Физ.-хим. механика материалов. – 1986. – Т. 22, – № 1. – С. 84–88.
16. *Savruk, M. P.* Reinforcement of a thin cracked plate by a system of parallel stringers / M. P. Savruk, V. S. Kravets // Materials Sci. – 1995. – Vol. 30. – P. 95–104.
17. *Мир-Салим-заде, М. В.* Моделирование частичного закрытия трещин в перфорированной изотропной среде, усиленной регулярной системой стрингеров / М. В. Мир-Салим-заде // Прикл. механика и техн. физика. – 2010. – Т. 51, № 2. – С. 148–159.
18. *Мир-Салим-заде, М. В.* Контактная задача для стрингерной пластины, ослабленной щелью переменной ширины / М. В. Мир-Салим-заде // Фундамент. и прикл. пробл. техники и технологии. – 2014. – № 2 (304). – С. 23–29.
19. *Мир-Салим-заде, М. В.* Закрытие трещины, исходящей из контура кругового отверстия в стрингерной пластине / М. В. Мир-Салим-заде // Вестн. ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Сер.: Механика предельного состояния. – 2016. – № 1 (27). – С. 78–89.
20. *Мухелишвили, Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н. И. Мухелишвили. – М.: Наука, 1966. – 707 с.
21. *Панасюк, В. В.* Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках / В. В. Панасюк, М. П. Саврук, А. П. Дацшин – Киев: Наук. думка, 1976. – 443 с.
22. *Мирсалимов, В. М.* Неоднородные упругопластические задачи / В. М. Мирсалимов – М.: Наука, 1987. – 256 с.

Поступила в редакцию 11.05.17