КИБЕРНЕТИКА

В.Н. РЕДЬКО, Д.Б. БУЙ, А.С. СЕНЧЕНКО

УДК 004.655

ОБ ИНВАРИАНТНОСТИ КЛЮЧЕЙ ОТНОСИТЕЛЬНО ОПЕРАЦИЙ ТАБЛИЧНЫХ АЛГЕБР

Аннотация. Исследована задача инвариантности ключей, в том числе и простых, относительно операций табличных алгебр — современного аналога классических реляционных алгебр Кодда. Показано, что ключи инвариантны относительно операций пересечения, разности, селекции, соединения и деления, при этом для простых ключей инвариантность не выполняется, а также что относительно переименования инвариантны как ключи, так и простые ключи. Найдены необходимые и достаточные условия, при которых ключи, в том числе и простые, инвариантны относительно операций активного дополнения и проекции. Результаты работы представляют теоретический и практический интерес и могут использоваться для выбора оптимальных ключей при проектировании реляционных баз данных.

Ключевые слова: база данных, табличная алгебра, ключ.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время информационные системы широко используются практически во всех областях деятельности человека. Базы данных являются ядром для большинства информационных систем. При всем разнообразии типов баз данных наиболее распространены реляционные (табличные), математическую модель которых впервые предложил Э. Кодд [1, 2]. С математической точки зрения реляционная база данных является конечным множеством конечных отношений различной арности между заранее определенными множествами элементарных данных, т.е. реляционная база данных — конечная модель.

Табличные алгебры [3] построены на основе реляционных алгебр Кодда и существенно их развивают. Они составляют теоретический фундамент языков запросов современных табличных баз данных. Элементы носителя табличной алгебры уточняют реляционные структуры данных, а сигнатурные операции построены на базе основных табличных манипуляций в реляционных алгебрах и SQL-подобных языках.

В реляционных базах данных важную роль играют ключи таблицы — один или несколько ее атрибутов, на значениях которых записи таблицы однозначно идентифицируются. С помощью ключей (первичных и внешних) устанавливаются бинарные связи типа «один-ко-многим», предназначенные для поддержания целостности баз данных. Как правило, ключи определяются таким образом, чтобы они были инвариантны к любым изменениям записей в базе данных. В настоящей работе рассмотрен вопрос инвариантности ключей относительно сигнатурных операций табличных алгебр. Полученные результаты важны для выбора оптимальных ключей при проектировании баз данных [4, 5].

ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Зафиксируем некоторое непустое множество атрибутов $\mathfrak{A} = \{A_1, \ldots, A_n\}$. Произвольное конечное подмножество множества $\mathfrak{A}$ назовем схемой, причем она может быть пустым множеством. Строкой s схемы R называется множество пар $s = \{(A_1', d_1), \ldots, (A_k', d_k)\}$, проекция которого по первой компоненте равна R, причем атрибуты $A_1', \ldots, A_k'$ попарно различны, т.е. строка является функциональным бинарным отношением. Таблица T схемы R ($T(R)$) — конечное множество строк схемы R, количество строк в таблице T обозначим $|T|$. Таблицу T' назовем подтаблицей таблицы T, если $T' \subseteq T$. Далее рассмотрим таблицы схемы R с количеством атрибутов k. На множестве всех таких таблиц введены операции объединения $(\underset{R}{\bigcup})$, пересечения $(\underset{R}{\bigcap})$ и разности $(\underset{R}{-})$ таблиц как ограничения одноименных теоретико-множественных операций.

Для введения операции насыщения определим вспомогательное понятие. Активным доменом атрибута A относительно таблицы T называется множество $D_{A,T} = \{d | \exists s \in T \wedge (A, d) \in s\}$ [6], состоящее из всевозможных значений атрибута A в таблице T (если атрибут не входит в схему таблицы, то его активный домен пуст). Атрибуты таблицы, мощность активных доменов которых больше единицы, назовем многозначными, в противном случае — однозначными.

Насыщением $C(T)$ называется таблица $\prod_{A \in R} D_{A,T}$, где R — схема таблицы, а $\prod$ — оператор обобщенного прямого (декартового) произведения, соответствующий индексированию $A \mapsto D_{A,T}$, $A \in R$ [7]. Отметим, что в обозначениях [3, 8] выполняется равенство $C(T) = \underset{A \in R}{\otimes} \pi_{\{A\}}(T)$; кроме того, насыщение является аналогом прямоугольного замыкания конечноместного отношения [9].

Активным дополнением таблицы T называется таблица $\widetilde{T} = C(T) \underset{R}{-} T$ (отметим, что $T \subseteq C(T)$).

Проекцией по множеству атрибутов $X \subseteq R$ называется унарная параметрическая операция π_X, значением которой является таблица, состоящая из ограничений по X всех строк исходной таблицы $\pi_X(T) = \{s | X \ | s \in T\}$. Здесь ограничение понимается стандартно $s| X = s \bigcap (X \times \mathrm{pr}_2 s)$, где $\mathrm{pr}_2 s$ — проекция строки s по второй компоненте. Любое ограничение s' строки s будем называть ее подстрокой, и очевидно, что $s' \subseteq s$.

Селекцией по предикату $P: S \to \{\mathrm{true}, \mathrm{false}\}$, где S — множество всех строк, называется унарная параметрическая операция σ_P, которая таблице сопоставляет ее подтаблицу, содержащую строки, на которых предикат P принимает истинные значения: $\sigma_P(T) = \{s | s \in T \wedge P(s) = \mathrm{true}\}$.

Для введения операции соединения определим вспомогательное понятие. Бинарные отношения ρ и τ называются совместными $\rho \approx \tau$, если $\rho | X = \tau | X$, где $X = \mathrm{pr}_1 \rho \bigcap \mathrm{pr}_1 \tau$ [8]. Соединением называется бинарная операция $\otimes$, значением которой является таблица, состоящая из всевозможных объединений совместных строк исходных таблиц, т.е. $T_1 \otimes T_2 = \{s_1 \bigcup s_2 | s_1 \in T_1 \wedge s_2 \in T_2 \wedge s_1 \approx s_2\}$.

Для таблицы T, все однозначные атрибуты которой образуют множество $O = \{O_1, \ldots, O_z\}$, причем $D_{O_1,T} = \{o_1\}, \ldots, D_{O_z,T} = \{o_z\}$, выполняется непосредственно проверяемое равенство $T = \pi_Y(T) \otimes T'$, где $Y = R - O$ и $T' = \begin{matrix} O_1 & \ldots & O_z \\ o_1 & \ldots & o_z \end{matrix}$, т.е. $T' = \{\{(O_i, o_i) | i = \overline{1, z}\}\}$ — соответствующая однострочная таблица.

Пусть R_1 — схема таблицы T_1, R_2 — схема таблицы T_2 и $R_2 \subseteq R_1$. Деление T_1 на T_2 — таблица схемы $R_1 - R_2$ такая, что $T_1 \underset{R_2}{\overset{R_1}{\div}} T_2 = \{s \in \pi_{R_1 - R_2}(T_1) | \{s\} \otimes T_2 \subseteq T_1\}$.

Переименование — унарная параметрическая операция RT_ξ, где ξ — инъективное отображение на R, осуществляющая переименование атрибутов таблицы в соответствии с ξ. Применение этой операции сводится к переименованию первых компонент пар — элементов строк.

Табличной алгеброй называется частичная алгебра с носителем — множеством всех таблиц произвольной схемы, и приведенными ранее операциями (насыщение рассматривается как вспомогательная операция).

В качестве сигнатурных в табличной алгебре выделяют две особые таблицы: $T_\varepsilon = \{\varepsilon\}$, где ε — пустая строка (пустое множество, интерпретируемое как всюду неопределенная функция), а схема таблицы T_ε — пустое множество; $T_\varnothing = \varnothing$ — пустое множество строк произвольной схемы. Таблица T не является особой и называется ненасыщенной, если выполняется неравенство $\widetilde{T} \neq T_\varnothing$ (очевидно, это эквивалентно строгому включению $T \subset C(T)$).

Множество атрибутов $K \subseteq R$ называется ключом (точнее, первичным ключом (primary key)) таблицы T, если для любых строк $s_1, s_2 \in T$ выполняется импликация $s_1|K = s_2|K \to s_1 = s_2$; другими словами, ограничения по атрибутам ключа всех строк таблицы T попарно различны.

Ключ K называется простым ключом таблицы T, если никакое его собственное подмножество не является ключом T. Поскольку схема таблицы тоже является ее ключом, то наибольший интерес представляют так называемые нетривиальные ключи — собственные подмножества схемы таблицы.

Ключом таблицы $T_\varnothing$ будет любое подмножество атрибутов, а простым ключом — пустое множество. Для таблицы T_ε ключом (в том числе и простым) будет пустое множество (T_ε имеет единственный ключ $\varnothing$). На практике в реальных базах данных особая таблица T_ε не используется, поэтому для удобства изложения и доказательства результатов рассмотрим таблицы, которые не являются особыми, при этом большинство результатов справедливо и для таблицы $T_\varnothing$.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Поскольку ключи играют важную роль в реляционных базах данных, естественен вопрос об инвариантности нетривиальных ключей (в том числе и простых) относительно операций табличных алгебр. Справедливо очевидное полезное утверждение.

Лемма 1. Пусть K — ключ таблицы T. Тогда K — ключ любой таблицы $T' \subseteq T$. ■

Далее перейдем к рассмотрению инвариантности ключей относительно каждой операции табличных алгебр.

Операции пересечения, объединения, разности, селекции и переименования. Операция пересечения сохраняет ключи, но не сохраняет простых ключей.

Предложение 1 (инвариантность ключей относительно пересечения). Пусть K — ключ таблиц $T_1(R)$ и (или) $T_2(R)$. Тогда K — ключ таблицы $T_1 \underset{R}{\cap} T_2$. Если K — простой ключ для T_1 и T_2, то K, вообще говоря, не является простым ключом таблицы $T_1 \underset{R}{\cap} T_2$. ■

Операция объединения не сохраняет ключей, т.е. в случае, когда K — ключ таблиц $T_1(R)$ и $T_2(R)$, то K может не являться ключом таблицы $T_1 \underset{R}{\cup} T_2$.

Операция разности сохраняет ключи, но не сохраняет простых ключей.

Предложение 2 (инвариантность ключей относительно разности). Пусть T_1, T_2 — таблицы схемы R и K — ключ для T_1. Тогда K — ключ таблицы $T_1 \underset{R}{-} T_2$. Если K — простой ключ для T_1, то K, вообще говоря, не является простым ключом для $T_1 \underset{R}{-} T_2$. ■

Операция селекции сохраняет ключи, но не сохраняет простых ключей.

Предложение 3 (инвариантность ключей относительно селекции). Пусть K — ключ таблицы T. Тогда K — ключ таблицы $\sigma_P(T)$. Если K является простым ключом таблицы T, то K, вообще говоря, не является простым ключом для $\sigma_P(T)$. ■

В предложениях 1 – 3 инвариантность ключей относительно операций следует из леммы 1, а несохранение простых ключей несложно показать на примерах.

Поскольку операция переименования не изменяет значения атрибутов, она сохраняет ключи и простые ключи.

Предложение 4 (инвариантность ключей относительно переименования). Пусть K — ключ (простой ключ) таблицы T и пусть $\xi[K]=\{\xi(A)|\, A\in K\}$. Тогда $\xi[K]$ является ключом (простым ключом) таблицы RT_ξ. ■

Таким образом, полный образ ключа (простого ключа) исходной таблицы является ключом (простым ключом) переименованной таблицы.

Операция активного дополнения. Найдем (в терминах активных доменов атрибутов таблиц) необходимые и достаточные условия, при которых нетривиальные ключи для ненасыщенных таблиц T и $\widetilde{T}$ совпадают. Требование ненасыщенности необходимо во избежание случая $\widetilde{T}=T_\varnothing$, при котором ключом таблицы $T_\varnothing$ является любое множество атрибутов. Вначале сформулируем этот критерий для таблиц, у которых все атрибуты многозначные.

Теорема 1 (инвариантность ключей относительно активного дополнения для таблиц без однозначных атрибутов). Пусть $K=\{K_1,\ldots,K_q\}$ — нетривиальный ключ для ненасыщенной таблицы $T(R)$ с многозначными атрибутами. При этом K является ключом таблицы $\widetilde{T}$ тогда и только тогда, когда одновременно выполняются три условия:

а) выполняется равенство $|R-K|=1$;

б) для единственного атрибута B, принадлежащего множеству $R-K$, выполняется равенство $|D_{B,T}|=2$;

в) для всех $d_1\in D_{K_1,T},\ldots,d_q\in D_{K_q,T}$ строка $s'=\{(K_1,d_1),\ldots,(K_q,d_q)\}\in\pi_K(T)$, причем существует только одна такая строка $s\in T$, что $s'=s|\{K_1,\ldots,K_q\}$.

Доказательство. Достаточность. Пусть для таблицы T одновременно выполняются условия а)–в). Обозначим $R-K=\{B\}$; $D_{B,T}=\{b_1,b_2\}$. Заметим также, что ввиду выполнения условия а), выполняется равенство $q=n-1$, где $n=|R|$. Поскольку K — ключ таблицы T, из выполнения условия в) следует, что таблица T состоит из строк вида $\{(K_1,d_1),\ldots,(K_{n-1},d_{n-1}),(B,b)\}$, где $d_1,\ldots,d_{n-1}$ — всевозможные значения активных доменов $D_{K_1,T},\ldots,D_{K_{n-1},T}$, и для каждого такого набора значений $d_1,\ldots,d_{n-1}$ элемент b может принимать только одно значение: b_1 или b_2. При этом отметим, что ввиду выполнения условия б), существуют такие $d',d''\in D_{K_1,T},\ldots,d'_{n-1},d''_{n-1}\in D_{K_{n-1},T}$, что $\{(K_1,d'_1),\ldots,(K_{n-1},d'_{n-1}),(B,b_1)\}\in T$ и $\{(K_1 d''_1),\ldots,(K_{n-1},d''_{n-1}),(B,b_2)\}\in T$. В этом случае по определению насыщения $C(T)$ состоит из строк вида $\{(K_1,d_1),\ldots,(K_{n-1},d_{n-1}),(B,b_1)\}$, $\{(K_1,d_1),\ldots$ $\ldots,(K_{n-1},d_{n-1}),(B,b_2)\}$. Тогда $\widetilde{T}=C(T)\underset{R}{-}T$ состоит из всех строк вида $\{(K_1,d_1),\ldots$ $\ldots,(K_{n-1},d_{n-1}),(B,b')\}$, причем если в таблице T в строке $\{(K_1,d_1),\ldots,(K_{n-1},d_{n-1}),$ $(B,b)\}$ значение элемента $b=b_1$, то $b'=b_2$, и наоборот, если $b=b_2$, то $b'=b_1$. При этом для каждого такого набора значений $d_1,\ldots,d_{n-1}$ в таблице $\widetilde{T}$ элемент b' может принимать только одно значение: b_1 или b_2. Таким образом, ограничения по K для всех строк таблицы $\widetilde{T}$ попарно различны, следовательно K является ключом таблицы $\widetilde{T}$, что доказывает достаточность.

Докажем теперь необходимость условий теоремы. Пусть K — нетривиальный ключ таблиц T и $\widetilde{T}$. Покажем, что в этом случае должны одновременно выполняться условия а) – в). От противного, допустим, что условие а) не выполняется, т.е. множество $R-K$ содержит хотя бы два элемента. Пусть $R-K=\{B_1,\dots,B_{n-q}\}$. Поскольку все атрибуты таблицы T многозначны, каждый активный домен каждого атрибута из множества $R-K$ содержит как минимум два элемента. Положим $D_{B_1,T}=\{b_1^1,b_2^1,\dots,b_{p_1}^1\},\dots,D_{B_{n-q},T}=\{b_1^{n-q},b_2^{n-q},\dots,b_{p_{n-q}}^{n-q}\}$. Пусть $s=\{(K_1,d_1),\dots,(K_q,d_q),(B_1,b_{x_1}^1),\dots,(B_{n-q},b_{x_{n-q}}^{n-q})\}$ — произвольная строка таблицы T. Поскольку каждое множество $D_{B_1,T},\dots,D_{B_{n-q},T}$ содержит более одного элемента, существуют такие $b_{y_1}^1\in D_{B_1,T},\dots,b_{y_{n-q}}^{n-q}\in D_{B_{n-q},T}$, что $b_{x_1}^1\neq b_{y_1}^1,\dots,b_{x_{n-q}}^{n-q}\neq b_{y_{n-q}}^{n-q}$. При этом строки $s'=\left\{(K_1,d_1),\dots,(K_q,d_q),\left(B_1,b_{y_1}^1\right),\dots,\left(B_{n-q},b_{y_{n-q}}^{n-q}\right)\right\}$ и $s''=\left\{(K_1,d_1),\dots,(K_q,d_q),\left(B_1,b_{x_1}^1\right),\left(B_1,b_{y_2}^2\right),\dots,\left(B_{n-q},b_{y_{n-q}}^{n-q}\right)\right\}$ принадлежат насыщению $C(T)$. Однако ввиду того, что K — ключ таблицы T, $s|K=s'|K=s''|K$, $s'\neq s$ и $s''\neq s$, строки s' и s'' не могут принадлежать T. Тогда по определению активного дополнения $s',s''\in\widetilde{T}$, следовательно, в этом случае K не является ключом таблицы $\widetilde{T}$. Противоречие доказывает необходимость условия а).

От противного, допустим, что условие б) не выполняется, т.е. активный домен хотя бы одного атрибута множества $R-K$ содержит более двух элементов. Для удобства обозначений ввиду доказанной ранее необходимости условия а) положим $R-K=\{B\}$ и $D_{B,T}=\{b_1,b_2,b_3,\dots,b_z\}$. Пусть $s=\{(K_1,d_1),\dots,(K_q,d_q),(B,b)\}$ — произвольная строка таблицы T. Тогда существуют такие различные значения $b',b''\in D_{B,T}$, что $b\neq b'$ и $b\neq b''$. При этом строки $s'=\{(K_1,d_1),\dots,(K_q,d_q),(B,b')\}$ и $s''=\{(A_1',d_1),\dots,(A_q',d_q),(B,b'')\}$ принадлежат $C(T)$. Однако ввиду того, что K — ключ для T, $s|K=s'|K=s''|K$, $s'\neq s$ и $s''\neq s$, строки s' и s'' не могут принадлежать T, значит, они принадлежат $\widetilde{T}$, в этом случае K не является ключом таблицы $\widetilde{T}$. Противоречие доказывает необходимость условия б).

От противного, допустим, что не выполняется условие в). Для удобства обозначений ввиду доказанной ранее необходимости условий а) и б) положим $R-K=\{B\}$ и $D_{B,T}=\{b_1,b_2\}$, при этом значение индекса $q=n-1$. Если существуют такие значения $d_1\in D_{K_1,T},\dots,d_q\in D_{K_q,T}$, что $s=\{(K_1,d_1),\dots,(K_q,d_q)\}\notin\pi_K(T)$, то из определения проекции $s\notin T$ следует $s_1=\{(K_1,d_1),\dots,(K_{n-1},d_{n-1}),(B,b_1)\}\notin T$ и $s_2=\{(K_1,d_1),\dots,(K_{n-1},d_{n-1}),(B,b_2)\}\notin T$. Тогда ввиду $s_1,s_2\in C(T)$ выполняется $s_1,s_2\in\widetilde{T}$. Однако из того, что $s'|K=s''|K$ и $s_1\neq s_2$ следует, что K не является ключом для $\widetilde{T}$. Если существуют такие строки $s_1\neq s_2$, что $s_1|K=s_2|K$, то K не является ключом для T. Противоречие доказывает необходимость условия в). ■

Применим критерий инвариантности ключей для таблиц с однозначными атрибутами. Пусть $O=\{O_1,\dots,O_z\}$ — множество всех однозначных атрибутов таблицы T и пусть $D_{O_1,T}=\{o_1\},\dots,D_{O_z,T}=\{o_z\}$. Обозначим $Y=R-O$ и $T'=\begin{matrix}O_1 & \dots & O_z\\ o_1 & \dots & o_z\end{matrix}$. Тогда из определения соединения и активного дополнения очевидно следует равенство $\widetilde{T}=\left(\widetilde{\pi_Y(T)}\right)\otimes T'$, поэтому однозначные атрибуты не влияют на условие а) теоремы 1.

Следствие 1 (инвариантность ключей относительно активного дополнения для таблиц с однозначными атрибутами). Пусть $K=\{K_1,\ldots,K_q\}$ — нетривиальный ключ для ненасыщенной таблицы $T(R)$. Причем K является ключом таблицы $\widetilde{T}$ тогда и только тогда, когда одновременно выполняются три условия:

— множество $R-K$ содержит в точности один многозначный атрибут;

— для единственного многозначного атрибута $B\in R-K$ выполняется равенство $|D_{B,T}|=2$;

— для всех $d_1\in D_{K_1,T},\ldots,d_q\in D_{K_q,T}$ строка $s'=\{(K_1,d_1),\ldots,(K_q,d_q)\}\in\pi_K(T)$, причем существует только одна такая строка $s\in T$, что $s'=s|\{K_1,\ldots,K_q\}$. ■

Следствие 2 (инвариантность простых ключей относительно активного дополнения). При выполнении условия в) из теоремы 1 (либо последнего условия из следствия 1) K является простым ключом таблиц T и $\widetilde{T}$. ■

Операция проекции. Пусть K — ключ таблицы T и $X\subset R$ (отметим, что случай $X=R$ тривиальный, поскольку $\pi_R(T)=T$). Определим, является ли K ключом таблицы $\pi_X(T)$. Рассмотрим все возможные случаи относительно включения множеств X и K с точки зрения сохранения инвариантности ключа относительно проекции: 1) $K\subseteq X$; 2) $X\subset K$; 3) $K\cap X=\varnothing$; 4) не выполняется ни один из случаев 1–3.

В случае 1 покажем, что K — ключ таблицы $\pi_X(T)$; в случае 2 очевидно, что множество X — тривиальный ключ таблицы $\pi_X(T)$; в случае 3 не существует логической связи между ключами таблиц T и $\pi_X(T)$; в случае 4 множество $K\cap X$ не является ключом таблицы $\pi_X(T)$, что можно показать на примере.

Рассмотрим случай 1, при котором выполняется включение $K\subseteq X$, тогда сохраняются и ключи, и простые ключи. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2 (инвариантность ключей относительно проекции). Пусть K — ключ таблицы T и $K\subseteq X$. Тогда K является ключом таблицы $\pi_X(T)$.

Доказательство. Пусть $K=X$. Тогда K является тривиальным ключом таблицы $\pi_K(T)$. Пусть теперь $K\neq X$, т.е. $K\subset X$. От противного, допустим, что K не является ключом для $\pi_X(T)$, значит, существуют такие строки $s',s''\in\pi_X(T)$, что $s'\neq s''$ и $s'|K=s''|K$. Обозначим $K=\{K_1,\ldots,K_q\}$, $X-K=\{X_1,\ldots,X_p\}$, $R-X=\{B_1,\ldots,B_z\}$, при этом множества $X-K$ и $R-X$ непустые. Пусть также $s'=\{(K_1,k'_1),\ldots,(K_q,k'_q),(X_1,x'_1),\ldots,(X_p,x'_p)\}$ и $s''=\{(K_1,k''_1),\ldots,(K_q,k''_q),(X_1,x''_1),\ldots,(X_p,x''_p)\}$. Тогда из равенства $s'|K=s''|K$ следует выполнение равенств $k'_1=k''_1,\ldots,k'_q=k''_q$, а из неравенства $s'\neq s''$ — выполнение хотя бы одного из неравенств:

$$x'_1\neq x''_1,\ldots,x'_p\neq x''_p. \qquad (1)$$

По определению проекции существуют непустые множества $S_1=\{s_1\in T|s'\subset s_1\}$ и $S_2=\{s_2\in T|s''\subset s_2\}$. Пусть $s_1=\{(K_1,k'_1),\ldots,(K_q,k'_q),(X_1,x'_1),\ldots,(X_p,x'_p),(B_1,b'_1),\ldots$ $\ldots,(B_z,b'_z)\}\in S_1$ и $s_2=\{(K_1,k''_1),\ldots,(K_q,k''_q),(X_1,x''_1),\ldots,(X_p,x''_p),(B_1,b''_1),\ldots,(B_z,b''_z)\}\in S_2$. Из равенств $k'_1=k''_1,\ldots,k'_q=k''_q$ следует равенство $s_1|K=s_2|K$, а поскольку K — ключ таблицы T, из $s_1|K=s_2|K$ следует $s_1=s_2$, поэтому выполняются равенства $x'_1=x''_1,\ldots,x'_p=x''_p$, что противоречит (1), следовательно, допущение неверно. ■

Теорема 3 (инвариантность простых ключей относительно проекции). Пусть K — простой ключ таблицы T и $K\subseteq X$. Тогда K является простым ключом таблицы $\pi_X(T)$.

Доказательство. Теорема 2 показывает, что K — ключ таблицы $\pi_X(T)$. От противного, допустим, что K не является простым ключом таблицы $\pi_X(T)$, т.е. существует такое $K'\subset K$, что K' — ключ таблицы $\pi_X(T)$. Обозначим $K'=\{M_1,\ldots,M_q\}$, $K-K'=\{K_1,\ldots,K_w\}$, $X-K=\{X_1,\ldots,X_p\}$, $R-X=\{B_1,\ldots,B_z\}$, при этом множества K', $K-K'$ и $R-X$ непустые. Поскольку K — простой ключ для T, то

K' не является ключом для T, следовательно, существуют такие строки $s', s'' \in T$, что $s'|K' = s''|K'$ и $s' \neq s''$. Пусть $s' = \{(M_1, m_1'), \dots, (M_q, m_q'), (K_1, k_1'), \dots, (K_w, k_w'), (X_1, x_1'), \dots$ $\dots, (X_p, x_p'), (B_1, b_1'), \dots, (B_z, b_z')\}$ и $s'' = \{(M_1, m_1''), \dots, (M_q, m_q''), (K_1, k_1''), \dots, (K_w, k_w''),$ $(X_1, x_1''), \dots, (X_p, x_p''), (B_1, b_1''), \dots, (B_z, b_z'')\}$. Тогда из неравенства $s' \neq s''$ следует выполнение хотя бы одного из неравенств:

$$m_1' \neq m_1'', \dots, m_q' \neq m_q'',\ k_1' \neq k_1'', \dots, k_w' \neq k_w'',\ x_1' \neq x_1'', \dots, x_p' \neq x_p'',\ b_1' \neq b_1'', \dots, b_z' \neq b_z''. \quad (2)$$

Из равенства $s'|K' = s''|K'$ следует выполнение всех равенств $m_1' = m_1'', \dots, m_q' = m_q''$. Поскольку по предположению K' — простой ключ таблицы $\pi_X(T)$, а из равенств $m_1' = m_1'', \dots, m_q' = m_q''$ следует $(s'|X)|K = (s''|X)|K$, должны выполняться равенства $k_1' = k_1'', \dots, k_w' = k_w''$, $x_1' = x_1'', \dots, x_p' = x_p''$. Поскольку K — ключ для T, а из выполнения $m_1' = m_1'', \dots, m_q' = m_q'', k_1' = k_1'', \dots, k_w' = k_w''$ следует $s'|K = s''|K$, должны выполняться равенства $b_1' = b_1'', \dots, b_z' = b_z''$, что противоречит (2), поэтому допущение неверно. ■

Операция соединения. Покажем, что объединение ключей исходных таблиц будет ключом их соединения.

Теорема 4 (инвариантность объединения ключей относительно соединения). Пусть K_1 — ключ таблицы T_1 и K_2 — ключ таблицы T_2. Тогда $K_1 \cup K_2$ является ключом таблицы $T_1 \otimes T_2$. Если K_1 — простой ключ для T_1 и K_2 — простой ключ для T_2, то $K_1 \cup K_2$, вообще говоря, не является простым ключом для $T_1 \otimes T_2$.

Доказательство. Пусть R_1 — схема таблицы T_1 и R_2 — схема таблицы T_2. На рис. 1 показаны все возможные случаи относительно включения множеств R_1, R_2, K_1 и K_2.

Из рис. 1 следует, что $K_1 = M_1 \cup M_3 \cup M_5$, $K_2 = M_1 \cup M_4 \cup M_6$, $R_1 = M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cup M_5 \cup M_7$, $R_2 = M_1 \cup M_2 \cup M_4 \cup M_6 \cup M_8$ и $K_1 \cup K_2 = M_1 \cup M_3 \cup$ $\cup M_4 \cup M_5 \cup M_6$, причем некоторые из множеств $M_1, \dots, M_8$ могут быть пустыми (необходимо выполнение неравенств $K_1 \neq \varnothing$ и $K_2 \neq \varnothing$). От противного, допустим, что $K_1 \cup K_2$ не является ключом таблицы $T_1 \otimes T_2$, значит, существуют такие строки $s', s'' \in T_1 \otimes T_2$, что $s'|(K_1 \cup K_2) = s''|(K_1 \cup K_2)$ и $s' \neq s''$. Тогда из $s' \neq s''$ с учетом равенства $s'|(K_1 \cup K_2) = s''|(K_1 \cup K_2)$ следует истинность дизъюнкции

$$s'|M_2 \neq s''|M_2 \vee s'|M_7 \neq s''|M_7 \vee s'|M_8 \neq s''|M_8. \quad (3)$$

Поскольку $s', s'' \in T_1 \otimes T_2$, по определению соединения существуют такие строки $s_1' \in T_1$, $s_1'' \in T_1$ и $s_2' \in T_2$, $s_2'' \in T_2$, что $s_1' \approx s_2'$, $s_1'' \approx s_2''$, $s' = s_1' \cup s_2'$ и $s'' = s_1'' \cup s_2''$. Поскольку K_1 — ключ таблицы T_1, а из равенства $s'|(K_1 \cup K_2) = s''|(K_1 \cup K_2)$ прямо следует конъюнкция $s_1'|M_1 = s_1''|M_1 \wedge s_1'|M_3 = s_1''|M_3 \wedge s_1'|M_5 = s_1''|M_5$, должны выполняться равенства $s_1'|M_2 = s_1''|M_2$ и $s_1'|M_7 = s_1''|M_7$, поэтому $s'|M_2 = s''|M_2 \wedge s'|M_7 = s_1''|M_7$. Аналогично, поскольку K_2 — ключ для T_2, а из $s'|(K_1 \cup K_2) = s''|(K_1 \cup K_2)$ прямо

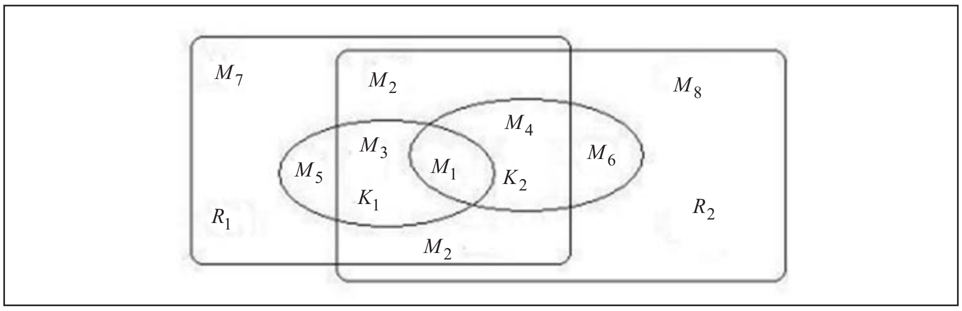

Рис. 1. Возможные случаи взаимного включения множеств R_1, R_2, K_1 и K_2

следует конъюнкция $s_2'|M_1 = s_2''|M_1 \wedge s_2'|M_4 = s_2''|M_4 \wedge s_2'|M_6 = s_2''|M_6$, должно также выполняться равенство $s_2'|M_8 = s_2''|M_8$, поэтому $s'|M_8 = s''|M_8$, что противоречит (3), поэтому допущение неверно.

Вторая часть теоремы доказывается с помощью контрпримера. ■

Из теоремы 4 следует, что в случае, когда обе исходные таблицы имеют одинаковый ключ, последний также является ключом соединения исходных таблиц.

Следствие 3 (инвариантность ключей относительно соединения). Пусть K – ключ таблиц T_1 и T_2. Тогда K — ключ таблицы $T_1 \otimes T_2$. Если K — простой ключ таблиц T_1 и T_2, то K, вообще говоря, не является простым ключом для $T_1 \otimes T_2$. ■

Операция деления. Рассмотрим инвариантность ключей относительно деления только в том случае, когда значение $T_1 \underset{R_2}{\overset{R_1}{\div}} T_2$ непустое (так как иначе имеем тривиальный случай). Поскольку схема результата есть множество $R_1 - R_2$, где R_1 — схема таблицы T_1, R_2 — схема таблицы T_2, рассмотрим следующие ситуации взаимного включения ключа таблицы T_1 и схемы R_2:

1) ключ таблицы T_1 не пересекается со схемой R_2;

2) ключ таблицы T_1 пересекается со схемой R_2, но при этом он полностью не входит в схему таблицы T_2.

Вариант, при котором ключ таблицы T_1 полностью входит в схему R_2, с точки зрения сохранения ключа операцией $T_1 \underset{R_2}{\overset{R_1}{\div}} T_2$ рассматривать нецелесообразно, так как не существует логической связи между ключами таблиц-аргументов и результата.

Покажем, что в первом случае операция деления таблиц сохраняет ключ, но не сохраняет простого ключа, а во втором случае часть ключа, не входящая в схему таблицы T_2, будет являться ключом таблицы $T_1 \underset{R_2}{\overset{R_1}{\div}} T_2$.

Рассмотрим первый случай и покажем, что операция деления таблиц сохраняет ключ, но не сохраняет простого ключа.

Теорема 5 (инвариантность ключей относительно деления). Пусть R_1 — схема таблицы T_1, R_2 — схема таблицы T_2, $T_1 \underset{R_2}{\overset{R_1}{\div}} T_2 \neq T_\varnothing$, $K = \{K_1, \ldots, K_q\}$ — ключ таблицы T_1 и $K \bigcap R_2 = \varnothing$. Тогда K — ключ таблицы $T_1 \underset{R_2}{\overset{R_1}{\div}} T_2$. Если при этом K — простой ключ для T_1, то K, вообще говоря, не является простым ключом таблицы $T_1 \underset{R_2}{\overset{R_1}{\div}} T_2$.

Доказательство. От противного, допустим, что K не является ключом таблицы $T_1 \underset{R_2}{\overset{R_1}{\div}} T_2$, значит, существуют такие $s', s'' \in T_1 \underset{R_2}{\overset{R_1}{\div}} T_2$, что $s'|K = s''|K$ и $s' \neq s''$. Обозначим $R_2 = \{A_1, \ldots, A_z\}$ и $R_1 - K = \{X_1, \ldots, X_p\}$, причем множество $R_1 - K$ может быть пустым. Пусть $s' = \{(K_1, k_1'), \ldots, (K_q, k_q'), (X_1, x_1'), \ldots, (X_p, x_q')\}$ и $s'' = \{(K_1, k_1''), \ldots, (K_q, k_q''), (X_1, x_1''), \ldots, (X_p x_p'')\}$. Тогда из равенства $s'|K = s''|K$ следует выполнение равенств $k_1' = k_1'', \ldots, k_q' = k_q''$, следовательно, неравенство $s' \neq s''$ влечет выполнение хотя бы одного из неравенств:

$$x_1' \neq x_1'', \ldots, x_p' \neq x_p''. \tag{4}$$

Поскольку по определению операции деления таблиц выполняются принадлежности $s', s'' \in \pi_{R_1-R_2}(T_1)$, по определению проекции существуют непустые множества $S_1 = \{s_1 \in T_1 | s' \subset s_1\}$ и $S_2 = \{s_2 \in T_1 | s'' \subset s_2\}$. Пусть $s_1' = \{(K_1, k_1'), \ldots, (K_q, k_q'),$ $(X_1, x_1'), \ldots, (X_p, x_p'), (A_1, a_1'), \ldots, (A_z, a_z')\} \in S_1$ и $s_1'' = \{(K_1, k_1''), \ldots, (K_q, k_q''), (X_1, x_1''), \ldots$ $\ldots, (X_p, x_p''), (A_1, a_1''), \ldots, (A_z, a_z'')\} \in S_2$. Поскольку K — ключ таблицы T_1 и равенства $k_1' = k_1'', \ldots, k_q' = k_q''$ эквивалентны равенству $s_1' | K = s_1'' | K$, должно выполняться равенство $s_1' = s_1''$, поэтому также должны выполняться равенства $x_1' = x_1'', \ldots, x_p' = x_p''$, что противоречит (4). Поэтому данное допущение неверно.

Вторая часть теоремы доказывается с помощью контрпримера. ■

Рассмотрим теперь второй случай, при котором ключ таблицы T_1 пересекается со схемой таблицы T_2, но при этом он полностью не входит в схему таблицы T_2. Покажем, что операция деления таблиц в этом случае сохраняет ключ, но не сохраняет простого ключа. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 6 (инвариантность части ключа относительно деления). Пусть R_1 — схема таблицы T_1, R_2 — схема таблицы T_2, $T_1 \div_{R_2}^{R_1} T_2 \neq T_\varnothing$, K — ключ таблицы T_1, $K \cap R_2 \neq \varnothing$ и $K' = K - R_2 \neq \varnothing$. Тогда K' — ключ для $T_1 \div_{R_2}^{R_1} T_2$. Если при этом K — простой ключ для T_1, то K', вообще говоря, не является простым ключом для $T_1 \div_{R_2}^{R_1} T_2$.

Доказательство. Пусть $K' = \{K_1, \ldots, K_q\}$. Обозначим $K \cap R_2 = \{X_1, \ldots, X_p\}$, $R_2 - (K \cap R_2) = \{B_1, \ldots, B_y\}$, $(R_1 - R_2) - K = \{A_1, \ldots, A_z\}$, причем множества $R_2 - (K \cap R_2)$ и $(R_1 - R_2) - K$ могут быть пустыми независимо один от другого. Если множество $(R_1 - R_2) - K$ пустое, то K' — схема таблицы $T_1 \div_{R_2}^{R_1} T_2$, следовательно, K' является тривиальным ключом для $T_1 \div_{R_2}^{R_1} T_2$. Пусть множество $(R_1 - R_2) - K$ непустое. От противного, допустим, что K' не является ключом таблицы $T_1 \div_{R_2}^{R_1} T_2$, следовательно, существуют такие строки $s', s'' \in T_1 \div_{R_2}^{R_1} T_2$, что $s' | K' = s'' | K'$ и $s' \neq s''$. Обозначим $s' = \{(A_1, a_1'), \ldots, (A_z, a_z'), (K_1, k_1'), \ldots, (K_q, k_q')\}$ и $s'' = \{(A_1, a_1''), \ldots, (A_z, a_z''), (K_1, k_1''), \ldots, (K_q, k_q'')\}$. Из равенства $s' | K' = s'' | K'$ и неравенства $s' \neq s''$ следует, что выполняется хотя бы одно из неравенств:

$$a_1' \neq a_1'', \ldots, a_z' \neq a_z''. \tag{5}$$

Пусть $s = \{(X_1, x_1), \ldots, (X_p, x_p), (B_1, b_1), \ldots, (B_y, b_y)\} \in T_2$. Тогда по определению операции деления таблиц существуют строки $s_1' = \{(A_1, a_1'), \ldots, (A_z, a_z'),$ $(K_1, k_1'), \ldots, (K_q, k_q'), (X_1, x_1), \ldots, (X_p, x_p), (B_1, b_1), \ldots, (B_y, b_y)\} \in T_1$ и $s_1'' = \{(A_1, a_1''), \ldots$ $\ldots, (A_z, a_z''),$ $(K_1, k_1''), \ldots, (K_q, k_q''), (X_1, x_1), \ldots, (X_p, x_p), (B_1, b_1), \ldots, (B_y, b_y)\} \in T_1$. Из равенства $s' | K' = s'' | K'$ следует выполнение равенств $k_1' = k_1'', \ldots, k_q' = k_q''$, поэтому выполняется равенство $s_1' | K = s_1'' | K$. Поскольку K — ключ таблицы T_1, из равенства $s_1' | K = s_1'' | K$ следует равенство $s_1' = s_1''$, поэтому выполняются равенства $a_1' = a_1'', \ldots, a_z' = a_z''$, что противоречит (5). Таким образом, данное допущение неверно.

Вторая часть теоремы доказывается с помощью контрпримера. ■

Результаты работы сведены в табл. 1.

Т а б л и ц а 1

Операция	Сохранение ключей	Сохранение простых ключей	Утверждение
$\underset{R}{\cap}$	Да	Нет	Предложение 1
$\underset{R}{-}$	Да	Нет	Предложение 2
$\underset{R}{\cup}$	Нет	Нет	Очевидно
σ_p	Да	Нет	Предложение 3
RT_ξ	Да	Да	Предложение 4
$\widetilde{T}$	Найдены критерии	—	Теорема 1, следствие 1
	—	Найдены критерии	Следствие 2
π_X	Найдено достаточное условие	—	Теорема 2
	—	Найдено достаточное условие	Теорема 3
$\otimes$	Да	Нет	Теорема 4, следствие 3
$T_1 \div^{R_1}_{R_2} T_2$	Найдено достаточное условие	Нет	Теорема 5, теорема 6

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе исследована инвариантность ключей, в частности и простых, относительно сигнатурных операций табличных алгебр. Показано, что ключи инвариантны относительно операций пересечения, разности и селекции (см. предложения 1–3), при этом для простых ключей инвариантность не выполняется, и что относительно переименования инвариантны как ключи, так и простые ключи (см. предложение 4). Найдены необходимые и достаточные условия, при которых ключи инвариантны относительно активного дополнения (см. теорему 1, следствия 1, 2). Также найден критерий, при котором ключи (в том числе и простые) инвариантны относительно проекции (см. теоремы 2, 3). Показано, что объединение ключей таблиц является ключом их соединения, в частности, если две таблицы имеют одинаковые ключи, то их соединение сохраняет ключ (см. теорему 4, следствие 3). Доказано, что ключи инвариантны относительно деления (см. теоремы 5, 6), при этом для простых ключей инвариантность не выполняется. Результаты работы представляют теоретический и практический интерес и их можно использовать для выбора оптимальных ключей при проектировании реляционных баз данных.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. C o d d E . F . A relational model of data for large shared data banks // Communications of the ACM. — 1970. — **13,** N 6. — P. 377–387.
2. C o d d E . F . The relational model for database management: version 2. — Reading: Addison-Wesley, 1990. — 538 p.
3. Р е д ь к о В . Н . , Б у й Д . Б . К основаниям теории реляционных моделей баз данных // Кибернетика и системный анализ. — 1996. — № 4. — С. 3–12.
4. К о н н о л и Т . , Б е г г К . Базы данных. Проектирование, реализация и сопровождение. Теория и практика. — М.: Изд. дом «Вильямс», 2003. — 1440 с.
5. Д е й т К . Д ж . Введение в системы баз данных, 8-е издание.: Пер. с англ. — М.: Изд. дом «Вильямс», 2005. — 1328 с.
6. М е й е р Д . Теория реляционных баз данных.: Пер. с англ. — М.: Мир, 1987. — 608 с.
7. К у р а т о в с к и й К . Топология. Т. 1. – М.: Мир, 1966. — 594 с.
8. Р е д ь к о В . Н . , Б р о н а Ю . Й . , Б у й Д . Б . , П о л я к о в С . А . Реляційні бази даних: табличні алгебри та SQL-подібні мови. — Київ: ВД «Академперіодика», 2001. — 198 с.
9. Р и г е Ж . Бинарные отношения, замыкания, соответствия Галуа // Кибернетический сборник: сборник переводов. — М.: ИЛ, 1963. — Вып. 7. — С. 129–185.

Поступила 06.02.2015