

Н. С. Городецька<sup>1</sup>, Т. М. Щербак<sup>2</sup>,  
член-кореспондент НАН України В. І. Нікішов<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Інститут гідромеханіки НАН України, Київ

<sup>2</sup>Національний транспортний університет, Київ

E-mail: vinihm@gmail.com

## Трансформація спектра нерегулярного хвилювання на уступі

*Розглядається трансформація спектра нерегулярного хвилювання на підводному уступі. В якості моделі спектра використовується суперпозиція двох ТМА спектрів з різними частотами спектральних максимумів. Обговорюється використання (по аналогії з RDT підходом) лінійної теорії для дослідження трансформації спектра під впливом різкої зміни глибини потоку. Методом поліпшеної редукції знайдено коефіцієнти відбиття та проходження хвилями уступу в залежності від хвильового числа падаючої хвилі. Наведено результати розрахунків. Аналізуються особливості трансформованого спектра для різних параметрів задачі, зокрема, показано, що після уступу спектральні амплітуди зростають і довжини відповідних хвиль зменшуються, тобто хвилі стають крутішими.*

**Ключові слова:** поверхневі хвилі, трансформація, спектр, нерегулярне хвилювання.

Проблема захисту берегів та гідротехнічних конструкцій за допомогою штучних споруд залишається актуальною, що обумовлено подальшим розвитком інфраструктури шельфової зони морів. До таких споруд відносяться прямокутні перешкоди великої довжини. Інформація про амплітудно-частотні характеристики хвиль необхідна для конструювання вказаних споруд, для оцінки впливу хвиль на берегову смугу. Вона міститься, зокрема, в даних про енергетичні спектри, які розраховуються на основі натурних спостережень. В роботі досліджується трансформація частотного однонаправленого спектра  $S(\omega)$  на уступі.

**Спектральна модель.** Однією із математичних моделей частотного спектра, яка адекватно описує експериментальні дані, є модель ТМА спектра [1], яка ґрунтується на відомих спектрах Пірсона–Марковіца і JONSWAP. Спектр ТМА  $SP(\omega)$  представляється як добуток спектра JONSWAP  $S_J(\omega)$  з поправочною функцією  $F(k_1 H_1)$ , яка враховує вплив кінцевої глибини  $H_1$  ( $k_1$  — хвильове число).

Реальні спектри зазвичай проявляють відхилення від стандартних моделей, наприклад, коли разом із вітровими хвилями існують брижі (змішане хвилювання), і хвильовий спектр має двопікову форму. Відповідно до робіт [2, 3] будемо розглядати модель двопікового спектра, який являє собою суперпозицію двох ТМА спектрів з різними частотами спектральних максимумів  $\tilde{\omega}_m^{(1)}$  і  $\tilde{\omega}_m^{(2)}$

$$SP(\tilde{\omega}) = [S_1(\tilde{\omega}) + S_2(\tilde{\omega})]F(k_1 H_1),$$

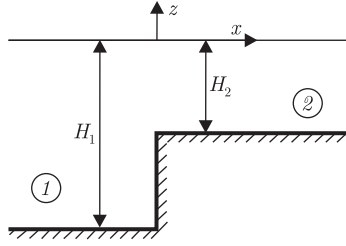


Рис. 1. Схема уступу та системи координат

$$S_1(\tilde{\omega}) = \alpha \frac{H_1^{5/2}}{\tilde{\omega}^5 g^{1/2}} \exp \left[ -\frac{5}{4} \left( \frac{\tilde{\omega}}{\tilde{\omega}_m^{(1)}} \right)^{-4} \right] \gamma^\Gamma, \quad S_2(\tilde{\omega}) = \alpha \frac{H_1^{5/2}}{\tilde{\omega}^5 g^{1/2}} \exp \left[ -\frac{5}{4} \left( \frac{\tilde{\omega}}{\tilde{\omega}_m^{(2)}} \right)^{-4} \right] \gamma^\Pi,$$

$$\Gamma = \exp \left[ -\frac{(\tilde{\omega} - \tilde{\omega}_m^{(1)})^2}{2\sigma_1 (\tilde{\omega}_m^{(1)})^2} \right], \quad \Pi = \exp \left[ -\frac{(\tilde{\omega} - \tilde{\omega}_m^{(2)})^2}{2\sigma_2 (\tilde{\omega}_m^{(2)})^2} \right], \quad (1)$$

$$\sigma_1 = \begin{cases} \sigma_a = 0,07 & \text{при } \tilde{\omega} \leq \tilde{\omega}_m^{(1)} \\ \sigma_b = 0,09 & \text{при } \tilde{\omega} > \tilde{\omega}_m^{(1)}, \end{cases} \quad \sigma_2 = \begin{cases} \sigma_a = 0,07 & \text{при } \tilde{\omega} \leq \tilde{\omega}_m^{(2)} \\ \sigma_b = 0,09 & \text{при } \tilde{\omega} > \tilde{\omega}_m^{(2)}, \end{cases}$$

$$F(k_1 H_1) = \text{th}^2 k_1 H_1 \frac{\text{sh} 2k_1 H_1}{\text{sh} 2k_1 H_1 + 2k_1 H_1}, \quad \alpha = 0,012, \quad \gamma = 3,3, \quad \tilde{\omega} = \omega \sqrt{\frac{H_1}{g}},$$

де  $g$  — прискорення сили тяжіння.

**Поширення поверхневих хвиль.** Вважаємо, що на уступ падає монохроматична хвиля з частотою  $\omega$ , що поширюється вздовж горизонтальної вісі  $x$  з  $x = -\infty$ . Глибина рідини до уступу дорівнює  $H_1$ , а після —  $H_2$ . Розташування уступу та системи координат з початком відліку на вільній поверхні представлено на рис. 1.

Поведінка лінійних поверхневих хвиль, що поширюються вздовж вільної поверхні ідеальної нестисливої рідини, описується рівнянням Лапласа для потенціалу швидкості з відповідними граничними умовами [4]

$$\Delta \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \quad \text{при } z = 0; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \quad \text{при } z = -H_1. \quad (3)$$

Вважаємо, що змінні залежать від часу по гармонічному закону  $e^{-i\omega t}$ . Розв'язок рівняння (2) з граничними умовами (3), яке описує хвилю з амплітудою  $a$ , що поширюється в напрямку додатної вісі  $x$ , має вигляд [4]

$$\Phi = -\frac{ia g \cosh k(z_1 + H_1)}{\omega \cosh k_1 H_1} e^{i(k_1 x - \omega t)}, \quad (4)$$

Хвильове число падаючої хвилі є дійсним коренем дисперсійного рівняння

$$\omega^2 = k_1 g \tanh k_1 H_1. \quad (5)$$

Це рівняння має також нескінченну множину чисто уявних коренів  $\kappa_n$ , які є розв'язком наступного рівняння:

$$\omega^2 = -\kappa_n g \tan \kappa_n H_1. \quad (6)$$

Введемо характерні масштаби довжини  $L_{ch} = H_1$  і часу  $L_{ch} = H_1$ . В безрозмірному вигляді вираз, який описує потенціал в області 1, має вигляд (гармонічний множник по часу опускаємо)

$$\Phi_1 = (e^{ik_1x} + Re^{-ik_1x}) \frac{\cosh k_1(z + H_1)}{\cosh k_1 H_1} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{\kappa_n x} B_n \frac{\cos \kappa_n(z + H_1)}{\cos \kappa_n H_1}, \quad (7)$$

і в області 2

$$\Phi_2 = Te^{ik_1x} \frac{\cosh k_2(z + H_2)}{\cosh k_2 H_2} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha_n x} C_n \frac{\cos \alpha_n(z + H_2)}{\cos \alpha_n H_2}, \quad (8)$$

де  $R$  і  $T$  — коефіцієнти відбиття та проходження відповідно; хвильові числа  $k_2$  і  $\alpha_n$  є коренями відповідних безрозмірних дисперсійних рівнянь  $\omega^2 = k_2 H_2 \tanh k_2 H_2$ ,  $\omega^2 = -\alpha_n H_2 \times \tan \alpha_n H_2$ ; коефіцієнти  $B_n$  і  $C_n$  визначаються з умов спряження розв'язків у площині  $x = 0$

$$\Phi_1 = \Phi_2 \quad \text{при} \quad -H_2 < z < 0; \quad \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} = \begin{cases} \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} & \text{при} \quad -H_2 < z < 0, \\ 0 & \text{при} \quad -H_1 < z < -H_2. \end{cases} \quad (9)$$

Традиційний шлях розв'язання даної задачі — це розвинення розв'язків в ряд за власними функціями і виконання умов спряження (9). Отримана система функціональних рівнянь зводиться до нескінченної системи алгебраїчних рівнянь відносно коефіцієнтів  $B_n$  і  $C_n$  на основі використання ортогональних властивостей власних функцій. Як правило, такі системи розв'язуються методом редукції. Для отримання стійкого розв'язку необхідно розглядати систему високого порядку, що пов'язано з існуванням особливості (в даному випадку степеневій) по швидкості у кутовій точці уступу [5]. В роботі використовується метод поліпшеної редукції, який враховує цю сингулярність. Вираз, що її описує, розвинено в ряд за власними функціями і, враховуючи їх ортогональність, подається у вигляді асимптотичного ряду. Як наслідок, можна розглядати системи рівнянь меншого порядку, а внесок високочастотних мод враховується асимптотично. Детально ця методика викладена в роботі [6], в якій розглянуто розсіювання хвиль тонким бар'єром. Було продемонстровано ефективність запропонованого методу. На основі такого підходу в даній роботі розраховано залежності коефіцієнтів відбиття  $R$  та проходження  $T$  від хвильового числа падаючої хвилі  $k_1$ . На рис. 2 представлено залежність  $T = T(k_1 H_1)$  для різних співвідношень  $\mu = H_2/H_1$ . Криві 1–4 відповідають наступним значенням:  $\mu = 0,1; 0,3; 0,5; 0,7$ . Видно, що при малих глибинах  $H_2$  коефіцієнт проходження значно перевищує одиницю для довгих хвиль, що відповідає результатам, наведеним в роботі [4]. Відмітимо, що розраховані коефіцієнти  $T$  з графічною точністю збігаються з даними роботи [7].

**Трансформація спектра поверхневих хвиль.** Вважаємо, що хвильове поле в області 1 представляє собою суперпозицію великої кількості хвильових компонент. В якості моделі, як зазначено вище, розглянемо двопіковий спектр ТМА, описаний раніше.

Відомо, що формування спектра відбувається за рахунок нелінійної взаємодії вітру і хвиль на поверхні, а також шляхом три- та чотирьохмодових нелінійних взаємодій спектральних компонент. Цей процес вимагає достатньо багато часу (велика довжина хвильового нагону). Під дією різкої зміни глибини потоку спектр не встигає переформуватись і можна застосувати лінійне моделювання трансформації нерегулярного хвилювання. Тут

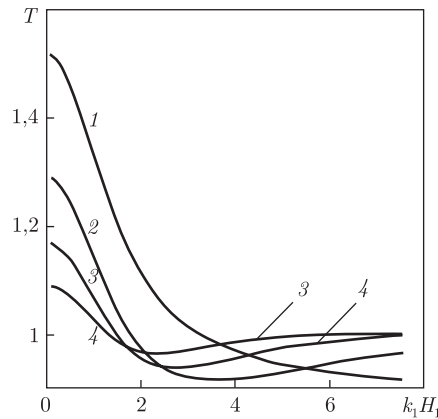


Рис. 2. Залежність коефіцієнта  $T$  від  $k_1 H_1$

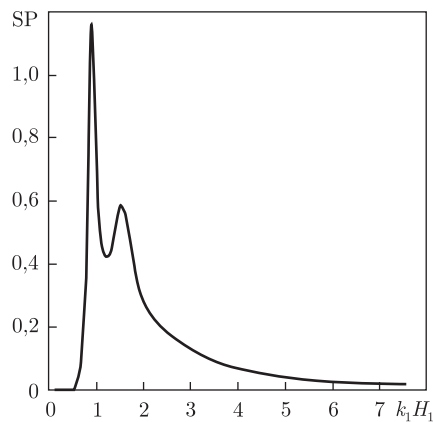


Рис. 3. Двопіковий спектр

спостерігається певна аналогія з різкою зміною поведінки розвиненої турбулентності. Такий підхід, коли викривлення, обумовлені деформаційними переміщеннями, масовими силами тощо, прикладаються до поля турбулентної швидкості, дозволяє врахувати зміни деяких (або всіх) компонент турбулентності на основі лінійної теорії — теорія швидких викривлень (Rapid Distortion Theory) [8]. У випадку, що розглядається, виникає швидке “викривлення” окремих спектральних складових під впливом різкої зміни донної поверхні, і результати їх нелінійної взаємодії мають проявитися пізніше в міру поширення хвиль в області за уступом.

Розглянемо випадок, коли глибина рідини перед уступом складає 10 м, і частоти спектральних максимумів дорівнюють (у розмірному вигляді)  $\omega_m^{(1)} = 2\pi \cdot 0,125$  рад/с,  $\omega_m^{(2)} = 2\pi \cdot 0,1875$  рад/с. Відмітимо, що такі частоти було використано в роботі [9] при моделюванні впливу форми спектра на параметри хвилювання. Аналіз даних щодо залежності частот спектральних піків від величини хвильового нагону [9] показує, що при швидкості вітру  $U_{10} = 10$  м/с (на висоті 10 м над рівнем моря) частота спектрального максимуму вітрового хвилювання знаходиться в межах від 0,1 до 0,3 Гц.

На рис. 3 представлено двопіковий спектр, який отримано на основі формули (1). Розмірність спектральної щільності —  $\text{м}^2 \cdot \text{с}$ . Аналіз натурних даних показує, що низькочастотний пік відповідає хвилям брижі, а високочастотний — вітровому хвилюванню. Основна енергія сконцентрована у довгохвильовій частині спектра. Як приклад, вид трансформованого спе-

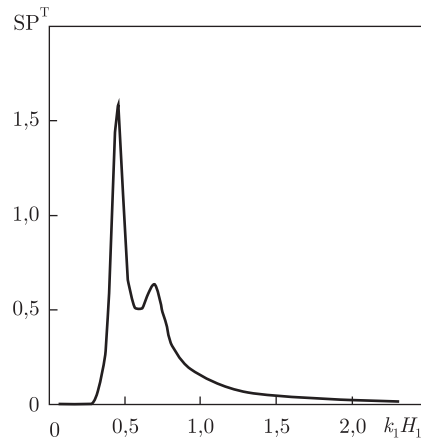


Рис. 4. Трансформований спектр

ктра  $SP^T = SP \cdot T^2$  для параметра  $\mu = 0,3$  в залежності від  $k_2 H_2$  наведено на рис. 4. Аналіз результатів показав, що значення спектральних піків зростають із зменшенням глибини  $H_2$ . Так, у випадку  $H_2 = 1$  м ці величини дорівнюють  $2,15 \text{ м}^2 \cdot \text{с}$  (низькочастотний пік) і  $0,85 \text{ м}^2 \cdot \text{с}$  (другий пік). Для  $H_2 = 3$  м ці величини дорівнюють відповідно  $1,6 \text{ м}^2 \cdot \text{с}$  і  $0,66 \text{ м}^2 \cdot \text{с}$ . Для порівняння наведемо ці ж величини в області до уступу:  $1,16 \text{ м}^2 \cdot \text{с}$  і  $0,57 \text{ м}^2 \cdot \text{с}$ . Інша не менш суттєва особливість трансформації спектрів пов'язана із зменшенням довжин відповідних хвиль. Наприклад, довжина хвилі, що відповідає низькочастотному піку спектра до уступу, зменшується над уступом в 1,7 рази при  $H_2 = 3$  м, і для другого піка — в 1,5 разів. Іншими словами, хвилі над уступом стають більш короткими. Із зменшенням глибини  $H_2$  хвилі стають ще більш короткими.

Отримані результати показують, що відбувається значна перебудова спектрів поверхневого хвилювання, коли хвилі поширюються над уступом. Форма спектра залишається подібною до спектра хвиль, що падають на перешкоду, але змінюються максимальні значення у відповідності до коефіцієнта проходження, тобто амплітуди хвиль зростають. Крім того, довжина хвиль зменшується і хвилі стають кругішими. Ці ефекти підсилюються зі зменшенням глибини  $H_2$ . Інформація про трансформований спектр важлива, оскільки на її основі можна отримати дані про розподіл періодів та амплітуд хвиль, які необхідні для оцінки ефективності берегозахисної споруди та впливу на береги і гідротехнічні конструкції.

## Цитована література

1. *Bowws E., Gunther H., Rosenthal W., Vincent C. L.* Similarity of the wind wave spectrum in finite depth water: 1. Spectral form // *J. Geophys. Res.* – 1985. – **90**, No. C1. – P. 975–86.
2. *Guedes Soares C.* Representation of double-peaked sea wave spectra // *Ocean Engineering.* – 1984. – **11**, No 2. – P. 185–207.
3. *Ohle N., Daemrich K.-F., Tautenhain E.* Influence of spectral shape on wave parameters and design method in time domain // *Ocean waves measurement and analysis. Proc. 5th Int. Symp. WAVES 2005.* – 3<sup>rd</sup>–7<sup>th</sup> July, 2005. – Madrid, Spain. – Paper No 150. – 10 p. 4.
4. *Mei C. C., Stiassnie M., Yue D. K.-P.* Theory and applications of ocean surface waves. – Singapore: World Sci. Publ., 2005. – 1135 p.
5. *Гринченко В. Т., Улитко А. Ф.* О локальных особенностях в математических моделях физических полей // *Мат. методы и физ.-мех. поля.* – 1998. – **41**, № 1. – С. 12–34.
6. *Городецкая Н. С., Миргородская Т. Н., Никшинов В. И.* О рассеянии поверхностных гравитационных волн тонкими вертикальными барьерами // *Прикл. гидромеханика.* – 2015. – **17**, № 2. – С. 9–19.

7. Tsai C.-C., Hsu T.-W., Lin Y.-T. On step approximation for Roseau's analytical solution of water waves // Hindawi Publ. Corporation, Math. Probl. in Eng. – 2011. – 2011. – Article ID 607196. – P. 1–20.
8. Hunt J. R. C., Carruthers D. J. Rapid distortion theory and the 'problem' of turbulence // J. Fluid Mech. – 1990. – **212**. – P. 497–532.
9. Ochi M. K. Ocean waves. The stochastic approach. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1998. – 333 p.

## References

1. Bouws E., Gunther H., Rosenthal W., Vincent C. L. J. Geophys. Res., 1985, **90**, No C1: 97–86.
2. Guedes Soares C. Ocean Engineering, 1984, **11**, No 2: 185–207.
3. Ohle N., Daemrich K.-F., Tautenhain E. Proc. 5<sup>th</sup> Int. Symp. WAVES 2005, Madrid, Spain, Paper No 150: 10 p.
4. Mei C. C., Stiassnie M., Yue D. K.-P. Theory and applications of ocean surface Waves, Singapore: World Sci. Publ., 2005.
5. Grinchenko V. T., Ulitko A. F. Matematychni metody i physiko-mehanichni polia, 1998, **41**: 12–34 (in Russian).
6. Gorodetska N. S., Mirgorodska T. N., Nikishov V. I. Appl. Hydromechanics, 2015, **17**, No2: 9–19 (in Russian).
7. Tsai C.-C., Hsu T.-W., Lin Y.-T. Hindawi Publ. Corp., Math. Probl. in Eng., 2011, **2011**, ID 607196: 1–20.
8. Hunt J. R. C., Carruthers D. J. J. Fluid Mech., 1990, **212**: 497–532.
9. Ochi M. K. Ocean waves. The stochastic approach, Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1998.

*Надійшло до редакції 16.02.2016*

**Н. С. Городецкая<sup>1</sup>, Т. Н. Щербак<sup>2</sup>,**  
 член-корреспондент НАН Украины **В. И. Никишов<sup>1</sup>**

<sup>1</sup>Институт гидромеханики НАН Украины, Киев

<sup>2</sup>Национальный транспортный университет, Киев

*E-mail:* vinihm@gmail.com

## Трансформация спектра нерегулярного волнения на уступе

*Рассматривается трансформация спектра нерегулярного волнения на подводном уступе. В качестве модели спектра используется суперпозиция двух ТМА спектров с разными частотами спектральных максимумов. Обсуждается использование (по аналогии с RDT подходом) линейной теории для изучения трансформации спектра под воздействием резкого изменения глубины потока. Методом улучшенной редукции найдены коэффициенты отражения и прохождения волнами уступа в зависимости от волнового числа падающей волны. Приведены результаты расчетов. Анализируются особенности трансформированного спектра для различных параметров задачи, в частности, показано, что после уступа спектральные амплитуды растут и длины соответствующих волн уменьшаются, т. е. волны становятся более крутыми.*

**Ключевые слова:** поверхностные волны, трансформация, спектр, нерегулярное волнение.

**N. S. Gorodetska<sup>1</sup>, T. M. Shcherbak<sup>2</sup>,**  
Corresponding Member of the NAS of Ukraine **V. I. Nikishov<sup>1</sup>**

<sup>1</sup>Institute of Hydromechanics of the NAS of Ukraine, Kiev

<sup>2</sup>National Transport University, Kiev

*E-mail:* vinihm@gmail.com

## **Transformation of the irregular wave spectrum by a step**

*The transformation of the irregular wave spectrum by a step is considered. A superposition of two TMA spectra with different frequencies of spectral maxima is used as the spectrum model. The use of a linear theory (as an analog of the RDT approach) for studying the spectrum transformation under the action of an abrupt change of the depth is discussed. The coefficients of reflection and transmission over the step depending on the wave number of an incident wave are obtained on the base of the improved reduction method. The results of calculations are presented. The features of the transformed spectrum for various parameters of the task are analyzed. It is shown that the spectral amplitudes grow after the step, and the corresponding wavelengths decrease, that is, the wave become steeper.*

**Keywords:** surface waves, transformation, spectrum, irregular wave motion.