УДК 53.01:53.05+519.2

И.И. ГОРБАНЬ*

ВЕКТОРНЫЕ МНОГОЗНАЧНЫЕ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЕ ПРОЦЕССЫ СЛУЧАЙНОГО И ГИПЕРСЛУЧАЙНОГО ТИПОВ

*Институт проблем математических машин и систем НАН Украины, Киев, Украина

Анотація. *Розроблено способи опису і аналізу векторних багатозначних детермінованих процесів випадкового і гіпервипадкового типів, що характеризуються відповідно мірою і множиною мір. Для таких процесів введені поняття безперервності, гілки процесу, похідної, диференціала і інтеграла. Окреслені області доцільного застосування підходу, який запропоновано.*
Ключові слова: *багатозначний процес, теорія ймовірностей, теорія гіпервипадкових явищ, порушення збіжності.*

Аннотация. *Разработаны способы описания и анализа векторных многозначных детерминированных процессов случайного и гиперслучайного типов, характеризуемых соответственно мерой и множеством мер. Для таких процессов введены понятия непрерывности, ветви процесса, производной, дифференциала и интеграла. Очерчены области целесообразного применения предложенного подхода.*
Ключевые слова: *многозначный процесс, теория вероятностей, теория гиперслучайных явлений, нарушение сходимости.*

Abstract. *Methods for description and analysis of vector multi-valued determinate processes of random and hyper-random types respectively characterized by measure and set of measures are developed. For such processes, we introduce the notions of continuity, branch of the process, derivative, differential, and integral. Areas of expedient application of the developed approach are outlined.*
Keywords: *multi-valued process, probability theory, theory of hyper-random phenomena, violation of convergence.*

1. Введение

В настоящее время известны две теории, описывающие феномен статистической устойчивости массовых явлений: теория вероятностей и теория гиперслучайных явлений.

Базовыми математическими понятиями этих теорий являются случайные явления, под которыми понимаются математические объекты (события, величины и функции), имеющие вероятностную меру. События, величины и функции, которые не имеют вероятностной меры, случайными не считаются.

Математическая часть современной теории вероятностей основана на системе математических аксиом А.Н. Колмогорова. Практическое использование этой теории обеспечивается принятием физических гипотез, превращающих ее в физико-математическую теорию. Основной физической гипотезой является гипотеза идеальной статистической устойчивости массовых явлений, предполагающая сходимость реальных статистик при неограниченном увеличении объема выборки. На основании этой гипотезы в прикладных дисциплинах вероятность любого реального события рассматривается как предел относительной частоты этого события при неограниченном увеличении числа испытаний.

Исследования разнообразных реальных процессов на больших интервалах наблюдения показали, что гипотеза идеальной статистической устойчивости не находят экспериментального подтверждения. В реальной жизни имеет место ограниченная статистическая устойчивость. При относительно небольших объемах выборки увеличение количества отсчетов приводит к уменьшению флуктуации статистик. Но при больших объемах выборки эта тенденция не наблюдается: достигнув определенного значения, уровень флуктуаций практически не изменяется или даже растет.

Для описания массовых физических явлений с учетом нарушения сходимости была предложена физико-математическая теория гиперслучайных явлений [1, 2]. Под гиперслучайным явлением (событием, величиной, функцией) подразумевается множество случайных явлений (событий, величин, функций), зависящих от условий $g \in G$. Для каждого g-го случайного явления определена вероятностная мера, но для условий g мера не определена.

Математическая часть теории гиперслучайных явлений базируется на той же системе аксиом А.Н. Колмогорова, что и теория вероятностей. Физическая же часть теории гиперслучайных явлений вместо гипотезы идеальной статистической устойчивости массовых явлений использует физическую гипотезу ограниченной статистической устойчивости, признающую отсутствие сходимости реальных статистик. В этом принципиальное различие теории вероятностей и теории гиперслучайных явлений.

Возможны [3] две физические интерпретации математической части теории вероятностей и математической части теории гиперслучайных явлений. Одна из этих интерпретаций касается описания массовых физических явлений (феномена статистической устойчивости), а другая – одиночных (детерминированных) многозначных явлений.

Особенности использования теории вероятностей и теории гиперслучайных явлений для описания и анализа одиночных многозначных явлений исследовались в работах [4–7]. Результаты этих исследований обобщены в [8].

Целью настоящей статьи является распространение изложенных в [8] способов описания и анализа скалярных многозначных детерминированных процессов (функций одной переменной) на векторные многозначные детерминированные процессы.

Специфика развиваемого подхода состоит в представлении процессов не только множеством значений, которые они принимают (спектром значений) в различные моменты времени, но и вероятностной мерой или множеством вероятностных мер этих значений – однозначными или многозначными функциями распределения.

В статье используется ряд нетривиальных понятий, в частности, понятия многозначной функции распределения, обобщенного предела, спектра предельных точек, производной скалярного многозначного процесса, непрерывности скалярного многозначного процесса, интеграла от многозначного скалярного процесса и др.

Читателю, не знакомому с этими понятиями, желательно ознакомиться с ними в монографиях [6, 7] или статье [8].

Многозначные величины и функции (или те, которые могут быть таковыми) обозначены буквами со знаком тильды над ними, однозначные величины и функции – буквами без тильды, а векторные величины – буквами со стрелкой.

2. Основные понятия, используемые для описания векторных многозначных детерминированных процессов

Определение 1. N-мерным векторным многозначным детерминированным процессом $\tilde{\vec{x}}(t)$ назовем вектор, зависящий от аргумента t, компоненты которого представляют собой скалярные многозначные детерминированные процессы с независимыми компонентами $\tilde{x}_n(t),\ n = \overline{1, N}$: $\tilde{\vec{x}}(t) = (\tilde{x}_n(t),\ n = \overline{1, N})$.

Векторный многозначный детерминированный процесс при фиксированном значении аргумента t принимает множество значений, характеризуемых функцией распределения $\tilde{F}_{\vec{x}}(\vec{x};t)$. Поскольку компоненты вектора $\tilde{\vec{x}}(t)$ независимы, функция распределения

$\tilde{F}_{\vec{x}}(\vec{x};t)$ определяется функциями распределения компонент $\tilde{F}_{x_1}(x_1;t),\ldots,\tilde{F}_{x_N}(x_N;t)$: $\tilde{F}_{\vec{x}}(\vec{x};t)=\tilde{F}_{x_1}(x_1;t)\ldots\tilde{F}_{x_N}(x_N;t)$. В общем случае функция $\tilde{F}_{\vec{x}}(\vec{x};t)$ многозначная, в частном – однозначная ($\tilde{F}_{\vec{x}}(\vec{x};t)=F_{x_1}(x_1;t)\ldots F_{x_N}(x_N;t)$).

Определение 2. m-м частичным пределом при $t\to t_0-0$ ($t\to t_0+0$) векторного многозначного детерминированного процесса $\vec{\tilde{x}}(t)$ назовем m-й предел (однозначный вектор) однозначной частичной последовательности, сформированной из исходного процесса при $t\to t_0-0$ ($t\to t_0+0$).

Определение 3. Левосторонним (правосторонним) спектром предельных точек $\vec{\tilde{x}}^-(t_0)=\underset{t\to t_0-0}{\mathrm{LIM}}\,\vec{\tilde{x}}(t)$ ($\vec{\tilde{x}}^+(t_0)=\underset{t\to t_0+0}{\mathrm{LIM}}\,\vec{\tilde{x}}(t)$) (обобщенным пределом) многозначного векторного процесса $\vec{\tilde{x}}(t)$ назовем множество всех его частичных пределов при $t\to t_0-0$ ($t\to t_0+0$).

Спектры предельных точек $\vec{\tilde{x}}^-(t_0)$, $\vec{\tilde{x}}^+(t_0)$ векторного процесса $\vec{\tilde{x}}(t)$ и спектр его значений в точке $t=t_0$ описываются соответственно функциями распределения $\tilde{F}^-_{\vec{x}}(\vec{x};t_0)$, $\tilde{F}^+_{\vec{x}}(\vec{x};t_0)$ и $\tilde{F}_{\vec{x}}(\vec{x};t_0)$. В общем случае эти функции многозначные и не обязательно совпадают друг с другом.

Определение 4. Векторный многозначный детерминированный процесс $\vec{\tilde{x}}(t)$, у которого на всей области его определения функции распределения $\tilde{F}^-_{\vec{x}}(\vec{x};t)$, $\tilde{F}^+_{\vec{x}}(\vec{x};t)$ и $\tilde{F}_{\vec{x}}(\vec{x};t)$ однозначные, назовем векторным многозначным процессом случайного типа, а у которого указанное условие не выполняется, – векторным многозначным процессом гиперслучайного типа (см. классификацию на рис. 1 статьи [8]).

3. Элементы математического анализа векторных многозначных детерминированных процессов случайного типа

3.1. Непрерывный векторный многозначный детерминированный процесс случайного типа и его ветви

Определение 5. Векторный многозначный детерминированный процесс $\vec{\tilde{x}}(t)$ случайного типа назовем непрерывным в точке t слева (справа), если

– он определен в этой точке и ее окрестности слева (справа);

– его левосторонняя $F^-_{\vec{x}}(\vec{x};t)$ (правосторонняя $F^+_{\vec{x}}(\vec{x};t)$) функция распределения в точке t совпадает с функцией распределения $F_{\vec{x}}(\vec{x};t)$ в этой же точке (то есть в точке t функция распределения $F_{\vec{x}}(\vec{x};t)$ непрерывна слева (справа) по t).

Определение 6. Векторный многозначный детерминированный процесс $\vec{\tilde{x}}(t)$ непрерывен на интервале (t_1,t_2), если он непрерывен слева и справа во всех точках рассматриваемого интервала.

У непрерывного векторного процесса левосторонний $\vec{\tilde{x}}^-(t)$ и правосторонний $\vec{\tilde{x}}^+(t)$ спектры предельных точек совпадают со спектром значений $\vec{\tilde{x}}(t)$.

Определение 7. $\vec{c}$-ой ветвью ($\vec{c}$-м расслоением) ($\vec{c}=(c_1,\ldots,c_N)$, $c_1,\ldots,c_N\in(0,1]$ – числа) непрерывного на интервале векторного многозначного детерминированного процесса $\vec{\tilde{x}}(t)$ назовем векторную однозначную функцию $\vec{x}_{\vec{c}}(t)=(x_{c_1}(t),\ldots,x_{c_N}(t))$, компоненты которой на рассматриваемом интервале описываются системой

$$\begin{cases} x_{c_1}(t) = \inf\limits_{x_1} \arg\limits_{x_1}(F_{x_1}(x_1;t) = c_1), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{c_N}(t) = \inf\limits_{x_N} \arg\limits_{x_N}(F_{x_N}(x_N;t) = c_N). \end{cases} \tag{1}$$

Как и в случае скалярного многозначного детерминированного процесса случайного типа, ветви векторного многозначного детерминированного процесса случайного типа не имеют общих точек (в частности, не пересекаются).

Количество ветвей может быть конечным, счетным или несчетным. Во всех случаях функция распределения $F_{\vec{x}}(\vec{x};t)$ процесс $\vec{\vec{x}}(t)$ – неубывающая функция аргументов $x_1,\ldots,x_N$. Если количество ветвей конечное или счетное, то функция распределения $F_{\vec{x}}(\vec{x};t)$ – ступенчатая функция этих аргументов.

Определение 8. Многозначный непрерывный на интервале (t_1,t_2) векторный процесс $\vec{\vec{x}}(t)$ случайного типа назовем разложимым по ветвям, если его можно представить множеством ветвей $\vec{x}_{\vec{c}}(t)$: $\vec{\vec{x}}(t) = \{\vec{x}_{\vec{c}}(t) \mid \vec{c} \in \vec{C}\}$, где $\vec{C} = (C_1,\ldots,C_N)$ – вектор, описывающий множество ветвей $\vec{c} = (c_1,\ldots,c_N)$.

Не все непрерывные многозначные процессы допускают разложение по ветвям. Если процесс $\vec{\vec{x}}(t)$ разложим по ветвям, то он описывается множеством ветвей $\{\vec{x}_{\vec{c}}(t) \mid \vec{c} \in \vec{C}\}$ и функцией распределения ветвей $F_{\vec{c}}(\vec{c}) = F_{\vec{c}}(c_1,\ldots,c_N)$ (или плотностью распределения ветвей

$$f_{\vec{c}}(\vec{c}) = \frac{\partial^N F_{\vec{c}}(c_1,\ldots,c_N)}{\partial c_1 \ldots \partial c_N}).$$

Функция распределения $F_{\vec{c}}(\vec{c})$ представляет собой инвариантную меру[1] [9].

3.2. Производная и дифференциал векторного многозначного процесса случайного типа

Определение 9. Правосторонней производной $\vec{\vec{x}}'^{+}(t)$ (левосторонней производной $\vec{\vec{x}}'^{-}(t)$) непрерывного векторного многозначного процесса $\vec{\vec{x}}(t)$ случайного типа, разложимого по ветвям $\vec{x}_{\vec{c}}(t)$ ($\vec{c} \in \vec{C}$), назовем множество правосторонних (левосторонних) производных

$$\vec{\vec{x}}'^{\pm}_{\vec{c}}(t) = \underset{\Delta t \to \pm 0}{\mathrm{LIM}} \frac{\vec{x}_{\vec{c}}(t+\Delta t) - \vec{x}_{\vec{c}}(t)}{\Delta t}, \tag{2}$$

рассчитанных в точке t для всех ветвей $\vec{c} \in \vec{C}$, то есть $\vec{\vec{x}}'^{\pm}(t) = \{\vec{\vec{x}}'^{\pm}_{\vec{c}}(t),\ \vec{c} \in \vec{C}\}$.

Производные $\vec{\vec{x}}'^{\pm}_{\vec{c}}(t)$ могут быть однозначными и многозначными. Если эти производные однозначные, то они представляют собой скорости $\vec{x}'^{\pm}_{\vec{c}}(t)$ изменения $\vec{c}$-ой ветви при приближении к t справа (слева). Тогда $\vec{\vec{x}}'^{\pm}(t)$ описываются функциями распределения

[1] Понятие инвариантной меры используется в теории динамических систем для описания меры, которая не изменяется с течением времени при эволюции в фазовом пространстве состояния динамической системы.

$F_{\vec{x}'}^{\pm}(\vec{x}';t)$. Если же производные $\vec{\tilde{x}}_{\vec{c}}'^{\pm}(t)$ многозначные (не характеризуются конкретными числами), то они носят неопределенный характер. При этом $\vec{\tilde{x}}'^{\pm}(t)$ описываются многозначными функциями распределения $\tilde{F}_{\vec{x}'}^{\pm}(\vec{x}';t)$, которые могут быть охарактеризованы границами функции распределения $F_{S\vec{x}'}^{\pm}(\vec{x}';t)$, $F_{I\vec{x}'}^{\pm}(\vec{x}';t)$.

Определение 10. Векторный многозначный непрерывный процесс $\vec{\tilde{x}}(t)$ случайного типа, разложимый по ветвям, будем называть дифференцируемым в точке t, если все его производные по ветвям однозначные и для всех ветвей левосторонняя производная совпадает с правосторонней производной: $\vec{x}_{\vec{c}}'^{-}(t)=\vec{x}_{\vec{c}}'^{+}(t)=\vec{x}_{\vec{c}}'(t)$ ($\vec{c}\in\vec{C}$).

Определение 11. Векторный многозначный непрерывный процесс $\vec{\tilde{x}}(t)$ случайного типа, разложимый по ветвям, будем называть дифференцируемым, если он дифференцируем на всем интервале его определения.

Поскольку у дифференцируемого процесса $\vec{\tilde{x}}(t)$ случайного типа производные по ветвям $\vec{x}_{\vec{c}}'(t)$ однозначные, производная $\vec{\tilde{x}}'(t)=\{\vec{x}_{\vec{c}}'(t)\,|\,\vec{c}\in\vec{C}\}$ описывается однозначной функцией распределения значений производных $F_{\vec{x}'}(\vec{x}';t)$ и соответствующей однозначной плотностью распределения $f_{\vec{x}'}(\vec{x}';t)$.

Определение 12. Дифференциалом $d\vec{\tilde{x}}(t)$ векторного многозначного непрерывного дифференцируемого процесса $\vec{\tilde{x}}(t)$ случайного типа, разложимого по ветвям, будем называть совокупность главных линейных частей приращений этого процесса по t:

$$\Delta\vec{x}_{\vec{c}}\equiv\vec{x}_{\vec{c}}(t+dt)-\vec{x}_{\vec{c}}(t)=\vec{x}_{\vec{c}}'\,(t)dt+o(dt), \qquad (3)$$

рассчитанных для множества ветвей $\vec{c}\in\vec{C}$, то есть

$$d\vec{\tilde{x}}(t)=\{d\vec{x}_{\vec{c}}(t)\,|\,\vec{c}\in\vec{C}\}=\{\vec{x}_{\vec{c}}'\,(t)dt\,|\,\vec{c}\in\vec{C}\}=\{\vec{x}_{\vec{c}}'\,(t)\,|\,\vec{c}\in\vec{C}\}dt=\vec{\tilde{x}}'(t)dt, \qquad (4)$$

где dt – приращение по t, $o(dt)$ – бесконечно малая величина.

Дифференциал $d\vec{\tilde{x}}(t)$ в силу линейной связи с производной $\vec{\tilde{x}}'(t)$ и однозначности производных по ветвям описывается однозначной функцией распределения $F_{d\vec{x}}(d\vec{x};t)$ и однозначной плотностью распределения $f_{d\vec{x}}(d\vec{x};t)$.

В общем случае производные не обязательно непрерывные и разложимы по ветвям. Для векторной многозначной непрерывной разложимой по ветвям производной $\vec{\tilde{x}}'(t)$, как и для скалярной многозначной непрерывной разложимой по ветвям производной, можно определить вторые производные $\vec{\tilde{x}}''^{\pm}(t)$ и далее итерационно для многозначной непрерывной разложимой по ветвям производной $\vec{\tilde{x}}^{(r)}(t)$ любого r-го порядка – производные $\vec{\tilde{x}}^{(r+1)\pm}(t)$ порядка $(r+1)$.

Производные характеризуются своими функциями распределения, однозначными или многозначными. Если все вторые производные $\vec{\tilde{x}}_{\vec{c}}''^{\pm}(t)$ однозначные ($\vec{\tilde{x}}_{\vec{c}}''^{\pm}(t)=\vec{x}_{\vec{c}}''^{\pm}(t)\quad\forall\vec{c}\in\vec{C}$), то в точке t они характеризуют ускорение, с которым изменяется векторный процесс $\vec{\tilde{x}}(t)$ по ветвям при приближении к t слева и справа. Тогда ускорения $\vec{\tilde{x}}''^{\pm}(t)=\{\vec{x}_{\vec{c}}''^{\pm}(t)\,|\,\vec{c}\in\vec{C}\}$ описываются однозначными функциями распределения $F_{\vec{x}''}^{\pm}(\vec{x}'';t)$. Если же производные $\vec{\tilde{x}}_{\vec{c}}''^{\pm}(t)$ многозначные (не характеризуются конкретными числами), то они носят неопределенный характер, и тогда $\vec{\tilde{x}}''^{\pm}(t) = \{\vec{x}''^{\pm}_{\vec{c}}(t) \mid \vec{c} \in \vec{C}\}$ описываются многозначными функциями распределения $\tilde{F}^{\pm}_{\vec{x}''}(\vec{x}'';t)$.

Векторный многозначный разложимый по ветвям дифференцируемый процесс $\vec{\tilde{x}}(t)$ случайного типа, имеющий в точке t_0 однозначные дифференцируемые производные по ветвям $\vec{x}^{(r)}_{\vec{c}}(t_0)$ любого порядка r $(\vec{c} \in \vec{C})$, может быть описан множеством ветвей $\vec{x}_{\vec{c}}(t)$, раскладываемых в точке t_0 в ряд Тейлора. При этом процесс $\vec{\tilde{x}}(t)$ может быть представлен множеством своих значений $\vec{\tilde{x}}(t_0) = \{\vec{x}_{\vec{c}}(t_0) \mid \vec{c} \in \vec{C}\}$ в точке t_0, множеством значений производных $\vec{\tilde{x}}^{(r)}(t_0)$ в этой же точке и множеством соответствующих функций распределения $F_{\vec{x}}(\vec{x};t_0)$, $F_{\vec{x}^{(r)}}(\vec{x}^{(r)};t_0)$, $r = 1,2,\ldots$.

3.3. Интеграл от векторного многозначного процесса случайного типа

Определение 13. Первообразной (примитивной) векторного многозначного процесса $\vec{\tilde{x}}(t)$ случайного типа, определенного на интервале $[a,b]$, назовем векторный дифференцируемый многозначный процесс $\vec{\tilde{y}}(t)$, производная которого во всех точках этого интервала равна процессу $\vec{\tilde{x}}(t)$: $\vec{\tilde{y}}'(t) = \vec{\tilde{x}}(t)$.

Определение 14. Неопределенным интегралом от векторного многозначного процесса $\vec{\tilde{x}}(t)$ случайного типа назовем векторный дифференцируемый многозначный процесс

$$\int \vec{\tilde{x}}(t)\,dt = \vec{\tilde{y}}(t) + \vec{C}_0,$$

где $\vec{C}_0$ – произвольный постоянный вектор, мерность которого совпадает с вектором $\vec{\tilde{x}}(t)$.

Определение 15. Определенным интегралом от векторного многозначного непрерывного разложимого по ветвям процесса $\vec{\tilde{x}}(t)$ случайного типа, определенного на интервале $[a,b]$, назовем множество предельных точек

$$\vec{\tilde{y}} = \int_a^b \vec{\tilde{x}}(t)dt = \left\{ \underset{\max \Delta t_i \to 0}{\mathrm{LIM}} \sum_{i=1}^{I} \vec{x}_{\vec{c}}(\xi_i)\Delta t_i \mid \vec{c} \in \vec{C} \right\}, \tag{5}$$

где $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_I = b$, $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$, $\vec{x}_{\vec{c}}(\xi_i)$ – значение $\vec{c}$-той ветви процесса в произвольной точке $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$, $i = \overline{1,I}$.

Если пределы LIM в выражении (5) однозначные, то определенный интеграл можно записать как

$$\vec{\tilde{y}} = \int_a^b \vec{\tilde{x}}(t)dt = \left\{ \int_a^b \vec{x}_{\vec{c}}(t)dt \mid \vec{c} \in \vec{C} \right\} = \{\vec{y}_{\vec{c}} \mid \vec{c} \in \vec{C}\}. \tag{6}$$

Определение 16. Криволинейным интегралом от ограниченной функции $\Phi(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ по кривой L, описываемой векторной многозначной непрерывной разложимой по ветвям функцией $\vec{\tilde{x}}(t) = (\tilde{x}_1(t), \tilde{x}_2(t))$, определенной на интервале $[a,b]$, назовем множество предельных точек

$$\tilde{y} = \int\limits_L \Phi(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)dl = \int\limits_a^b \Phi(\tilde{x}_1(t), \tilde{x}_2(t))\frac{dl}{dt}dt =$$
$$= \left\{ \underset{\max \Delta l_i \to 0}{\mathrm{LIM}} \sum_{i=1}^{I} \Phi(x_{1c_1}(\xi_i), x_{2c_2}(\xi_i))\Delta l_i \mid c_1 \in C_1, c_2 \in C_2 \right\}, \tag{7}$$

где $\Delta l_i = \sqrt{[x_1(t_i) - x_1(t_{i-1})]^2 + [x_2(t_i) - x_2(t_{i-1})]^2}$, $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_I = b$, $t_{i-1} \le \xi_i \le t_i$, $i = \overline{1, I}$.

Если пределы в выражении (7) однозначные, то

$$\tilde{y} = \left\{ \int\limits_L \Phi(x_{1c_1}, x_{2c_2})dl \mid c_1 \in C_1, c_2 \in C_2 \right\} = \left\{ \int\limits_a^b \Phi(x_{1c_1}(t), x_{2c_2}(t))\frac{dl}{dt}dt \mid c_1 \in C_1, c_2 \in C_2 \right\}. \tag{8}$$

Определение 17. Интегралы, допускающие представление в виде выражений (6), (8), будем называть интегралами случайного типа, а определенные интегралы, не допускающие такое представление, – интегралами гиперслучайного типа.

Интегралы (5)–(8), как и любое множество предельных точек, описываются не только множеством своих значений, но и функциями их распределения. У интегралов гиперслучайного типа функции распределения значений и плотности распределения многозначные, а у интеграла случайного типа – однозначные.

3.4. Представление векторного многозначного процесса случайного типа с помощью дифференциального уравнения

Дифференцируемый векторный многозначный процесс случайного типа $\vec{\tilde{x}}(t)$, разложимый по ветвям, можно рассматривать как множество $\vec{\tilde{x}}^*(t) = (\tilde{x}_1^*(t), \ldots, \tilde{x}_N^*(t)) = \{\vec{x}_{\vec{c}}^*(t) \mid \vec{c} \in \vec{C}\}$ частных решений $\vec{x}_{\vec{c}}^*(t)$, соответствующих разным начальным или (и) граничным условиям некоторой системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{cases} x_1' = h_1(x_1, \ldots, x_N; t), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_N' = h_N(x_1, \ldots, x_N; t), \end{cases} , \tag{9}$$

имеющей для фиксированных начальных или (и) граничных условий единственное решение.

Единственность решения уравнения обеспечивается, как известно, если $h_1(x_1, \ldots, x_N; t), \ldots, h_N(x_1, \ldots, x_N; t)$ – однозначные непрерывные функции, удовлетворяющие в рассматриваемой области условию Липшица [10]:

$$\begin{cases} \left| h_1(x_1, \ldots, x_N; t) - h_1(y_1, \ldots, y_N; t) \right| \le M_0 \sum\limits_{n=1}^{N} \left| x_n - y_n \right|, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \left| h_N(x_1, \ldots, x_N; t) - h_N(y_1, \ldots, y_N; t) \right| \le M_0 \sum\limits_{n=1}^{N} \left| x_n - y_n \right|, \end{cases}$$

где M_0 – некоторая положительная постоянная.

В этом случае частные решения $\vec{x}_{\vec{c}}^*(t)$ для разных значений вектора $\vec{c} \in \vec{C}$ представляют собой ветви многозначного процесса $\vec{\tilde{x}}(t)$, удовлетворяющего разным начальным или (и) граничным условиям.

Множество $\tilde{\vec{x}}^*(t)$ характеризуется не только множеством функций $\vec{x}^*_{\vec{c}}(t)$, соответствующих разным ветвям $\vec{c} \in \vec{C}$, но также функцией распределения значений $F_{\vec{x}}(\vec{x};t)$ для разных значений $\vec{x}$ и t. Эта функция распределения определяется функцией распределения ветвей $F_{\vec{c}}(\vec{c})$ (или плотностью распределения ветвей $f_{\vec{c}}(\vec{c})$).

Обратим внимание, что система дифференциальных уравнений первого порядка (9) может быть сведена к одному обыкновенному дифференциальному уравнению N-го порядка. Отсюда следует, что N раз дифференцируемый скалярный многозначный процесс случайного типа $\tilde{x}(t)$, разложимый по ветвям, можно рассматривать как множество частных решений дифференциального уравнения N-го порядка $\Gamma(x^{(N)},\ldots,x';x;t)$, соответствующих разным начальным или (и) граничным условиям.

4. Векторные многозначные процессы гиперслучайного типа

4.1. Непрерывный векторный многозначный процесс гиперслучайного типа

Векторный многозначный процесс гиперслучайного типа $\tilde{\vec{x}}(t)$ – множество многозначных процессов случайного типа $\tilde{\vec{x}}_g(t)$, рассматриваемых в различных условиях $g \in G$: $\tilde{\vec{x}}(t) = \{\tilde{\vec{x}}_g(t) \mid g \in G\}$. Описывающие этот процесс многозначные функции распределения $\tilde{F}^-_{\vec{x}}(\vec{x};t)$, $\tilde{F}^+_{\vec{x}}(\vec{x};t)$ и $\tilde{F}_{\vec{x}}(\vec{x};t)$ представляют собой множества функций распределения $F^-_{\vec{x}/g}(\vec{x};t)$, $F^+_{\vec{x}/g}(\vec{x};t)$ и $F_{\vec{x}/g}(\vec{x};t)$ составляющих процессов случайного типа $(g \in G)$:

$$\tilde{F}^-_{\vec{x}}(\vec{x};t) = \{F^-_{\vec{x}/g}(\vec{x};t) \mid g \in G\},$$

$$\tilde{F}^+_{\vec{x}}(\vec{x};t) = \{F^+_{\vec{x}/g}(\vec{x};t) \mid g \in G\},$$

$$\tilde{F}_{\vec{x}}(\vec{x};t) = \{F_{\vec{x}/g}(\vec{x};t) \mid g \in G\}.$$

Определение 18. Векторный многозначный процесс $\tilde{\vec{x}}(t)$ гиперслучайного типа назовем непрерывным на интервале (t_1,t_2), если составляющие его многозначные процессы случайного типа непрерывны на этом же интервале.

Математический анализ векторных многозначных процессов гиперслучайного типа, даже непрерывных, – более сложная задача, чем математический анализ векторных многозначных процессов случайного типа. Упрощение имеет место, когда составляющие процессы случайного типа дифференцируемы на всем интервале определения (а, следовательно, разложимы по ветвям), и к тому же множества ветвей $\vec{C}_g$, соответствующие разным составляющим $g \in G$, одинаковы: $\vec{C}_g = \vec{C}\ \ \forall g \in G$.

В этом случае можно ввести понятие $\vec{c}\,/\,g$-той ветви процесса.

Определение 19. $\vec{c}_g = \vec{c}\,/\,g$-ой ветвью ($\vec{c}_g$-м расслоением) ($\vec{c} = (c_1,\ldots,c_N)$, $c_1,\ldots,c_N \in [0,1]$, $g \in G$) непрерывного на интервале (t_1,t_2) векторного многозначного процесса $\tilde{\vec{x}}(t) = \{\vec{x}_{\vec{c}/g}(t) \mid \vec{c} \in \vec{C}, g \in G\}$ гиперслучайного типа назовем векторную однозначную функцию $\vec{x}_{\vec{c}/g}(t) = (x_{c_1/g}(t),\ldots,x_{c_N/g}(t))$, компоненты которой на рассматриваемом интервале описываются системой

$$\begin{cases} x_{c_1/g}(t) = \inf\limits_{x_1} \arg\limits_{x_1}(F_{x_1/g}(x_1;t) = c_1 / g), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{c_N/g}(t) = \inf\limits_{x_N} \arg\limits_{x_N}(F_{x_N/g}(x_N;t) = c_N / g). \end{cases} \tag{10}$$

Ветви для фиксированного параметра $g \in G$ описываются однозначной функцией распределения по ветвям $F_{\vec{c}/g}(\vec{c})$ или соответствующей плотностью распределения $f_{\vec{c}/g}(\vec{c}) = \partial^N F_{\vec{c}/g}(\vec{c}) / \partial c_1 \ldots \partial c_N$.

Однозначные ветви образуют многозначные ветви, определяемые следующим образом: $\vec{\vec{c}} = \ \vec{c} / g \mid g \in G \ $.

Определение 20. Векторный многозначный непрерывный на интервале $t \in (t_1, t_2)$ процесс $\vec{\vec{x}}(t)$ гиперслучайного типа будем называть разложимым по ветвям, если его составляющие процессы случайного типа $\vec{\vec{x}}_g(t)$ допускают разложение по ветвям $\vec{x}_{\vec{c}/g}(t)$: $\vec{\vec{x}}(t) = \{\vec{x}_{\vec{c}/g}(t) \mid \vec{c} \in \vec{C}, g \in G\}$.

4.2. Производная и дифференциал векторного многозначного процесса гиперслучайного типа

Производные векторного многозначного непрерывного разложимого по ветвям процесса гиперслучайного типа можно определить следующим образом.

Определение 21. Правосторонней производной $\vec{\vec{x}}'^{+}(t)$ (левосторонней производной $\vec{\vec{x}}'^{-}(t)$) векторного многозначного непрерывного процесса $\vec{\vec{x}}(t)$ гиперслучайного типа, разложимого по ветвям $\vec{x}_{\vec{c}/g}(t)$ $(\vec{c} \in \vec{C},\ g \in G)$, назовем множество правосторонних (левосторонних) производных

$$\vec{\vec{x}}'^{\pm}_{\vec{c}/g}(t) = \operatorname*{LIM}_{\Delta t \to \pm 0} \frac{\vec{x}_{\vec{c}/g}(t + \Delta t) - \vec{x}_{\vec{c}/g}(t)}{\Delta t}, \tag{11}$$

рассчитанных в точке t для всех $\vec{c} \in \vec{C}$ и $g \in G$, то есть $\vec{\vec{x}}'^{\pm}(t) = \{\vec{\vec{x}}'^{\pm}_{\vec{c}/g}(t) \mid \vec{c} \in \vec{C}, g \in G\}$.

Определение 22. Векторный многозначный непрерывный процесс $\vec{\vec{x}}(t)$ гиперслучайного типа, разложимый по ветвям, будем называть дифференцируемым в точке t, если все его производные по ветвям однозначные и для всех ветвей левосторонняя производная совпадает с правосторонней производной: $\vec{x}'^{-}_{\vec{c}/g}(t) = \vec{x}'^{+}_{\vec{c}/g}(t) = \vec{x}'_{\vec{c}/g}(t)\ \ \forall \vec{c} \in \vec{C},\ g \in G$.

Определение 23. Векторный многозначный непрерывный процесс $\tilde{x}(t)$ гиперслучайного типа, разложимый по ветвям, будем называть дифференцируемым, если он дифференцируем на всем интервале его определения.

Определение 24. Дифференциалом $d\vec{\vec{x}}(t)$ векторного многозначного непрерывного дифференцируемого процесса $\vec{\vec{x}}(t)$ гиперслучайного типа, разложимого по ветвям, назовем множество дифференциалов составляющих процессов случайного типа, то есть

$$d\tilde{x}(t) = \{d\vec{x}_{\vec{c}/g} \mid \vec{c} \in \vec{C},\ g \in G\} = \{\vec{x}'_{\vec{c}/g}(t)dt \mid \vec{c} \in \vec{C},\ g \in G\} = \{\vec{x}'_{\vec{c}/g}(t) \mid \vec{c} \in \vec{C},\ g \in G\}dt.$$

4.3. Интеграл от векторного многозначного процесса гиперслучайного типа

Определение 25. Первообразной (примитивной) векторного многозначного процесса гиперслучайного типа $\vec{\tilde{x}}(t) = \{\vec{\tilde{x}}_g(t) \mid g \in G\}$, определенного на интервале $[a,b]$, назовем векторный дифференцируемый многозначный процесс $\vec{\tilde{y}}(t) = \{\vec{\tilde{y}}_g(t) \mid g \in G\}$, производная которого во всех точках этого интервала равна процессу $\vec{\tilde{x}}(t)$: $\vec{\tilde{y}}'(t) = \{\vec{\tilde{x}}_g(t) \mid g \in G\}$.

Определение 26. Неопределенным интегралом от векторного многозначного процесса гиперслучайного типа $\vec{\tilde{x}}(t)$ назовем дифференцируемый векторный многозначный процесс

$$\{\int \vec{\tilde{x}}_g(t)\,dt \mid g \in G\} = \{\vec{\tilde{y}}_g(t) \mid g \in G\} + \vec{C}_0,$$

сокращенно записываемый следующим образом:

$$\int \vec{\tilde{x}}(t)\,dt = \vec{\tilde{y}}(t) + \vec{C}_0,$$

где $\vec{C}_0$ – произвольный постоянный вектор, мерность которого совпадает с вектором $\vec{\tilde{x}}(t)$.

Определение 27. Определенным интегралом от векторного многозначного непрерывного разложимого по ветвям процесса гиперслучайного типа $\vec{\tilde{x}}(t)$, определенного на интервале $[a,b]$, назовем множество предельных точек

$$\vec{\tilde{y}} = \int_a^b \vec{\tilde{x}}(t)dt = \left\{ \operatorname*{LIM}_{\max \Delta t_i \to 0} \sum_{i=1}^{I} \vec{x}_{\vec{c}/g}(\xi_i)\Delta t_i \mid \vec{c} \in \vec{C},\ g \in G \right\}, \tag{12}$$

где $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_I = b$, $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$, $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$.

Если пределы LIM в выражении (12) однозначные, то определенный интеграл можно записать как

$$\vec{\tilde{y}} = \int_a^b \vec{\tilde{x}}(t)dt = \left\{ \int_a^b \vec{x}_{\vec{c}/g}(t)dt \mid \vec{c} \in \vec{C},\ g \in G \right\} = \{\vec{y}_{\vec{c}/g} \mid \vec{c} \in \vec{C},\ g \in G\}. \tag{13}$$

Определение 28. Криволинейным интегралом от ограниченной функции $\Phi(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ по кривой L, описываемой векторным многозначным непрерывным разложимым по ветвям процессом $\vec{\tilde{x}}(t) = (\tilde{x}_1(t), \tilde{x}_2(t))$ гиперслучайного типа, определенным на интервале $[a,b]$, назовем множество предельных точек

$$\begin{aligned} \tilde{y} &= \int_L \Phi(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)dl = \int_a^b \Phi(\tilde{x}_1(t), \tilde{x}_2(t))\frac{dl}{dt}dt = \\ &= \left\{ \operatorname*{LIM}_{\max \Delta l_i \to 0} \sum_{i=1}^{I} \Phi(x_{1c_1/g}(\xi_i), x_{2c_2/g}(\xi_i))\Delta l_i \mid c_1 \in C_1, c_2 \in C_2, g \in G \right\}, \end{aligned} \tag{14}$$

где $\Delta l_i = \sqrt{[x_1(t_i) - x_1(t_{i-1})]^2 + [x_2(t_i) - x_2(t_{i-1})]^2}$, $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_I = b$, $t_{i-1} \le \xi_i \le t_i$, $i = \overline{1, I}$.

Если пределы в выражении (14) однозначные, то

$$\tilde{y} = \left\{ \int_L \Phi(x_{1c_1}, x_{2c_2})dl \mid c_1 \in C_1, c_2 \in C_2 \right\} = \left\{ \int_a^b \Phi(x_{1c_1/g}(t), x_{2c_2/g}(t))\frac{dl}{dt}dt \mid c_1 \in C_1, c_2 \in C_2, g \in G \right\}. \tag{15}$$

Определение 29. Интегралы, допускающие представление в виде выражений (13), (15), естественно называть интегралами случайного типа, а интегралы, не допускающие такое представление, – интегралами гиперслучайного типа.

Интегралы (12)–(15) описываются не только множеством своих значений, но и функциями распределения. У интегралов гиперслучайного типа функции распределения и плотности распределения многозначные, а у интегралов случайного типа – однозначные.

4.4. Представление векторного многозначного процесса гиперслучайного типа с помощью дифференциальных уравнений

Дифференцируемый векторный многозначный процесс гиперслучайного типа $\vec{\tilde{x}}(t)$, разложимый по ветвям, можно рассматривать как множество $\vec{\tilde{x}}^*(t)=\{\vec{\tilde{x}}_g^*(t)\,|\,g\in G\}$ частных решений $\vec{\tilde{x}}_g^*(t)$ совокупности обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, описывающих составляющие функции случайного типа при определенных начальных или (и) граничных условиях, где $\vec{\tilde{x}}_g^*(t)=\{\vec{x}_{\vec{c}/g}^*(t)\,|\,\vec{c}\in\vec{C}\}$ – множество частных решений g-той системы дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{cases} x_1' = h_{1/g}(x_1,\ldots,x_N;t), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_N' = h_{N/g}(x_1,\ldots,x_N;t), \end{cases} \tag{16}$$

имеющей для фиксированных начальных или (и) граничных условий единственное решение.

Система уравнений (16) для всех g может рассматриваться как дифференциальное включение [11].

Множество $\vec{\tilde{x}}^*(t)$ характеризуется не только множеством функций $\vec{x}_{\vec{c}/g}^*(t)$, соответствующих разным составляющим функциям $g\in G$ и ветвям $\vec{c}\in\vec{C}$, но также многозначной функцией распределения значений $\tilde{F}_{\vec{x}}(\vec{x};t)=\{F_{\vec{x}/g}(\vec{x};t)\,|\,g\in G\}$.

Обратим внимание, что в описанном способе представления многозначного процесса многозначность обусловлена двумя причинами: отличием ядер $h_{1/g}(x_1,\ldots,x_N;t),\ldots,h_{N/g}(x_1,\ldots,x_N;t)$ дифференциальных уравнений при разных условиях $g\in G$, что порождает множество составляющих $\vec{\tilde{x}}_g^*(t)$ функции $\vec{\tilde{x}}(t)$, и отличием начальных или (и) граничных условий, что приводит к появлению множества ветвей $\vec{x}_{\vec{c}/g}^*(t)$ у каждой составляющей $\vec{\tilde{x}}_g^*(t)$.

Поскольку векторный многозначный процесс гиперслучайного типа состоит из многозначных процессов случайного типа, порождаемых дифференциальными уравнениями с разными ядрами, ветви $\vec{x}_{\vec{c}/g}^*(t)$, соответствующие разным составляющим $g\in G$, могут пересекаться и даже совпадать на отдельных участках.

Заметим, что система дифференциальных уравнений первого порядка (16) может быть сведена к одному обыкновенному дифференциальному уравнению N-го порядка. Поэтому N раз дифференцируемый скалярный многозначный процесс гиперслучайного типа $\tilde{x}(t)$, разложимый по ветвям, можно рассматривать как множество частных решений обыкновенного дифференциального уравнения N-го порядка, соответствующих разным начальным или (и) граничным условиям.

5. Описание физических процессов многозначными детерминированными моделями

В статье [8] обращено внимание на то, что существует множество задач, в которых представление данных однозначными детерминированными величинами или функциями в принципе неприемлемо, и приведены примеры задач, в которых применение многозначных детерминированных моделей представляется целесообразным.

Одиночными детерминированными многозначными моделями хорошо описываются многие реальные физические процессы, в частности, представляемые дифференциальными уравнениями с неопределенными (принадлежащими некоторому множеству) начальными или граничными условиями или с неопределенными (принадлежащими некоторому множеству) ядрами (дифференциальными включениями). В отличие от классических дифференциальных включений в предлагаемых моделях используется мера или множество мер, что повышает их информативность. Описанные модели близки к моделям с инвариантной мерой.

Предложенными моделями удобно описывать процессы хаотического типа, неустойчивые по Ляпунову процессы, процессы, в которых нарушена сходимость (нарушение сходимости порождает, как известно [6, 7], неоднозначность), процессы, зависящие от несущественных параметров.

Разрабатываемый подход может быть полезен не только при решении физических и математических задач, в которых многозначность присутствует явно в самой постановке задачи, но и при решении задач, в которых многозначность проявляется в процессе решения.

6. Выводы

1. Акцентировано внимание на том, что математические части теории вероятностей и теории гиперслучайных явлений описывают не только массовые явления, а также одиночные (детерминированные) многозначные явления (события, величины и функции), характеризуемые мерой (в случае теории вероятностей) и множеством мер (в случае теории гиперслучайных явлений).
2. Разработанные в предыдущих работах способы описания и анализа скалярных многозначных детерминированных процессов, характеризуемых мерой и множеством мер, распространены на векторные многозначные детерминированные процессы соответственно случайного и гиперслучайного типов.
3. Для векторных многозначных детерминированных процессов случайного и гиперслучайного типов введены понятия непрерывности, ветви процесса, производной, дифференциала и интеграла. Рассмотрены варианты описания таких процессов с помощью дифференциальных уравнений.
4. Установлено, что N-мерный векторный многозначный процесс случайного типа может быть представлен множеством частных решений обыкновенного дифференциального уравнения N-го порядка, соответствующих разным начальным или граничным условиям, а N-мерный многозначный процесс гиперслучайного типа – множеством частных решений совокупности таких дифференциальных уравнений.
5. Область целесообразного использования разрабатываемого подхода представляется достаточно широкой. Одиночными детерминированными многозначными моделями хорошо описываются многие реальные физические процессы, в частности, представляемые дифференциальными уравнениями с неопределенными (принадлежащими некоторому множеству) начальными или граничными условиями или с неопределенными (принадлежащими некоторому множеству) ядрами (дифференциальными включениями). В отличие от классических дифференциальных включений в предлагаемых моделях используется мера или множество мер, что повышает их информативность. Описанный подход может быть поле-

зен не только при решении физических и математических задач, в которых многозначность присутствует явно в самой постановке задачи, но и при решении задач, в которых многозначность проявляется в процессе решения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Горбань И.И. Теория гиперслучайных явлений / Горбань И.И. – К.: ИПММС НАН Украины, 2007. – 184 с.
2. Горбань И.И. Теория гиперслучайных явлений: физические и математические основы [Электронный режим] / Горбань И.И. – К.: Наукова думка, 2011. – 318 с. – Режим доступа: http://www.immsp.kiev.ua/ perspages/gorban_i_i/Pubications/8.pdf.
3. Горбань И.И. Эволюция представлений о теории вероятностей и теории гиперслучайных явлений / И.И. Горбань // XI междунар. научн.-практ. конф. "Системы поддержки принятия решений. Теория и практика. СППР'2017". – Киев, 2017. – С. 117 – 120.
4. Горбань И.И. Многозначные величины, последовательности и функции / И.И. Горбань // Математичні машини і системи. – 2012. – № 3. – С. 147 – 161.
5. Gorban I.I. Divergent and multiple-valued sequences and functions / I.I. Gorban // Problems of Computer Intellectualization. Book 28. – Kiev–Sofia: ITHEA, 2012. – P. 359 – 374.
6. Горбань И.И. Феномен статистической устойчивости [Электронный режим] / Горбань И.И. – К.: Наукова думка, 2014. – 444 с. – Режим доступа: http://www.immsp.kiev.ua/perspages /gorban_i_i/Pubications/9.pdf.
7. Gorban I.I. The statistical stability phenomenon / Gorban I.I. – Springer, 2017. – 362 p.
8. Горбань И.И. Многозначные детерминированные величины и процессы случайного и гиперслучайного типов / И.И. Горбань // Математичні машини і системи. – 2017. – № 1. – С. 3 – 24.
9. Инвариантная мера [Электронный режим]. – Режим доступа: https://ru.wikipedia.org/wiki/Инвариантная_мера.
10. Корн Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн. – М.: Наука, 1973. – 832 с.
11. Благодатских В.И. Дифференциальные включения и оптимальное управление / В.И. Благодатских, А.Ф. Филиппов // Труды Математического института АН СССР. – 1985. – Т. 169. – С. 194 – 252.

Стаття надійшла до редакції 11.05.2016