УДК 519.816

ПРО УНІВЕРСАЛЬНІСТЬ МЕТОДУ СТРУКТУРНО-АЛФАВІТНОГО ПОШУКУ

Н.К.Тимофієва

Міжнародний науково-навчальний центр інформаційних технологій і систем НАН та МОН України

Tymnad@gmail.com

Наводяться ознаки подібності задач комбінаторної оптимізації, завдяки якій вони розв'язуються одним методом або модифікацією одного і того ж алгоритму. Ця властивість показана на прикладі задач, цільову функцію в яких задано на перестановках. Показано, що методом структурно-алфавітного пошуку одним і тим же алгоритмом розв'язується задача комівояжера, розміщення одногабаритних об'єктів, задача про призначення.
Ключові слова: подібність задач комбінаторної оптимізації, комбінаторна конфігурація, цільова функція, метод структурно-алфавітного пошуку.

The signs of similarity of problems of combinatorial optimization due to which they are untied one method or modification of the same algorithm are pointed. This property is illustrated on the example by the problems, the objective function which is defined on permutations. It is shown that by a structure-alphabetical search method the same algorithm is untie the problem of traveling salesman, a location problem for objects of the same size, the problem of the appointment.
Keywords: Similarity of problems of combinatorial optimization, combinatorial configuration, objective function, structure-alphabetical search method.

Приводятся признаки сходства задач комбинаторной оптимизации, благодаря которой они решаются одним методом или модификацией одного и того же алгоритма. Это свойство показано на примере задач, целевая функция в которых задана на перестановках. Показано, что методом структурно-алфавитного поиска одним и тем же алгоритмом решается задача коммивояжера, размещение одногабаритных объектов, задача о назначениях.
Ключевые слова: Сходство задач комбинаторной оптимизации, комбинаторная конфигурация, целевая функция, метод структурно-алфавитного поиска.

Вступ

В статті наведено універсальний алгоритм розв'язання задач комбінаторної оптимізації, які подібні за аргументом цільової функції. Описаний алгоритм розроблено на основі методу структурно-алфавітного пошуку. Показано, що оптимальний розв'язок для задачі комівояжера, розміщення одногабаритних об'єктів, задачі про призначення знаходиться на множині перестановок. За цією ознакою вони подібні, а тому і розв'язуються за однією і тією ж обчислювальною схемою.

1. Постановка задачі

В комбінаторній оптимізації можна навести багато прикладів, коли задачі з різних класів розв'язуються за однією і тією ж обчислювальною схемою, наприклад [1–5]. Таке явище пов'язане з подібністю задач цього класу. В [6] наведено деякі ознаки, за якими можна встановлювати подібність задач як в комбінаториці так і в комбінаторній оптимізації. За цими ознаками розробляються універсальні алгоритми як для розв'язання задач комбінаторної оптимізації так і для генерування комбінаторних множин. Тому однією з проблем в теорії комбінаторної оптимізації є виявлення властивості подібності цих задач з метою узагальнення та використання для їхнього розв'язання ефективних підходів, які дають можливість знаходити глобальний або наближений до глобального результат.

Нижче наведено універсальний алгоритм розв'язання задачі комівояжера, задачі про призначення, розміщення одногабаритних об'єктів, які подібні за аргументом цільової функції. В основі цього алгоритму покладено метод структурно-алфавітного пошуку.

Виявлення різноманітних ознак, за якими визначається подібність задач комбінаторної оптимізації різних класів, що дозволяє узагальнювати та використовувати для їхнього розв'язання ефективні методи та алгоритми.

2. Загальна математична постановка задачі комбінаторної оптимізації

Наведемо загальну постановку задачі комбінаторної оптимізації [7]. Задачі цього класу, як правило, задаються однією або кількома множинами, наприклад A та B, елементи яких мають будь-яку природу. Назвемо ці множини *базовими*. Наявні два типи задач. В *першому* типі кожну з цих множин подамо у вигляді графа, вершинами якого є її елементи, а кожному ребру поставлено у відповідність число $c_{lt} \in R$, яке називають вагою ребра (R – множина дійсних чисел); $l \in \{1,\dots,n\}$, $t \in \{1,\dots,\tilde{n}\}$, n – кількість елементів множини A, $\tilde{n}$ – кількість елементів множини B. Покладемо, що $n = \tilde{n}$. Між елементами цих множин існують зв'язки, числове значення яких назвемо вагами. Величини c_{lt} назвемо *вхідними* даними та задамо їх матрицями. В *другому* типі задач між елементами заданої множини зв'язків не існує, а вагами є числа $v_j \in R$, $j \in \{1,\dots,n\}$, яким у відповідність поставлено деякі властивості цих елементів, числові значення яких задаються скінченними послідовностями, що також є вхідними даними. Ці величини визначають значення цільової функції.

Для обох типів задач із елементів однієї або кількох із заданих множин, наприклад $a_l \in A$, $l \in \{1,\dots,n\}$, утворюється комбінаторна множина W – сукупність комбінаторних конфігурацій певного типу (перестановки, вибірки різних типів, розбиття тощо). На елементах w комбінаторної множини W вводиться цільова функція $F(w)$. Необхідно знайти елемент w^* множини W, для якого $F(w)$ набуває екстремального значення при виконанні заданих обмежень.

Подамо елементи h наддіагоналей симетричної комбінаторної матриці $Q(w^k)$ комбінаторною функцією $\beta(f(j), w^k)|_1^m = (\beta_1(f(1), w^k),...$ $..., \beta_m(f(m), w^k))$, а елементи h наддіагоналей симетричної матриці C – функцією натурального аргументу $\varphi(j)|_1^m = (\varphi(1),...,\varphi(m))$, де $m = \frac{n(n-1)}{2}$ – кількість елементів h наддіагоналей матриць C та $Q(w^k)$, $h = \overline{1, n-1}$. Верхній індекс k ($k \in \{1,...,q\}$) у w^k позначає порядковий номер w^k у W, q – кількість w^k у W. Якщо матриці $Q(w^k)$ та C – несиметричні, то $\beta(f(j), w^k)|_1^m$ та $\varphi(j)|_1^m$ містять усі їхні елементи, а $m{=}n^2$ (або $m = n\,\tilde{n}$). Сумарне значення функції цілі $F(w^k)$ запишемо як

$$F(w^k) = \sum_{j=1}^{m} \beta_j\,(f\,(j), w^k)\,\varphi\,(j)\,. \tag{1}$$

3. Метод структурно-алфавітного пошуку

Метод структурно-алфавітного пошуку ґрунтується на розпізнаванні вхідної інформації та певному впорядкуванні комбінаторних конфігурцій. В ньому використано відомий розв’язний випадок, який задано двома системами перестановок (d) і (e), на яких уведено цільову функцію $\sum de$ [8]. Для цих систем визначено перестановки, для яких $\sum de$ набуває найбільшого або найменшого значень. Якщо елементи перестановки із системи (d) впорядковані від більшого елемента до меншого, а із (e) – від меншого елемента до більшого, то значення $\sum de$ є глобальним мінімумом. Якщо елементи обох таких перестановок упорядковані від меншого елемента до більшого, то значення $\sum de$ є глобальним максимумом. Цей розв'язний випадок не належить жодному класу із класів задач комбінаторної оптимізації.

З метою використання оговореного розв'язного випадку для розв'язання задач комбінаторної оптимізації методом структурно-алфавітного пошуку встановимо зв'язок між прикладними задачами і оговореним вище розв'язним випадком, увівши системи комбінаторних функцій H і H', де $\beta(f(j), w^k)|_1^m \in H$ – комбінаторна функція, аргументом якої є перестановка $w^k \in W$, утворена з елементів базової множини $A_n = \{a_1,...,a_n\}$, $\beta(f(j), w'^i)|_1^m \in H'$ – комбінаторна функція, аргументом якої є перестановка $w'^i \in W'$, утворена з елементів базової множини $\tilde{A}_m = \{\tilde{a}_1,...,\tilde{a}_m\}$. Якщо $\beta(f(j), w^1)|_1^m = \beta(f(j), w'^1)|_1^m$, де w^1, w'^1 – перші перестановки в W, W' і $\beta(f(j), w^1)|_1^m \in H$, $\beta(f(j), w'^1)|_1^m \in H'$, то $H \subset H'$. Задачу комбінаторної оптимізації, вхідні дані в якій задано функціями $\beta(f(j), w^k)|_1^m$ та $\varphi(j)|_1^m$, назвемо базовою (або задачею системи H). Задачу, вхідні дані в якій задано функціями $\vec{\beta}(f(j), w^{'t})|_1^m$), де $\vec{\beta}(f(j), w^{'t}) \le \vec{\beta}(f(j+1), w^{'t})$, та $\vec{\varphi}(j)|_1^m$, де $\vec{\varphi}(j) \ge \vec{\varphi}(j+1)$, утворених із $\beta(f(j), w^k)|_1^m$ та $\varphi(j)|_1^m$, назвемо упорядкованою (або задачею системи $H^{'}$).

Зв'язок між базовою та упорядкованою задачами сформулюємо у вигляді таких теорем.

Теорема 1 [9]**.** Якщо вхідні дані в задачі системи $H^{'}$ задано комбінаторною та числовою функціями $\beta_j(f(j), \omega^{'1})$, $\varphi(j) \in R$, причому $\varphi(j) \le \varphi(j+1)$, $\beta_j(f(j), w^{'1}) \le \beta_{j+1}(f(j+1), w^{'1})$, то найбільшого значення цільова функція (1) набуває для перестановки $w^{'1} = (m, \dots, 1)$, а найменшого – для $w^{'k} = (m, \dots, 1)$.

Теорема 2 [9]**.** Значення цільової функції для задач комбінаторної оптимізації, аргументом якої є перестановка, знаходиться в межах: $\max\limits_{w^{'i} \in W^{'}} F(w^{'i}) \ge F(w^k) \ge \min\limits_{w^{'t} \in W^{'}} F(w^{'t})$, $k \in \{1,..,n!\}$, $i \ne t$, $i, t \in \{1,..,m!\}$, $w^k \in W$, $w^{'i}, w^{'t} \in W^{'}$.

У разі мінімізації значення цільової функції знаходиться в межах $\min\limits_{w^{'t} \in W^{'}} F(w^{'t}) \le F(w^k) < F^*$. У разі максимізації – в межах

$$F^* < F(w^k) \le \max_{w^{'i} \in W^{'}} F(w^{'i}), \quad \text{де} \quad F^* = \min_{w^{'t} \in W^{'}} F(w^{'t}) + \frac{\max\limits_{w^{'i} \in W^{'}} F(w^{'i}) - \min\limits_{w^{'t} \in W^{'}} F(w^{'t})}{\upsilon},$$

υ – коефіцієнт зменшення області пошуку оптимального значення, який уточнюється в процесі розв'язання певної задачі.

Методом структурно-алфавітного пошуку за розробленими правилами за функціями $\vec{\beta}(f(j), w^{'t})|_1^m$ та $\vec{\varphi}(j)|_1^m$ знаходимо послідовність локальних оптимумів $F = (F(w^1),\dots, F(w^{k*}))$ таких, що $F(w^{k*}) = glob \underset{w^k \in W}{extr} F(w^k)$, де $extr = \{\min, \max\}$, $w^k, w^{k*} \in W$ – перестановки, $k, k^* \in \{1\dots, n!\}$.

4. Подібність задач комбінаторної оптимізації, цільова функція в яких визначена на множині перестановок.

До загальної математичної постановки задачі комбінаторної оптимізації, аргументом цільової функції в якій є перестановка, зводяться задача комівояжера, задача про призначення, задача розміщення одногабаритних об'єктів на поверхні та ін. Цільова функція для них моделюється виразом (1), за яким проводиться оцінка результату. Завдяки цій властивості задачі комбінаторної оптимізації, аргументом цільової функції в яких є перестановка і на підмножині ізоморфних комбінаторних конфігурацій (задача кластеризації) розв'язуються універсальними методами, зокрема методом структурно-алфавітного пошуку, за однією і тією ж схемою. В задачі кластеризації на деяких ізоморфних підмножинах цільова функція змінюється так як і в задачі комівояжера.

Розглянемо задачу комівояжера, задачу про призначення та задачу розміщення одногабаритних модулів.

Задача розміщення одногабаритних об'єктів задається на двох множинах: $A = \{a_1, ..., a_n\}$, елементи a_l відповідають модулям, які необхідно розмістити на заданій поверхні, та $B = \{b_1,...,b_{\tilde{n}}\}$, кожен елемент b_s якого визначає посадочне місце для розміщення $a_l \in A$, $n \le \tilde{n}$. Покладемо, що $n = \tilde{n}$. Зв'язки існують між елементами $a_r, a_l \in A$, кількісне значення яких задамо симетричною матрицею C (відповідно функцією $\varphi(j)|_1^m$), та між елементами $b_s, b_t \in B$, значення яких опишемо комбінаторною симетричною матрицею транспозиції $Q(w^k)$ (або функцією $\beta(f(j), w^k)|_1^m$). В результаті, значення цільової функції зводиться до виразу (1), а її аргумент – перестановка.

Задача про призначення задається на двох множинах: $A=\{a_1,...,a_n\}$, де $a_j \in A$ відповідає j-му претенденту, та $B=\{b_1, ..., b_n\}$, де $b_l \in B$ відповідає l-й посаді. Між елементами $a_j \in A$ та $b_l \in B$ визначено зв'язки. Задамо їх несиметричною матрицею транспозиції $Q(w^k)$ (функцією $\beta(f(j), w^k)|_1^m$). Для визначення належності a_j-го претендента на b_l-ту посаду для w^k-го варіанту розв'язку задачі уведемо несиметричну (0,1)-матрицю C (функція $\varphi(j)|_1^m$). Звідси випливає, що цільова функція зводиться до виразу (1), а її аргумент – перестановка.

Задача комівояжера задається на одній множині, яку позначимо $A = \{a_1, ..., a_n\}$, де елемент a_j відповідає j-му місту. Зв'язки між $a_j, a_l \in A$ задамо симетричною матрицею транспозиції $Q(w^k)$ (функція $\beta(f(j), w^k)|_1^m$). Уведемо симетричну (0,1)-матрицю C (функція $\varphi(j)|_1^m$), у якій елемент $c_{jl} = 1$, якщо елементи a_j, a_l для варіанту розв'язку задачі w^k мають між собою зв'язки, та $c_{lj}=0$ в іншому випадку. Цільова функція в цій задачі задається виразом (1). Пошук оптимального розв'язку проводиться на множині перестановок.

Наведемо обчислювальну схему пошуку глобального мінімуму для задачі комівояжера, задачі про призначення та розміщення одногабаритних модулів. Глобальний максимум знаходиться аналогічно.

1. Задання вхідної інформації.

1.1. Якщо необхідно розв'язати задачу комівояжера, то вхідні дані задаються симетричною матрицею $Q(w^k)$. Уведемо (0,1)-матрицю C. За описаними вище правилами утворюються скінченні послідовності (функція $\beta(\ f\ (\ j\ ),\ w^k\ )|_1^m$ та функція $\varphi(\ j\ )\ |_1^m$). Перехід до п. 2. В іншому разі – перехід до п. 1.2.

1.2. Якщо необхідно розв'язати задачу розміщення одногабаритних об’єктів, вхідні дані задаються симетричною матрицею $Q(w^k)$, та симетричною матрицею C. За описаними вище правилами утворюються скінченні послідовності (функція $\beta(\ f\ (\ j\ ),\ w^k\ )|_1^m$ та функція $\varphi(\ j\ )\ |_1^m$). Перехід до п. 2. В іншому разі – перехід до п. 1.3.

1.3. Якщо необхідно розв'язати задача про призначення, вхідні дані задаються двома несиметричними матрицями $Q(w^k)$, та матрицею C. За описаними вище правилами утворюються скінченні послідовності (функція $\beta(\ f\ (\ j\ ),\ w^k\ )|_1^m$ та функція $\varphi(\ j\ )\ |_1^m$). Перехід до п. 2. В іншому разі – вважаємо, що вхідні дані не задано, переходимо до п. 10.

2. Базову задачу комбінаторної оптимізації зведемо до упорядкованої, задавши в ній вхідні дані функціями $\vec{\beta}(\ f\ (\ j\ ),\ w^{'t}\ )|_1^m$ та $\bar{\varphi}(\ j\ )\ |_1^m$. Перейдемо до п. 3.

3. Уведемо множини F, J, P, де F – множина значень локальних мінімумів, P – множина побудованих перестановок, l-му елементу якої відповідає l-те значення локального мінімуму із F, J – множина номерів позицій значень комбінаторної функції, для яких знайдено локальний мінімум. Покладемо $k=1$, $l=1$. Величина k вказує на порядковий номер перестановки $w^k \in W$, що будується, а l – порядковий номер перестановки у множині P (відповідно значення локального мінімуму у множині F та номера позицій значень комбінаторної функції у множині J). Перехід до п. 4.

4. За функцією $\vec{\beta}(\ f\ (\ j\ ),\ w^{'t}\ )|_1^m$ за розробленими правилами будуємо перестановку $w^k \in W$. Якщо $w^k \in W$ не змінила порядок значень у

$\vec{\beta}(f(j), w'^{t})|_1^m$, у множину F заносимо знайдену за виразом (1) величину $F(w^k)$, а в P – відповідно $P_l = w^k$, переходимо до п. 6. В іншому разі покладаємо $F^* = F(w^k)$, $w^{k*} = w^k$. Перехід до п. 5.

5. Знайдемо поточний локальний мінімум. Покладаємо $j = 1$, $\tilde{j} = 1$, $s = 1$, $j_s = j$, $p = 0$. Величина j – номер позиції значення $\vec{\beta}(f(j), w'^{t})$, з якої продовжується побудова перестановки, j_s – номер позиції значення комбінаторної функції, з якої починається будуватися чергова перестановка, $\tilde{j}$ – номер позиції значення комбінаторної функції, для якої знаходиться локальний мінімум, p – коефіцієнт, який визначає перехід до пошуку чергового локального мінімуму. Переходимо до п. 6.

6. Покладаємо $k = k + 1$. Побудова чергової перестановки проводиться за значеннями комбінаторної функції, починаючи з $\vec{\beta}(f(j_r), w'^{t})$ за правилами, описаними нижче у п. п. 6.1–6.3. Якщо $l = 1$, то $j_r = j_s$, в іншому разі $j_r = J_r$, $J_r \in J$, $r = \overline{1, l-1}$.

6.1. Якщо розв’язується задача розміщення одногабаритних модулів, перехід до п. 6.2. Якщо розв’язується задача комівояжера – перехід до п. 6.3. Якщо розв’язується задача про призначення, перехід до п. 6.4.

6.2. Для задачі розміщення визначаємо адресу x, y матриці $Q(w^k)$, де знаходиться значення $\vec{\beta}(f(j), w'^{t})$. Величини x, y – елементи перестановки $w^k \in W$. Номери позицій цих елементів у перестановці визначаються номерами стовпця та рядка, де знаходиться значення $\bar{\varphi}(j)$, на яке перемножується значення $\vec{\beta}(f(j), w'^{t})$. Переходимо до п. 6.5.

6.3. Для задачі комівояжера номери рядка і стовпця матриці $Q(w^k)$, на перетині яких знаходиться $\vec{\beta}(f(j), w'^{t})$, є елементами перестановки. Переходимо до п. 6.5.

6.4. У задачі про призначення транспозиція проводиться або рядків або стовпців, тому x вважаємо елементом перестановки, а y – номером позиції елемента перестановки. Переходимо до п. 6.5.

6.5. Покладаємо $j = j + 1$. Якщо $j > m$ або перестановка уже побудована, переходимо до п. 7. В іншому разі – до п. 6.6.

6.6. Якщо для значення $\vec{\beta}(f(j), w'^{t})$ елементи перестановки w^k уже визначено, переходимо до п. 6.5, в іншому разі – до п. 6.1.

7. Для одержаної перестановки w^k знаходимо значення цільової функції $F(w^k)$. Якщо $F(w^k) \geq F^*$ і $k > n^2/2$, переходимо до п. 6. Якщо $F(w^k) \geq F^*$ і $k \leq n^2/2$, покладаємо $p = p + 1$. Якщо $p > \varpi$, переходимо до п. 8 (ϖ – коефіцієнт, що визачає глибину пошуку оптимального розв'язку). В іншому разі покладаємо $j_s = j_s + 1$, переходимо до п. 6. Якщо $F(w^k) < F^*$ і $k \leq n^2/2$, покладаємо $F^* = F(w^k)$, $w^{k*} = w^k$, $\tilde{j} = j_s$, $j_s = j_s + 1$, $j = j_s + 1$, $p = 0$, переходимо до п. 6.

8. Якщо досліджено околи знайдених локальних мінімумів, переходимо до п. 9. В іншому разі покладаємо $F_l = F*$, $P_l = w^{k*}$, $J_l = \tilde{j}$, $l = l + 1$, $j = j_s + 2$, $j_s = j_s - (p - 1)$, $s = s + 1$, $p = 0$. Переходимо до п. 6.

9. За оптимальний розв'язок, який може збігатися з глобальним, приймаємо $w^k \in W$, для якої цільова функція із множини F набуває найменшого значення.

10. Кінець роботи алгоритму.

Висновки.

Отже, універсальність методів та алгоритмів визначається подібністю задач комбінаторної оптимізації. Для її встановлення при моделюванні прикладних задач необхідно виявити спільні для них ознаки. Це дозволяє розв’язувати задачі різних класів одним і тим же методом або модифікацією одного і того ж алгоритму. Так, методом структурно-алфавітного пошуку за однією і тією ж обчислювальною схемою розв’язуються задача комівояжера, задача про призначення та задача розміщення одногабаритних об’єктів. Вони подібні за аргументом цільової функції, яким є для них перестановка.

Виявлення ознак, за якими встановлюється подібність задач комбінаторної оптимізації різних класів дозволить значну їхню частину звести до невеликого числа стандартних схем, можливо канонічних форм. Це дасть змогу розробляти адекватні математичні моделі та вибирати або розробляти для їхнього розв'язання ефективні універсальні методи та алгоритми.

Література

1. Рейнгольд Э. Комбинаторные алгоритмы. Теория и практика / Пер. с англ. / Э. Рейнгольд, Ю. Нивергельт, Н. Део. – М.: Мир, 1980. – 476 с.

2. Липский В. Комбинаторика для программистов / Пер. с польск. / В. Липский – М.: Мир, 1988.– 213 с.

3. Пападимитриу Х. Комбинаторная оптимизация. Алгоритмы и сложность / Пер. с англ. / Х. Пападимитриу, К. Стайглиц. – М.: Мир, 1985.– 510 с.

4. Сергиенко И.В. Модели и методы решения на ЭВМ комбинаторных задач оптимизации / И.В. Сергиенко, М.Ф. Каспшицкая. – К.: Наук. думка, 1981.– 281 с.

5. Беллман Р. Динамическое программирование / Пер. с англ. / Р. Беллман –М.: Изд-во иностранной литературы, 1960. – 400 с.

6. Тимофієва Н.К. Про подібність задач комбінаторної оптимізації та універсальність алгоритмів / Н.К. Тимофієва // Системні дослідження та інформаційні технології. – 2013. – № 4. – С. 27–37.

7. Тимофієва Н.К. Теоретико-числові методи розв'язання задач комбінаторної оптимізації. Автореф. дис... докт. техн. наук / – Ін-т кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, Київ. – 2007. – 32 с.

8. Харди Г.Г. Неравенства / Пер. с англ. / Г.Г. Харди, Дж.Е. Литтльвуд, Г. Полиа. – М.: Гос. из-во иностр. лит., 1948. – 456 с.

9. Тимофеева Н.К. Определение множества значений целевой функции в задачах дискретной оптимизации // Кибернетика и вычислительная техника. Сложные системы управления: Сб. науч. тр. – К., 1998 .– Вып. 120. – С. 37–43.