УДК 517.938.5

В.А. РУСАНОВ, А.В. ЛАКЕЕВ, Ю.Э. ЛИНКЕ

О РАСШИРЕНИИ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ РЕАЛИЗАЦИИ СЧЕТНОГО ПУЧКА НЕЛИНЕЙНЫХ ПРОЦЕССОВ «ВХОД–ВЫХОД»[1]

Аннотация. Изучается алгебраическое расширение счетного семейства управляемых нелинейныхд динамических процессов, обладающего дифференциальной реализацией в классе обыкновенных квазилинейных дифференциальных уравнений (с программно-позиционным уравнением и без него) в сепарабельном гильбертовом пространстве.

Ключевые слова: нелинейные процессы «вход–выход», нелинейная дифференциальная реализация, нестационарная $(A, B, B^{\#})_2$-модель.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе вводится и исследуется (на качественном уровне) понятие элементарного (одноэлементного) расширения счетного пучка нелинейных динамических процессов, допускающих дифференциальную реализацию в классе квазилинейных управляемых систем в бесконечномерном гильбертовом пространстве. Полученные результаты являются естественным развитием нелинейного системного анализа сложных дифференциальных моделей и могут быть полезны при исследовании обратных задач для уравнений с частными производными.

ТЕРМИНОЛОГИЯ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть $(X, ||\cdot||_X)$, $(Y, ||\cdot||_Y)$, $(Z, ||\cdot||_Z)$ — вещественные сепарабельные гильбертовы пространства (предгильбертовость [1, с. 64] определяют нормы $||\cdot||_X$, $||\cdot||_Y$, $||\cdot||_Z$), $U := X \times Y \times Z$ — гильбертово пространство с нормой $||(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z})||_U :=$ $:= (||\mathrm{x}||_X^2 + ||\mathrm{y}||_Y^2 + ||\mathrm{z}||_Z^2)^{1/2}$, $L(Y, X)$ — банахово пространство с операторной нормой $||\cdot||_{L(Y,X)}$ всех линейных непрерывных операторов, действующих из пространства Y в X (аналогично $(L(X, X), ||\cdot||_{L(X,X)})$ и $(L(Z, X), ||\cdot||_{L(Z,X)})$), $T := [t_0, t_1]$ — отрезок числовой прямой R с мерой Лебега μ и φ_μ — σ-алгебра всех μ-измеримых подмножеств интервала T. Если ниже $(B, ||\cdot||)$ — некоторое банахово пространство, то, как обычно, $L_2(T, \mu, B)$ — банахово фактор-пространство классов μ-эквивалентности всех интегрируемых по Бохнеру [1, с. 189] отображений $f: T \to B$ с нормой $(\int_T ||f(\tau)||^2 \mu(d\tau))^{1/2}$. Кроме того, везде далее $AC(T, X)$ — линейное множество всех абсолютно непрерывных на T функций (относительно меры μ) со значениями в пространстве X, при этом $\Pi := AC(T, X) \times L_2(T, \mu, Y) \times L_2(T, \mu, Z)$.

Рассмотрим управляемые дифференциальные модели вида

$$dx(t)/dt = Ax(t) + Bu(t) + B^{\#} u^{\#}(x(t)), \tag{1}$$

где $(x, u, u^{\#}(x)) \in \Pi$, x — решение Каратеодори (K-решение), u и $u^{\#}(x)$ — программное и позиционное управления, $(A, B, B^{\#}) \in L_2(T, \mu, L(X, X)) \times$ $\times L_2(T, \mu, L(Y, X)) \times L_2(T, \mu, L(Z, X))$; в целях терминологического удобства вектор-функцию $(x, u, u^{\#}(x))$ тоже назовем K-решением уравнения (1), а тройку оператор-функций $(A, B, B^{\#})$, придерживаясь терминологии из [2, 3], будем называть $(A, B, B^{\#})_2$-моделью дифференциальной системы (1).

[1]Работа выполнена при частичном финансировании гранта («Многофункциональные интеллектные информационные и управляемые системы: теория и приложения») Президента Российской Федерации по государственной поддержке ведущих научных школ (НШ-5007.2014.09).

Рассмотрим задачу элементарного (одноэлементного) расширения дифференциальной реализации пучка динамических процессов. Для заданного (возможно, нелинейного) закона $x \mapsto u^{\#}(x): AC(T, X) \to L_2(T, \mu, Z)$ и семейств N, N^* динамических процессов «вход–выход» таких, что $N, N^* \subset \{(x, u, q) \in \Pi: (x, u, q) = (x, u, u^{\#}(x))\}$, $1 \le \operatorname{Card} N \le \aleph_0$ (алеф-нуль), $\operatorname{Card} N^* = 1$, $N^* \not\subset N$, где N, N^* обладают дифференциальными реализациями (1), определить аналитические условия, при которых $N \cup N^*$ — семейство K-решений некоторого уравнения (1).

СУЩЕСТВОВАНИЕ ЭЛЕМЕНТАРНОГО РАСШИРЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ РЕАЛИЗАЦИИ СЧЕТНОГО ПУЧКА ПРОЦЕССОВ

Наделим пространство $H_2 := L_2(T, \mu, X) \times L_2(T, \mu, Y) \times L_2(T, \mu, Z)$ топологией при норме

$$\left(\int_T || (g(\tau), w(\tau), q(\tau)) ||_U^2 \mu(d\tau) \right)^{1/2}, \quad (g, w, q) \in H_2.$$

Не представляет труда установить, что H_2 — гильбертово пространство [1, с. 64]); условимся отличать в обозначениях элемент $(x, u, u^{\#}(x)) \in \Pi$ как класс эквивалентности (т.е. элемент H_2) от конкретного представителя (вектор-функции) $(x(\cdot), u(\cdot), u^{\#}(x(\cdot)))$ из этого класса.

Пусть G_E — произвольный (но фиксированный и пронумерованный $i = 1, 2, \dots$) алгебраический базис в $E := \operatorname{Span} N$, и пусть $\{(x^*, u^*, u^{\#}(x^*))\} := N^*$, при этом $(x^*, u^*, u^{\#}(x^*)) \notin E$. Очевидно, что в любой точке $t \in T$ возможно разложение в гильбертовом пространстве U вектора $(x^*(t), u^*(t), u^{\#}(x^*(t)))$ на проекцию в $\operatorname{Span}\{(x(t), u(t), u^{\#}(x(t)))_i : (x, u, u^{\#}(x))_i \in G_E, i = 1, 2, \dots\}$, которую обозначим $(x_-^*(t), u_-^*(t), u_-^{\#}(x^*(t)))$, и соответствующее дополнение $(x_\perp^*(t), u_\perp^*(t), u_\perp^{\#}(x^*(t))) := (x^*(t), u^*(t), u^{\#}(x^*(t))) - (x_-^*(t), u_-^*(t), u_-^{\#}(x^*(t)))$.

Лемма 1. Вектор-функции

$$t \mapsto (x_-^*(t), u_-^*(t), u_-^{\#}(x^*(t))): T \to U, \quad t \mapsto (x_\perp^*(t), u_\perp^*(t), u_\perp^{\#}(x^*(t))): T \to U$$

являются μ-измеримыми. (В силу сепарабельности U слабая и сильная измеримости совпадают [1, с. 187].)

Лемма 2. Представление $(x^*, u^*, u^{\#}(x^*)) = (x_-^*, u_-^*, u_-^{\#}(x^*)) + (x_\perp^*, u_\perp^*, u_\perp^{\#}(x^*))$ не зависит от выбора алгебраического базиса G_E, при этом $(x_-^*, u_-^*, u_-^{\#}(x^*))$, $(x_\perp^*, u_\perp^*, u_\perp^{\#}(x^*)) \in H_2$.

Пусть Ω_E и $\Omega_\perp^*$ — замыкания в гильбертовом пространстве H_2 соответственно линейных многообразий $\operatorname{Span}\{\chi \cdot (x, u, u^{\#}(x)): \chi \in F, (x, u, u^{\#}(x)) \in E\}$ и $\operatorname{Span}\{\chi \cdot (x_\perp^*, u_\perp^*, u_\perp^{\#}(x^*)): \chi \in F\}$, где $F \subset L(T, \mu, R)$ — семейство классов эквивалентности (mod μ) всех характеристических функций, индуцированных элементами σ-алгебры φ_μ.

Лемма 3. Подпространства Ω_E, $\Omega_\perp^*$ ортогональны, т.е. $\Omega_E \perp \Omega_\perp^*$.

Замечание 1. Везде далее для двух замкнутых подпространств из пространства H_2 таких, что их пересечение есть $\{0\} \subset H_2$, а векторная сумма замкнута в H_2, условимся знак их векторного сложения обозначать $\oplus$, в частности теорема 14.C [4, с. 42] и лемма 3 способствуют корректной записи $\Omega_E \oplus \Omega_\perp^*$.

Возникает вопрос: при каких аналитических условиях, накладываемых на множества управляемых динамических процессов N и $\{(x^*, u^*, u^{\#}(x^*))\}$, «расширенное» семейство процессов $N \cup \{(x^*, u^*, u^{\#}(x^*))\}$ обладает дифференциальной реализацией (1)? На одном из путей геометрического решения этой задачи выступает построение характеристического признака (см. ниже теорему 1), определяющего равенство

$$\Omega_E + \Omega^* = \Omega_E \oplus \Omega_\perp^*, \tag{2}$$

где Ω^* — замыкание в H_2 линейного многообразия Span $\{\chi \cdot (x^*,\ u^*,\ u^\#(x^*)):$ $\chi \in F\}$, поскольку частная форма равенства (2), а именно вида

$$\Omega_E \oplus \Omega^* = \Omega_E \oplus \Omega_\perp^*, \tag{3}$$

положительно отвечает на вопрос о реализации расширенного пучка $N \cup \{(x^*,\ u^*,\ u^\#(x^*))\}$ в контексте подхода к геометрическому решению задачи расширения дифференциальной реализации, основанного на теореме 14.C [4, с. 42] и теореме 3 [2]; ниже одно характерное свойство равенства (3) обнаруживает теорема 2.

Далее $T_0 := \{t \in T : (x_\perp^*(t), u_\perp^*(t), u_\perp^\#(x^*(t))) = 0\}$, $v_\perp^*, v^*$ — лебеговские пополнения мер

$$\int_S ||(x_\perp^*(\tau), u_\perp^*(\tau), u_\perp^\#(x^*(\tau)))||_U^2\ \mu(d\tau),\ S \in \varphi_\mu,$$

$$\int_S ||(x^*(\tau), u^*(\tau), u^\#(x^*(\tau)))||_U^2\ \mu(d\tau),\ S \in \varphi_\mu.$$

Теорема 1. Равенство $\Omega_E + \Omega^* = \Omega_E \oplus \Omega_\perp^*$ имеет место в том и только в том случае, если

$$L_2(T, v_\perp^*, R) = \chi_\perp \cdot L_2(T, v^*, R),$$

где $\chi_\perp$ — характеристическая функция множества $T \setminus T_0$.

Доказательство теоремы 1 сведем к установлению леммы 4 и леммы 5.

Лемма 4. Справедливо включение $\Omega_E + \Omega^* \subset \Omega_E \oplus \Omega_\perp^*$.

Доказательство. Пусть $\omega' \in \Omega^*$, тогда согласно лемме 4 [2] $\omega' = \lambda'(x^*,\ u^*,\ u^\#(x^*)) = \lambda'(x_-^*, u_-^*, u_-^\#(x^*)) + \lambda'(x_\perp^*, u_\perp^*, u_\perp^\#(x^*))$, $\quad \lambda' \in L_2(T, v^*, R)$. Далее, поскольку для каждой функции $\lambda \in L_2(T, v^*, R)$ имеем

$$\lambda^2(t)||(x^*(t), u^*(t), u^\#(x^*(t)))||_U^2 \geq \lambda^2(t)||(x_\perp^*(t), u_\perp^*(t), u_\perp^\#(x^*(t)))||_U^2,$$

справедливо следующее вложение функциональных пространств:

$$L_2(T, v^*, R) \subset L_2(T, v_\perp^*, R),$$

отсюда $\lambda' \cdot (x_\perp^*, u_\perp^*, u_\perp^\#(x^*)) \in \Omega_\perp^*$ (на основании аналитической структуры подпространства $\Omega_\perp^*$, приведенной в лемме 4 [2]). Таким образом, в силу произвольности выбора элемента $\omega' \in \Omega^*$ лемма будет доказанной, коль скоро обнаружим $\lambda' \cdot (x_-^*, u_-^*, u_-^\#(x^*)) \in \Omega_E$. Для этого достаточно показать (следствие [1, с. 157]), что $< \lambda' \cdot (x_-^*, u_-^*, u_-^\#(x^*)), \omega'' >_{H_2} = 0$, где $< \cdot, \cdot >_{H_2}$ — скалярное произведение в H_2, для всех $\omega'' \in H_2$ таких, что $< \omega'', \omega >_{H_2} = 0$ при любом $\omega \in$ Span $\{\chi \cdot (x, u, u^\#(x)) : \chi \in F, (x, u, u^\#(x)) \in E\}$, что равносильно установить

$$\omega''(t) \perp \text{Span}\,\{(x(t), u(t), u^\#(x(t)))_i : (x, u, u^\#(x))_i \in G_E,\ i = 1, 2, \ldots\}$$

μ-почти всюду в T, здесь $\perp$ — отношение ортогональности в структуре пространства U.

Разложим в каждой точке $t \in T$ вектор-функцию $\omega''(\cdot)$ в сумму $\omega''_-(t) + \omega''_\perp(t) := \omega''(t)$, где $\omega''_-(t) \in$ Span $\{(x(t), u(t), u^\#(x(t)))_i : (x, u, u^\#(x))_i \in G_E$, $i = 1, 2, \ldots\}$ и $\omega''_\perp(t)$ ортогонально к Span$\{(x(t), u(t), u^\#(x(t)))_i : (x, u, u^\#(x))_i \in$

$\in G_E,\ i=1,2,\dots\}$. Тогда если $\omega''_{-}\neq 0$, то существует такое множество $S^*\in\varphi_\mu$, $\mu(S^*)>0$, что $\omega''_{-}(t)\neq 0\ \forall\, t\in S^*$, при этом в базисе G_E найдется такой вектор $(x,u,u^{\#}(x))_i$, что будет $(x(t),u(t),u^{\#}(x(t)))_i\neq 0$ μ-почти всюду в S^*; в противном случае для μ-почти всех $t\in S^*$ будут «реализоваться» равенства

$$\operatorname{Span}\{(x(t),u(t),u^{\#}(x(t)))_i:(x,u,u^{\#}(x))_i\in G_E,\ i=1,2,\dots\}=\{0\}$$

и, следовательно, в таком положении должно выполняться $\omega''_{-}=0$.

Теперь обозначим S_+^* и S_-^* подмножества (разбиение) S^*, равные

$$S_+^*=\{t\in S^*:<\omega''_{-}(t),(x(t),u(t),u^{\#}(x(t)))_i>_U\geq 0\},$$

$$S_-^*=\{t\in S^*:<\omega''_{-}(t),(x(t),u(t),u^{\#}(x(t)))_i>_U<0\}.$$

Очевидно, что хотя бы одно из множеств S_+^* или S_-^* имеет ненулевую меру. Пусть это будет множество S_+^*. Тогда, очевидно,

$$\chi_+\cdot(x,u,u^{\#}(x))_i\in\operatorname{Span}\{\chi\cdot(x,u,u^{\#}(x)):\chi\in F,\ (x,u,u^{\#}(x))\in E\}$$

и

$$<\omega''_{-},\chi_+\cdot(x,u,u^{\#}(x))_i>_{H_2}>0,$$

где χ_+ — характеристическая функция множества S_+^*. Ясно, что получаем $<\omega'',\chi_+\cdot(x,u,u^{\#}(x))_i>_{H_2}>0$, в результате приходим к противоречию с условиями, определившими выше конструкцию функционала ω''. Лемма доказана.

Приведенное доказательство содержит полезное уточнение.

Следствие 1. Имеет место $L_2(T,v^*,R)\subset L_2(T,v_\perp^*,R)$.

Лемма 5. Справедливо утверждение $\Omega_E+\Omega^*\supset\Omega_E\oplus\Omega_\perp^*\Leftrightarrow L_2(T,v_\perp^*,R)=$ $=\chi_\perp\cdot L_2(T,v^*,R)$.

Доказательство ($\Rightarrow$). Пусть $\lambda_\omega\in L_2(T,v_\perp^*,R)$ и $\omega:=\lambda_\omega\cdot(x_\perp^*,u_\perp^*,u_\perp^{\#}(x^*))$, откуда (лемма 4 [2]) $\omega\in\Omega_E\oplus\Omega_\perp^*$, а значит (предположение $\Rightarrow$), $\omega\in\Omega_E+\Omega^*$. Тогда в силу $\omega\in\Omega_E\oplus\Omega_\perp^*$ вектор ω имеет разложение (единственное) вида $\omega=\omega'+\lambda_\omega\cdot(x_\perp^*,u_\perp^*,u_\perp^{\#}(x^*))$, где $\omega'=0\in\Omega_E$, при этом в силу $\omega\in\Omega_E+\Omega^*$ справедливо представление

$$\omega=\omega''+\lambda^*\cdot(x^*,u^*,u^{\#}(x^*))=\omega''+\lambda^*\cdot(x_-^*,u_-^*,u_-^{\#}(x^*))+\lambda^*\cdot(x_\perp^*,u_\perp^*,u_\perp^{\#}(x^*)),$$

где $\omega''\in\Omega_E$, $\lambda^*\in L_2(T,v^*,R)$. Поскольку (рассуждения аналогичны выводу леммы 4 [2]) имеют место включения $\lambda^*\cdot(x_-^*,u_-^*,u_-^{\#}(x^*))\in\Omega_E$, $\lambda^*\cdot(x_\perp^*,u_\perp^*,u_\perp^{\#}(x^*))\in\Omega_\perp^*$, то $\omega'=\omega''+\lambda^*\cdot(x_-^*,u_-^*,u_-^{\#}(x^*))$ и $\lambda_\omega\cdot(x_\perp^*,u_\perp^*,$ $u_\perp^{\#}(x^*))=\lambda^*\cdot(x_\perp^*,u_\perp^*,u_\perp^{\#}(x^*))$. Таким образом, с учетом наличия линейной изометрии между $L_2(T,v_\perp^*,R)$ и $\Omega_\perp^*$ (лемма 4 [2]) $\lambda_\omega=\chi_\perp\cdot\lambda^*$, откуда в итоге в силу произвольности выбора функции λ_ω, получаем $L_2(T,v_\perp^*,R)\subset$ $\subset\chi_\perp\cdot L_2(T,v^*,R)$ или с учетом следствия 1 $L_2(T,v_\perp^*,R)=\chi_\perp\cdot L_2(T,v^*,R)$.

($\Leftarrow$) Пусть $\omega\in\Omega_E\oplus\Omega_\perp^*$. Тогда $\omega=\omega'+\lambda_\omega\cdot(x_\perp^*,u_\perp^*,u_\perp^{\#}(x^*))$, где $\omega'\in\Omega_E$, $\lambda_\omega\in L_2(T,v_\perp^*,R)$. Так как (предположение $\Leftarrow$) $\lambda_\omega\in\chi_\perp\cdot L_2(T,v^*,R)$, справедлива связка равенств

$$\omega'+\lambda_\omega\cdot(x_\perp^*,u_\perp^*,u_\perp^{\#}(x^*))=\omega'+\lambda_\omega\cdot(x_\perp^*,u_\perp^*,u_\perp^{\#}(x^*))+\lambda_\omega\cdot(x_-^*,u_-^*,u_-^{\#}(x^*))-$$

$$-\lambda_\omega\cdot(x_-^*,u_-^*,u_-^{\#}(x^*))=\omega'-\lambda_\omega\cdot(x_-^*,u_-^*,u_-^{\#}(x^*))+\lambda_\omega\cdot(x^*,u^*,u^{\#}(x^*)),$$

следовательно, $\omega \in \Omega_E + \Omega^*$ в силу $(\omega' - \lambda_\omega \cdot (x_-^*, u_-^*, u_-^{\#}(x^*))) \in \Omega_E$, $\lambda_\omega \cdot (x^*, u^*, u^{\#}(x^*)) \in \Omega^*$. Лемма доказана.

Приведем вариант характеристических условий равенства (3).

Теорема 2. При выполнении $T_0 = \varnothing \pmod \mu$ справедливо предложение

$$\Omega_E \oplus \Omega^* = \Omega_E \oplus \Omega_\perp^* \Leftrightarrow L_2(T, v_\perp^*, R) = L_2(T, v^*, R).$$

Доказательство. С одной стороны, то, что $\Omega_E + \Omega^* = \Omega_E \oplus \Omega_\perp^* \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow L_2(T, v_\perp^*, R) = L_2(T, v^*, R)$, — прямая констатация теоремы 1. С другой стороны, подтверждение равенства $\Omega_E \cap \Omega^* = \{0\} \subset H_2$ вытекает из предположения $\{t \in T : (x_\perp^*(t), u_\perp^*(t), u_\perp^{\#}(x^*(t))) = 0\} = \varnothing \pmod \mu$ и следствия теоремы Мазура [1, с. 157].

Доказательство завершено.

Теорема 1 (с учетом вывода леммы 5) и теорема 2 при последовательном привлечении теоремы 14.С [4, с. 42] и теоремы 3 [2] делают справедливым заключение.

Следствие 2. Следующие три свойства эквивалентны:

$$L_2(T, v_\perp^*, R) \subset \chi_\perp \cdot L_2(T, v^*, R) \Leftrightarrow L_2(T, v_\perp^*, R) =$$

$$= \chi_\perp \cdot L_2(T, v^*, R) \Leftrightarrow \Omega_E \oplus \Omega_\perp^* = \Omega_E + \Omega^*,$$

и если $T_0 = \varnothing \pmod \mu$, то любое из этих свойств превращает пучок $N \cup \{(x^*, u^*, u^{\#}(x^*))\}$ в множество динамических процессов с дифференциальной реализацией (1).

Замечание 2. Следствие 2 позволяет назвать теорему 2 прямой теоремой об элементарном алгебраическом расширении дифференциальной реализации, при этом гипотеза $T_0 = \varnothing \pmod \mu$, $N \cup \{(x^*, u^*, u^{\#}(x^*))\}$ обладает реализацией (1) $\Rightarrow$ $\Rightarrow L_2(T, v_\perp^*, R) \subset L_2(T, v^*, R)$ в общем случае не подтверждается, что иллюстрирует следующий простой пример.

Пример 1. Пусть $X = Y = R$, $T = [-1,1]$, $u^{\#}(\cdot) = 0$ и $N = \{t \mapsto (e^t, 0, 0) : t \in T\}$,

$$\{(x^*, u^*, u^{\#}(x^*))\} = \{t \mapsto (e^t + t^2/2, t, 0) : t \in T\}.$$

Очевидно, что $T_0 = \varnothing \pmod \mu$ и пучок $N \cup \{(x^*, u^*, u^{\#}(x^*))\}$ имеет реализацию (1); заметим, что $T_0 = \varnothing$. Тогда $L_2(T, v^*, R) = L_2(T, \mu, R)$ и $L_2(T, v_\perp^*, R)$, $v_\perp^* = \; = \int \tau^2 \mu(d\tau)$, так как $(x_\perp^*(t), u_\perp^*(t), u_\perp^{\#}(x^*(t))) = (0, t, 0)$. Ясно, что $1/t \in L_2(T, v_\perp^*, R)$, $1/t \notin L_2(T, \mu, R)$, откуда $L_2(T, v_\perp^*, R) \not\subset L_2(T, v^*, R)$; следовательно, в силу леммы 5 также заключаем, что $\Omega_E \oplus \Omega_\perp^* \not\subset \Omega_E + \Omega^*$.

Следующее утверждение показывает, что конструкция, подобная примеру 1, не может реализоваться в функциональном классе $AC(T, X) \times \{0\} \times \{0\} \subset \Pi$, т.е. для свободных траекторий (K-решений); можно сказать, что для $N \subset$ $\subset AC(T, X) \times \{0\} \times \{0\}$ следствие 3 в известном смысле обратно следствию 2 (см. замечание 2).

Следствие 3. Если $N \subset AC(T, X) \times \{0\} \times \{0\}$, Card $N < \infty$ и $N \cup \{(x^*, 0, 0)\}$ — множество траекторий с реализацией (1) при $u = 0$, $u^{\#} = 0$, то выполняются соотношения

$$T_0 = \varnothing, \; L_2(T, v_\perp^*, R) = L_2(T, v^*, R), \; \Omega_E \oplus \Omega^* = \Omega_E \oplus \Omega_\perp^*.$$

Доказательство. Нетрудно видеть, что $T_0 = \varnothing$, поскольку в противном случае существует момент времени $t_* \in T$, при котором $x^*(t_*) = \Sigma \alpha_i x_{(i)}(t_*)$, где все константы α_i, за исключением конечного числа, равны нулю, $x_{(i)}$ — первая компонента тройки $(x, 0, 0)_i \in G_E$. Следовательно, траектория $x^*(\cdot)$ имеет представление $\sum \alpha_i x_{(i)}(\cdot)$ в силу единственности решения, проходящего в момент t_* через точку $x^*(t_*)$ для дифференциальной системы (1) с $(A,0,0)_2$-моделью, отвечающей множеству динамических процессов $N \cup \{(x^*,0,0)\}$, что противоречит выдвинутому ранее условию $(x^*,0,0) \notin E$.

Далее, в силу непрерывности траектории $x^*(\cdot)$ и компактности интервала T существуют такие вещественные константы $c_1, c_2 > 0$, что справедливы равенства

$$\inf\{\|x^*(t)\|_X : t \in T\} = c_1, \ \sup\{\|x^*(t)\|_X : t \in T\} = c_2,$$

аналогично (с учетом $T_0 = \varnothing$, Card $N < \infty$) для некоторых $c_3, c_4 > 0$ будет

$$\inf\{\|x_\perp^*(t)\|_X : t \in T\} = c_3, \ \sup\{\|x_\perp^*(t)\|_X : t \in T\} = c_4.$$

Следовательно, совпадают классы вещественнозначных функций, суммируемых с квадратом на T по мерам $v_\perp^* = \int \|x^*(\tau)\|_X^2 \ \mu(d\tau)$, $v_\perp^* = \int \|x_\perp^*(\tau)\|_X^2 \ \mu(d\tau)$, т.е. $L_2(T, v^*, R) = L_2(T, v_\perp^*, R)$, а значит (см. теорему 2), $\Omega_E \oplus \Omega^* = \Omega_E \oplus \Omega_\perp^*$.

Доказательство завершено.

Если посмотреть на теорему 2 под ракурсом неуправляемых траекторий системы (1), то можно заметить, что аналитика вывода условия $L_2(T, v^*, R) = L_2(T, v_\perp^*, R)$ в доказательстве следствия 3 позволяет усилить эту теорему до характеристического признака элементарного алгебраического расширения дифференциальной реализации конечного пучка неуправляемых процессов $N \subset AC(T, X) \times \{0\} \times \{0\}$.

Теорема 3. В семействе свободных K-решений одноэлементное расширение дифференциальной реализации конечного пучка траекторий возможно, если и только если $T_0 = \varnothing$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе предложен и развит качественный метод анализа геометрических характеристик существования нестационарной $(A, B, B^\#)_2$-модели, включающей в класс своих допустимых решений расширенный счетный пучок сложных динамических процессов. Данная проблема является математически самодостаточной, так как представляет исключительный интерес с позиций понимания тонкой тополого-алгебраической структуры множества управляемых динамических процессов, обладающих дифференциальной реализацией (1). Возможно, что следующая продуктивная интенция в этом исследовании лежит в уточнении, насколько геометрическое свойство (2) в структуре пространства H_2, позволившее получить теорему 2 об одноэлементном расширении динамического пучка, зависит от условия $T_0 = \varnothing$ (mod μ), включая автономные системы реализации [5].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Иосида К. Функциональный анализ. — М.: Мир, 1967. — 624 с.
2. Rusanov V.A., Antonova L.V., Daneev A.V. Inverse problem of nonlinear systems analysis: A behavioral approach // Advances in Differential Equations and Control Processes. — 2012. — **10**, N 2. — P. 69–88.
3. Русанов В.А., Лакеев А.В., Линке Ю.Э. Существование дифференциальной реализации динамической системы в банаховом пространстве в конструкциях расширений до *Mp*-операторов // Дифференциальные уравнения. — 2013. — **49**, № 3. — С. 358–370.
4. Массера Х.Л., Шеффер Х.Х. Линейные дифференциальные уравнения и функциональные пространства. — М.: Мир, 1970. — 456 с.
5. Русанов В.А., Лакеев А.В., Линке Ю.Э. К разрешимости дифференциальной реализации минимального динамического порядка семейства нелинейных процессов «вход–выход» в гильбертовом пространстве // Дифференциальные уравнения. — 2015. — **51**, № 4. — С. 524–537.

Поступила 21.11.2014