СИСТЕМНЫЙ
АНАЛИЗ

И.В. СЕРГИЕНКО, Е.Ф. ГАЛБА

УДК 512.61

ВЗВЕШЕННОЕ СИНГУЛЯРНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ МАТРИЦ С ВЫРОЖДЕННЫМИ ВЕСАМИ НА ОСНОВЕ ВЗВЕШЕННЫХ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Аннотация. Получены и исследованы два варианта взвешенных сингулярных разложений матриц с вырожденными весами при использовании взвешенных ортогональных матриц. На основе описанных сингулярных разложений матриц получены разложения взвешенных псевдообратных для них матриц с вырожденными весами и разложения этих матриц в матричные степенные ряды и произведения. Определены применения данных разложений.

Ключевые слова: взвешенное сингулярное разложение матриц с вырожденными весами, взвешенные псевдообратные матрицы с вырожденными весами, взвешенные нормальные псевдорешения, взвешенные ортогональные преобразования, матричные степенные ряды, матричные степенные произведения, регуляризованные задачи.

ВВЕДЕНИЕ

Впервые сингулярное разложение квадратных матриц получено в [1]. В работах [2, 3] описано взвешенное сингулярное разложение матриц с положительно-определенными весами. Сингулярное разложение широко применялось при теоретических исследованиях и в многочисленных приложениях (см., например, [4]). В работе [5] получено взвешенное сингулярное разложение матриц с вырожденными весами на основе взвешенных ортогональных и псевдоортогональных матриц, определены достаточные условия существования предложенного варианта взвешенного сингулярного разложения матриц, а также приведен обзор литературы по использованию взвешенного сингулярного разложения матриц с положительно-определенными весами для теоретических исследований взвешенных псевдообратных матриц и построения методов вычисления взвешенных псевдообратных матриц и взвешенных нормальных псевдорешений с положительно-определенными весами. В работах [6–8] сингулярное разложение матриц использовалось для анализа влияния возмущений исходных данных на решения задач наименьших квадратов, а в [9] получено взвешенное сингулярное разложение матриц с вырожденными весами на основе ортогональных матриц, а также определены необходимые и достаточные условия существования предложенного варианта разложения матриц.

ОБОЗНАЧЕНИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Отметим, что в дальнейшем везде предполагается вещественность используемых скаляров, векторов, матриц и пространств. Обозначим n-мерное векторное пространство $\mathbb{R}^n$ над полем действительных чисел, где векторы — матрицы размера $n\times 1$. Пусть H — симметричная положительно-определенная или положительно-полуопределенная матрица, $\mathbb{R}^n(H)$ — евклидово пространство в случае положительно-определенной метрики или псевдоевклидово в случае неотрицательной метрики, введенной скалярным произведением $(u, v)_H = (Hu, v)_E$, где $(u, v)_E = u^{\mathrm{T}} v$, E — единичная матрица. Норму (полунорму) в $\mathbb{R}^n(H)$ введем соотношением $\| u\|_H = (u, u)_H^{1/2}$. В случае положительно-полуопределенной матрицы H обозначим $\overline{\mathbb{R}}^n(H) \subset \mathbb{R}^n(H)$ подпространство векторов u, удовлетворяющих условию

$$HH_{EE}^{+} u = H^{1/2} H_{EE}^{+1/2} u = u, \tag{1}$$

где $H_{EE}^{+1/2} = (H^{1/2})_{EE}^{+}$, а H_{EE}^{+} — псевдообратная матрица Мура–Пенроуза для матрицы H [10, 11].

В дальнейшем $H_{EE}^{+p} = (H^p)_{EE}^{+}$ — положительно-полуопределенные матрицы, где p — целое или дробное число.

Поскольку нуль-пространства матриц H, H_{EE}^{+}, HH_{EE}^{+} и $H^{1/2} H_{EE}^{+1/2}$ совпадают [12], полунормы $\|\cdot\|_H$, $\|\cdot\|_{H_{EE}^{+}}$ для векторов в $\mathbb{R}^n(H)$, $\mathbb{R}^n(H_{EE}^{+})$ будут нормами в $\overline{\mathbb{R}}^n(H)$, $\overline{\mathbb{R}}^n(H_{EE}^{+})$.

Определим норму прямоугольной матрицы [13]. Пусть $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, а $H \in \mathbb{R}^{m \times m}$ и $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$ — симметричные положительно-определенные или положительно-полуопределенные матрицы, x — произвольный вектор из $\mathbb{R}^n$. Предполагаем выполнение условий

$$rk(HA) = rk(A), \quad rk(AV) = rk(A), \tag{2}$$

где $rk(L)$ — ранг матрицы L.

Если H и V — положительно-определенные матрицы, то условия (2) заведомо выполняются.

Для множества матриц A, удовлетворяющих (2), норму введем соотношением

$$\| A\|_{HV} = \sup_{x \neq 0} \frac{\| H^{1/2} AVx\|_{E_m}}{\| x\|_{E_n}}, \tag{3}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, а нижний индекс при единичной матрице означает ее размерность. При таком определении норма матрицы A задается формулой

$$\| A\|_{HV} = [\lambda_{\max}(VA^{\mathrm{T}} HAV)]^{1/2}, \tag{4}$$

где $\lambda_{\max}(L)$ — максимальное собственное значение матрицы L.

В [13] показано, что функция $\|\cdot\|_{HV}$, определенная формулой (3), при выполнении условий (2) является аддитивной матричной нормой. Если условия (2) (или одно из них) не выполняются, то формула (3) определяет полунорму матрицы A. При $H = V = E$ функция (3) определяет спектральную норму матрицы A, что следует из (4).

Теперь определим матричную норму для квадратной матрицы [14]. Пусть $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ — произвольная квадратная матрица и $H \in \mathbb{R}^{n \times n}$ — симметричная положительно-полуопределенная матрица, которые удовлетворяют условиям

$$rk(HA) = rk(AH) = rk(A). \tag{5}$$

Норму матрицы A определим соотношением

$$\| A\|_H = \sup_{x \neq 0} \frac{\| Ax\|_H}{\| x\|_H} = \sup_{x \neq 0} \frac{\| H^{1/2} AH_{EE}^{+1/2} H^{1/2} x\|_E}{\| H^{1/2} x\|_E}, \tag{6}$$

где x — произвольный вектор из $\overline{\mathbb{R}}^n(H)$. При таком определении норма матрицы A задается формулой

$$\| A\|_H = [\lambda_{\max}(H_{EE}^{+1/2} A^{\mathrm{T}} HAH_{EE}^{+1/2})]^{1/2}. \tag{7}$$

Пусть A и B — квадратные матрицы одного порядка, причем выполняется одно из условий

$$AHH_{EE}^{+} = A\,,\ HH_{EE}^{+}B = B, \tag{8}$$

где H — симметричная положительно-полуопределенная матрица. Тогда

$$\| AB \|_H \le \| A \|_H \ \| B \|_H\,, \tag{9}$$

так что функция $\|\cdot\|_H$, определенная формулами (6), (7) при выполнении условий (5) и одного из условий (8) является мультипликативной матричной нормой, т.е. удовлетворяет соотношению (9).

Определим симметризуемые матрицы с положительно-полуопределенными симметризаторами [14].

Определение 1. Квадратную матрицу U будем называть симметризуемой слева или справа с помощью симметричных положительно-полуопределенных матриц M и N, если выполняются соответственно условия

$$MU = U^{\mathrm{T}} M,\ rk(MU) = rk(U)\,;\ UN = NU^{\mathrm{T}},\ rk(UN) = rk(U)\,. \tag{10}$$

В ряде работ определялись симметризуемые матрицы и изучались их свойства. В качестве симметризаторов, в основном, рассматривались положительно-определенные матрицы, а в работах [15, 16] изучались H-симметричные матрицы, где H — симметричная невырожденная знаконеопределенная матрица.

Определение 2. Матрицу Q, определенную равенством $Q^{\mathrm{T}} HQ = E$, где H — симметричная положительно-определенная матрица, будем называть H-взвешенной ортогональной или ортогональной с весом H.

Определение 3. Матрицу Q, определенную равенством $Q^{\mathrm{T}} HQ = I(H)$, где H — симметричная положительно-полуопределенная матрица, $I(H)$ — матрица инерции для H, будем называть H-взвешенной псевдоортогональной или псевдоортогональной с весом H.

В [17, 18] определены условия, при которых матрица-произведение двух эрмитовых матриц будет диагонализуемой (матрицей простой структуры). Сформулируем этот результат в виде леммы для произведения двух симметричных действительных матриц.

Лемма 1. Пусть A и B — симметричные матрицы, причем одна из них положительно-определенная. Тогда собственные значения матрицы AB — действительные числа, при этом матрица AB имеет простую структуру.

ВЗВЕШЕННОЕ СИНГУЛЯРНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ И ВЗВЕШЕННОЕ ПСЕВДООБРАЩЕНИЕ МАТРИЦ С ВЫРОЖДЕННЫМИ ВЕСАМИ. ВАРИАНТ I

Для получения рассматриваемого далее варианта сингулярного разложения матриц используем утверждения из [5], которые сформулируем в виде лемм.

Лемма 2. Симметризуемая слева положительно-полуопределенным симметризатором $H \in \mathbb{R}^{n\times n}$ матрица $L \in \mathbb{R}^{n\times n}$ при выполнении условия

$$H_{EE}^{+}HL = L \tag{11}$$

приводится к диагональной форме с помощью K-взвешенного ортогонального преобразования, т.е. существуют такие невырожденные матрицы U и K:

$$U^{\mathrm{T}} KU = E, \tag{12}$$

что

$$U^{\mathrm{T}} KLU = \Lambda,\ U^{\mathrm{T}} HLU = \Lambda, \tag{13}$$

а матрица L представляется в виде

$$L = U\Lambda U^{\mathrm{T}} K, \tag{14}$$

где $K = QD^2Q^{\mathrm{T}}$; Q — ортогональная матрица, которая диагонализует матрицу H, т.е. $Q^{\mathrm{T}}HQ = \Phi$, $\Phi = DI(H)D = \mathrm{diag}(\varphi_i)$, $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_r > 0$, $\varphi_{r+1}, \ldots, \varphi_n = 0$ — собственные значения матрицы H; r — ранг матрицы H, $D = \mathrm{diag}(\sqrt{\varphi_1}, \ldots$

$\ldots, \sqrt{\varphi_r}, 1, \ldots, 1)$; $I(H)$ — матрица инерции для H; столбцы матрицы U образуют линейно независимую систему собственных векторов матрицы L, а диагональные элементы матрицы Λ являются соответствующими собственными значениями матрицы L.

Лемма 3. Пусть $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, а $B \in \mathbb{R}^{m\times m}$ и $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ — симметричные положительно-полуопределенные матрицы, $U^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{m\times m}$ — невырожденная матрица. Тогда при выполнении условий $B_{EE}^{+}BA = A$ и $AC_{EE}^{+}C = A$ ранги матриц $C_{EE}^{+}A^{\mathrm{T}}BA$, $AC_{EE}^{+}A^{\mathrm{T}}B$, $U^{\mathrm{T}}BAC_{EE}^{+1/2}$ и A совпадают; собственные значения матриц $C_{EE}^{+}A^{\mathrm{T}}BA$ и $AC_{EE}^{+}A^{\mathrm{T}}B$ вещественные и неотрицательные.

Теорема 1. Пусть $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ — произвольная матрица и выполняются условия

$$B_{EE}^{+}BA = A\,,\ \ AC_{EE}^{+}C = A\,, \tag{15}$$

где $B = B^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{m\times m}$ и $C = C^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ — положительно-полуопределенные матрицы, тогда для матрицы A существуют взвешенные ортогональные матрицы $U \in \mathbb{R}^{m\times m}$ и $W \in \mathbb{R}^{n\times n}$ соответственно с положительно-определенными весами $M \in \mathbb{R}^{m\times m}$ и $N \in \mathbb{R}^{n\times n}$ такие, что

$$U^{\mathrm{T}}BAW = \Sigma = \begin{cases} \left\| \operatorname{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r, 0, \ldots, 0)\, O_m^{n-m} \right\|, & \text{если } m \le n, \\ \left\| \begin{matrix} \operatorname{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r, 0, \ldots, 0) \\ O_{m-n}^{n} \end{matrix} \right\|, & \text{если } m \ge n, \end{cases} \tag{16}$$

и

$$A = U\Sigma W^{\mathrm{T}} N\,. \tag{17}$$

Здесь r — ранг матрицы A; столбцы матрицы U — ортонормированные в $\mathbb{R}^m(M)$ собственные векторы матрицы $AC_{EE}^{+}A^{\mathrm{T}}B$; столбцы матрицы W — ортонормированные в $\mathbb{R}^n(N)$ собственные векторы матрицы $C_{EE}^{+}A^{\mathrm{T}}BA$; $M = K \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $N = K \in \mathbb{R}^{n\times n}$, матрица K определена в лемме 2, где следует положить $H = B \in \mathbb{R}^{m\times m}$ в случае матрицы M и $H = C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ в случае матрицы N; σ_i, $i = 1, \ldots, r$, — квадратные корни из ненулевых собственных значений матрицы $AC_{EE}^{+}A^{\mathrm{T}}B$ или $C_{EE}^{+}A^{\mathrm{T}}BA$; $O_k^l \in \mathbb{R}^{k\times l}$ — нулевая матрица.

Доказательство. Не ограничивая общности, будем считать, что $m \le n$ (в противном случае нужно заменить A на A^{T}). Рассмотрим матрицу $L = AC_{EE}^{+}A^{\mathrm{T}}B$, которая симмметризуема слева симметризатором B, поскольку для нее выполняются два первых условия из (10), а в силу первого равенства в (15) — и условие $B_{EE}^{+}BL = L$, т.е. условие (11) леммы 2. Тогда согласно лемме 2 матрица L приводится к диагональной форме с помощью M-взвешенного ($M = K \in \mathbb{R}^{m\times m}$) ортогонального преобразования, т.е. существуют невырожденные матрицы U и M, удовлетворяющие равенству (12) при $K = M$, и выполняется равенство (13) при $K = M$, $H = B$

$$U^{\mathrm{T}}MLU = \Lambda,\ U^{\mathrm{T}}BLU = \Lambda\,. \tag{18}$$

Следовательно, матрица L подобна диагональной матрице, поскольку $U^{\mathrm{T}}M = U^{-1}$, так что $U^{-1}LU = \Lambda$. Согласно лемме 2 (см. (14)) матрица L представляется в виде $L = U\Lambda U^{\mathrm{T}}M$, где $M = QD^2Q^{\mathrm{T}}$; Q — ортогональная матрица, которая диагонализует матрицу B, т.е. $Q^{\mathrm{T}}BQ = \Phi$, $\Phi = DI(B)D = \operatorname{diag}(\varphi_i)$, $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_r > 0$, $\varphi_{r+1}, \ldots, \varphi_n = 0$ — собственные значения матрицы B; r — ранг матрицы B, $D = \operatorname{diag}(\sqrt{\varphi_1}, \ldots, \sqrt{\varphi_r}, 1, \ldots, 1)$; $I(B)$ — матрица инерции для B; столбцы матрицы U образуют линейно независимую систему собственных векторов матрицы L, а диагональные элементы матрицы Λ являются соответствующими собственными значениями матрицы L.

В лемме 3 отмечено, что собственные значения матрицы L вещественные и неотрицательные и $r = rk(A)$. Обозначим их σ_i^2, где $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_r > 0$, $\sigma_{r+1}, \ldots, \sigma_m = 0$, $r = rk(AC_{EE}^{+}A^{\mathrm{T}}B)$. В силу первого и второго равенств в (18) имеем (см. [5]) $U^{\mathrm{T}}BAC_{EE}^{+}A^{\mathrm{T}}BU = \Sigma_1^2$. Определим матрицу $Z = U^{\mathrm{T}}BAC_{EE}^{+1/2}$, тогда $ZZ^{\mathrm{T}} = \Sigma_1^2$. В [5] показано, что $\| z_i \|_E = \sigma_i$, причем первые r строк матрицы Z — ненулевые попарно ортогональные в $\mathbb{R}^n(E)$ векторы $z_1^{\mathrm{T}}, \ldots, z_r^{\mathrm{T}}$, а остальные строки $z_{r+1}^{\mathrm{T}}, \ldots, z_m^{\mathrm{T}}$ являются нулевыми векторами.

Рассмотрим матрицу $F = C_{EE}^{+}A^{\mathrm{T}}BA$. В силу второго условия в (15) она симметризуема слева симметризатором C, поскольку $CC_{EE}^{+}A^{\mathrm{T}}BA = A^{\mathrm{T}}BA$. В силу равенства $C_{EE}^{+}CC_{EE}^{+} = C_{EE}^{+}$ для этой матрицы выполняется условие $C_{EE}^{+}CF = F$. Тогда согласно лемме 2 матрица F приводится к диагональной форме с помощью N-взвешенного ортогонального преобразования, т.е. существуют такие невырожденные матрицы W и N, $W^{\mathrm{T}}NW = E$, что $W^{\mathrm{T}}NFW = \Lambda$, $W^{\mathrm{T}}CFW = \Lambda$. Следовательно, матрица F подобна диагональной матрице, поскольку $W^{\mathrm{T}}N = W^{-1}$ и $W^{-1}LW = \Lambda$. Согласно лемме 2 матрица F представляется в виде $F = W\Lambda W^{\mathrm{T}}N$, где $N = QD^2Q^{\mathrm{T}}$; Q — ортогональная матрица, которая диагонализует матрицу C, т.е. $Q^{\mathrm{T}}CQ = \Phi$, $\Phi = DI(C)D = \mathrm{diag}(\varphi_i)$, $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_r > 0$, $\varphi_{r+1}, \ldots, \varphi_n = 0$ — собственные значения матрицы C; r — ранг матрицы C, $D = \mathrm{diag}\ (\sqrt{\varphi_1}, \ldots, \sqrt{\varphi_r}, 1, \ldots, 1)$; $I(C)$ — матрица инерции для C; столбцы матрицы W образуют линейно независимую систему собственных векторов матрицы F, а диагональные элементы матрицы Λ являются соответствующими собственными значениями матрицы F.

Построим взвешенную ортогональную в $\mathbb{R}^n(N)$ систему вектор-строк $w_1^{\mathrm{T}}, \ldots, w_n^{\mathrm{T}}$. Обозначим

$$w_i^{\mathrm{T}} = \sigma_i^{-1} z_i^{\mathrm{T}} N^{-1/2}, \quad i = 1, \ldots, r. \tag{19}$$

Тогда в силу определения взвешенного скалярного произведения имеем

$$(w_i,\ w_i)_N = \sigma_i^{-2} z_i^{\mathrm{T}} N^{-1/2} N N^{-1/2} z_i = \sigma_i^{-2} z_i^{\mathrm{T}} z_i, \tag{20}$$

а в силу определения векторной нормы в $\mathbb{R}^n(N)$, равенств (20) и $\| z_i \|_E = \sigma_i$ получаем $\| w_i \|_N = 1$, $i = 1, \ldots, r$. Причем очевидно, что векторы w_i^{T} попарно ортогональны в $\mathbb{R}^n(N)$, поскольку попарно ортогональны векторы z_i^{T} в $\mathbb{R}^n(E)$. Таким образом, имеем взвешенную ортонормированную систему вектор-строк w_i^{T}, $i = 1, \ldots, r$.

В качестве w_i^{T}, $i = r+1, \ldots, n$, выберем собственные векторы матрицы $F = C_{EE}^{+}A^{\mathrm{T}}BA$, соответствующие нулевому собственному значению. Ранее на основании леммы 2 отмечалось, что эти векторы ортонормированные в $\mathbb{R}^n(N)$, т.е. существуют такие невырожденные матрицы W и N, что $W^{\mathrm{T}}NW = E$, и определена структура матрицы N.

Покажем, что w_i^{T}, $i = r+1, \ldots, n$, являются попарно ортогональными с построенными выше вектор-строками w_i^{T}, $i = 1, \ldots, r$. Используя обозначения, введенные ранее при исследовании матрицы F, получаем

$$C^{1/2}N^{1/2} = Q\Phi^{1/2}Q^{\mathrm{T}}QDQ^{\mathrm{T}} = Q\Phi^{1/2}DQ^{\mathrm{T}} = Q\Phi Q^{\mathrm{T}} = C. \tag{21}$$

Учитывая второе равенство в (15), которое означает, что вектор-строки матрицы A принадлежат $\bar{\mathbb{R}}^n(C)$, т.е. удовлетворяют условию (1) при $H=C$, имеем $Z=U^{\mathrm{T}}BAC_{EE}^{+}CC_{EE}^{+1/2}=U^{\mathrm{T}}BAC_{EE}^{+1/2}C_{EE}^{+}C=U^{\mathrm{T}}BAC_{EE}^{+1/2}$, откуда $z_i^{\mathrm{T}}C_{EE}^{+}C=z_i^{\mathrm{T}}$. Обозначим w_i^{T}, $i=1,\dots,r$, а w_j^{T}, $j=r+1,\dots,n$, тогда в силу последнего равенства, а также равенств $C_{EE}^{+}C^{1/2}C=C^{1/2}$, (21) и определения взвешенного скалярного произведения имеем

$$(w_i,\, w_j)_N=\sigma_i^{-1}z_i^{\mathrm{T}}N^{-1/2}Nw_j=\sigma_i^{-1}z_i^{\mathrm{T}}C_{EE}^{+}CN^{1/2}w_j=$$

$$=\sigma_i^{-1}z_i^{\mathrm{T}}C_{EE}^{+}C^{1/2}Cw_j=\sigma_i^{-1}z_i^{\mathrm{T}}C^{1/2}w_j,$$

т.е.

$$(w_i,\, w_j)_N=\sigma_i^{-1}z_i^{\mathrm{T}}C^{1/2}w_j\,,\quad i=1,\dots,r\,,\ j=r+1,\dots,n\,. \tag{22}$$

Поскольку $Fw_j=\lambda w_j$ и $C_{EE}^{+}CF=F$, то $C_{EE}^{+}CFw_j=\lambda C_{EE}^{+}Cw_j=\lambda w_j$, т.е. нуль-пространства проекционной матрицы $C_{EE}^{+}C$ и матрицы F совпадают. Тогда ввиду того, что нуль-пространства матриц $C^{1/2}$ и $C_{EE}^{+}C$ также совпадают, в силу (22) следует ортогональность векторов w_i^{T} и w_j^{T}.

Пусть W^{T} — матрица, строками которой являются векторы $w_1^{\mathrm{T}},\dots,w_n^{\mathrm{T}}$, тогда $W^{\mathrm{T}}NW=E$. Следовательно, согласно определению 2 матрица W будет N-взвешенной ортогональной. Из (19) имеем $z_i^{\mathrm{T}}=\sigma_i w_i^{\mathrm{T}}N^{1/2}$ и матрицу Z можно представить в виде

$$Z=\Sigma W^{\mathrm{T}}N^{1/2}, \tag{23}$$

где $\Sigma\in\mathbb{R}^{m\times n}$ — матрица вида $\Sigma=\|\Sigma_1\ O\|$, $O\in\mathbb{R}^{m\times(n-m)}$ — нулевая матрица, а матрица $\Sigma_1\in\mathbb{R}^{m\times m}$, как описано ранее, определена формулой $\Sigma_1^2=U^{\mathrm{T}}BAC_{EE}^{+}A^{\mathrm{T}}BU$. Поскольку $Z=U^{\mathrm{T}}BAC_{EE}^{+1/2}$, в силу (23) следует

$$U^{\mathrm{T}}BAC_{EE}^{+1/2}=\Sigma W^{\mathrm{T}}N^{1/2}. \tag{24}$$

Аналогично (21) нетрудно убедиться, что

$$C_{EE}^{+1/2}N^{1/2}=C_{EE}^{+1/2}C^{1/2}. \tag{25}$$

Умножим справа левую и правую части равенства (24) на $N^{1/2}W$, учтем (25), второе равенство в (15), равенство $W^{\mathrm{T}}NW=E$ и получим $U^{\mathrm{T}}BAW=\Sigma$, т.е. формулу (16) приведения матрицы A к диагональному виду. Теперь умножим (24) слева на U, а справа — на $N^{1/2}$. Учитывая (25) и второе равенство в (15), получаем

$$UU^{\mathrm{T}}BA=U\Sigma W^{\mathrm{T}}N. \tag{26}$$

На основании первого условия в (15) и спектрального разложения матриц B_{EE}^{+} и B в обозначениях леммы 2, где положим $H=B$, имеем

$$MA=MB_{EE}^{+}BA=QD^2Q^{\mathrm{T}}Q\,\Phi_{EE}^{+}Q^{\mathrm{T}}Q\Phi\,Q^{\mathrm{T}}A=QI(B)\,\Phi\,Q^{\mathrm{T}}A=Q\Phi Q^{\mathrm{T}}A=BA,$$

т.е.

$$MA=BA\,. \tag{27}$$

В силу (27) и (12), где положим $K=M$, имеем $UU^{\mathrm{T}}BA=UU^{\mathrm{T}}MA=A$ и (26) перепишем в виде $A=U\,\Sigma W^{\mathrm{T}}N$, т.е. получим формулу (17).

Теперь для доказательства утверждения теоремы 1 осталось показать, что столбцы N-взвешенной ортогональной матрицы W являются собственными векторами матрицы $C_{EE}^{+} A^{\mathrm{T}} BA$. Учитывая (17), получаем

$$C_{EE}^{+} A^{\mathrm{T}} BA = C_{EE}^{+} NW\Sigma^{\mathrm{T}} U^{\mathrm{T}} BU\Sigma W^{\mathrm{T}} N. \tag{28}$$

По аналогии с равенством (21) нетрудно убедиться, что $C_{EE}^{+} N = C_{EE}^{+} C$. Тогда, поскольку вектор-столбцы матрицы W принадлежат $\overline{\mathbb{R}}^{n}(C)$, из (28) имеем

$$C_{EE}^{+} A^{\mathrm{T}} BA = W\Sigma^{\mathrm{T}} P\Sigma W^{\mathrm{T}} N, \tag{29}$$

где $P = U^{\mathrm{T}} BU$.

Как и ранее, предполагаем, что Q — ортогональная матрица, которая диагонализует симметризатор B. Тогда в обозначениях леммы 2, где положим $H = B$, имеем

$$P = U^{\mathrm{T}} BU = U^{\mathrm{T}} MM^{-1} BU = U^{\mathrm{T}} MQD^{-2} Q^{\mathrm{T}} Q \Phi Q^{\mathrm{T}} U = U^{\mathrm{T}} MQI(B) Q^{\mathrm{T}} U =$$
$$= U^{-1} QI(B) Q^{\mathrm{T}} U .$$

На основании последнего равенства легко убедиться, что P — проекционная матрица. Рассмотрим матрицу $P\Sigma$. Очевидно, что $rk(P) \geq rk(\Sigma)$ и $rk(\Sigma) = rk(AC_{EE}^{+} A^{\mathrm{T}} B) = rk(C_{EE}^{+} A^{\mathrm{T}} BA) = rk(A)$, поскольку ненулевые собственные значения матриц $AC_{EE}^{+} A^{\mathrm{T}} B$ и $C_{EE}^{+} A^{\mathrm{T}} BA$ совпадают, так как эти матрицы получены в результате перестановки матриц-сомножителей. Тогда в силу (29) ненулевые столбцы матрицы Σ не могут принадлежать нуль-пространству матрицы P, следовательно, $P\Sigma = \Sigma$ и равенство (29) переписываем в виде

$$C_{EE}^{+} A^{\mathrm{T}} BA = W \Sigma_2^2 W^{\mathrm{T}} N , \tag{30}$$

где $\Sigma_2^2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ и $\Sigma_2^2 = \mathrm{diag}(\sigma_1^2, \ldots, \sigma_r^2, 0, \ldots, 0)$.

Как отмечалось ранее, ненулевые собственные значения матриц $AC_{EE}^{+} A^{\mathrm{T}} B$ и $C_{EE}^{+} A^{\mathrm{T}} BA$ совпадают, следовательно диагональные элементы матрицы Σ_2^2 являются собственными значениями матрицы $C_{EE}^{+} A^{\mathrm{T}} BA$. После умножения равенства (30) справа на W в силу N-взвешенной ортогональности матрицы W получим $C_{EE}^{+} A^{\mathrm{T}} BAW = W \Sigma_2^2$, откуда следует, что столбцы матрицы W являются собственными векторами матрицы $C_{EE}^{+} A^{\mathrm{T}} BA$.

Теорема 1 доказана.

Теперь, используя результаты, доказанные в теореме 1, получим разложение взвешенной псевдообратной матрицы для матрицы A. Пусть $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $X \in \mathbb{R}^{n \times m}$, а $B \in \mathbb{R}^{m \times m}$ и $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ — симметричные положительно-полуопределенные матрицы. Рассмотрим взвешенную псевдообратную матрицу для матрицы A, которая в [19] определяется как матрица $X = A_{BC}^{+}$, удовлетворяющая четырем условиям:

$$AXA = A, \; XAX = X, \; (BAX)^{\mathrm{T}} = BAX, \; (CXA)^{\mathrm{T}} = CXA, \tag{31}$$

т.е. случай, когда матрицы AX и XA симметризуемы слева вырожденными симметризаторами B и C.

В [19] установлено, что для существования единственного решения системы матричных уравнений (31) необходимо и достаточно выполненение условий

$$rk(BA) = rk(A), \; AC_{EE}^{+} C = A . \tag{32}$$

Пусть

$$Ax = f , \; x \in \mathbb{R}^{n}, \; f \in \mathbb{R}^{m} \tag{33}$$

есть система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с произвольной матрицей $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

Определение 4. Вектор x^+, который является решением следующей задачи: найти
$$\min_{x \in \mathbb{R}^n(C) \cap \Omega} \| x \|_C , \ \Omega = \operatorname{Arg} \min_{x \in \mathbb{R}^n} \| Ax - f \|_B , \tag{34}$$
где B и C — симметричные положительно-полуопределенные матрицы, будем называть взвешенным нормальным псевдорешением с вырожденными весами B и C системы (33), порожденным псевдообратной матрицей, определенной условиями (31), (32).

Замечание 1. В [19] показано, что задача (34) имеет единственное решение, которое получено на основе взвешенной псевдообратной матрицы с вырожденными весами, определенной условиями (31), (32) и правой частью системы (33) согласно формуле $x^+ = A_{BC}^+ f$.

Замечание 2. Из (34) следует, что в случае, когда вектор f принадлежит нуль-пространству матрицы B, задача (34) будет иметь нулевое решение.

В дальнейшем вместо взвешенной псевдообратной матрицы A_{BC}^+, определенной условиями (31), (32), будем рассматривать взвешенную псевдообратную матрицу A_{BC}^+, определенную условиями (31), (15), т.е. первое условие $rk(BA) = rk(A)$ в (32) заменим более жестким условием $B_{EE}^+ BA = A$. Легко убедиться, что из первого условия в (15) следует первое условие в (32), поэтому все свойства взвешенной псевдообратной матрицы, определенной условиями (31), (32), будут иметь место для матрицы, определенной условиями (31), (15), в том числе, для последней будет справедливо замечание 1. Такая замена условия в определении взвешенной псевдообратной матрицы обусловлена тем, что взвешенное сингулярное разложение матрицы A получено в теореме 1 при выполнении условий (15).

Пусть $\Sigma_{EE}^+ \in \mathbb{R}^{n \times m}$ — матрица, полученная из Σ в (16) транспонированием и заменой положительных диагональных элементов обратными величинами. Непосредственной проверкой можно убедиться, что матрица Σ_{EE}^+ является псевдообратной матрицей Мура–Пенроуза для матрицы Σ, т.е. удовлетворяет условиям
$$\Sigma \Sigma_{EE}^+ \Sigma = \Sigma , \ \Sigma_{EE}^+ \Sigma \Sigma_{EE}^+ = \Sigma_{EE}^+ , \ (\Sigma \Sigma_{EE}^+)^{\mathrm{T}} = \Sigma \Sigma_{EE}^+ , \ (\Sigma_{EE}^+ \Sigma)^{\mathrm{T}} = \Sigma_{EE}^+ \Sigma .$$

Теорема 2. Взвешенная псевдообратная матрица, определенная условиями (31), при выполнении условий (15) имеет разложение
$$A_{BC}^+ = W \Sigma_{EE}^+ U^{\mathrm{T}} B , \tag{35}$$
где матрицы W, U, B определены в теореме 1, а матрица Σ_{EE}^+ — псевдообратная матрица Мура–Пенроуза для матрицы Σ из (16).

Доказательство. Чтобы убедиться в утверждении теоремы 2, покажем, что матрица $X = A_{BC}^+$ из (3) удовлетворяет системе (31) при выполнении условий (15).

Учитывая (27), разложения матриц A в (17) и A_{BC}^+ в (35), взвешенные ортогональности столбцов матрицы U в $\mathbb{R}^m(M)$ и матрицы W в $\mathbb{R}^n(N)$, получаем
$$AA_{BC}^+ A = AW \Sigma_{EE}^+ U^{\mathrm{T}} BA = U \Sigma W^{\mathrm{T}} NW \Sigma_{EE}^+ U^{\mathrm{T}} MU \Sigma W^{\mathrm{T}} N =$$
$$= U \Sigma \Sigma_{EE}^+ \Sigma W^{\mathrm{T}} N = U \Sigma W^{\mathrm{T}} N = A ,$$
т.е. матрица A_{BC}^+ удовлетворяет первому условию в (31).

В силу описанных свойств и разложений матриц A и A_{BC}^+ имеем
$$A_{BC}^+ AA_{BC}^+ = W \Sigma_{EE}^+ U^{\mathrm{T}} BAW \Sigma_{EE}^+ U^{\mathrm{T}} B = W \Sigma_{EE}^+ U^{\mathrm{T}} MU \Sigma W^{\mathrm{T}} NW \Sigma_{EE}^+ U^{\mathrm{T}} B =$$
$$= W \Sigma_{EE}^+ \Sigma \Sigma_{EE}^+ U^{\mathrm{T}} B = W \Sigma_{EE}^+ U^{\mathrm{T}} B = A_{BC}^+ ,$$
так что матрица A_{BC}^+ удовлетворяет и второму условию в (31).

Осталось показать, что матрицы BAA^+_{BC} и $CA^+_{BC}A$ симметричные. Учитывая взвешенную ортогональность столбцов матрицы W в $\mathbb{R}^n(N)$ и равенство $(\Sigma\Sigma^+_{EE})^{\mathrm{T}} = \Sigma\Sigma^+_{EE}$, получаем $BAA^+_{BC} = BU\Sigma W^{\mathrm{T}} NW\Sigma^+_{EE}U^{\mathrm{T}}B = BU\Sigma\Sigma^+_{EE}U^{\mathrm{T}}B$, откуда следует, что BAA^+_{BC} — симметричная матрица. Наконец, в силу равенства (27), разложения матрицы A^+_{BC} согласно формуле (35), второго условия в (15) и ортогональности столбцов матрицы U в $\mathbb{R}^m(M)$ имеем $CA^+_{BC}A = CW\Sigma^+_{EE}U^{\mathrm{T}}BA = CW\Sigma^+_{EE}U^{\mathrm{T}}MU\Sigma W^{\mathrm{T}}NC^+_{EE}C = CW\Sigma^+_{EE}\Sigma W^{\mathrm{T}}NC^+_{EE}C$. Нетрудно убедиться, что $NC^+_{EE}C = C$, в силу чего из последнего равенства получаем $CA^+_{BC}A = CW\Sigma^+_{EE}\Sigma W^{\mathrm{T}}C$, т.е. установили, что $CA^+_{BC}A$ — симметричная матрица.

Кроме того, из первого условия в (15) следует первое условие в (32), так что для матрицы из (35) выполняются условия (31), (32).

Теорема 2 доказана.

Замечание 3. Полученные взвешенные сингулярные разложения матриц и псевдообратных для них являются обобщением соответствующих разложений для случая положительно-определенных весов [3]. Так, например, в случае положительно-определенных весов условия (32) заведомо выполняются, матрицы U и W являются взвешенными ортогональными с весами B и C соответственно.

ВЗВЕШЕННОЕ СИНГУЛЯРНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ И ВЗВЕШЕННОЕ ПСЕВДООБРАЩЕНИЕ МАТРИЦ С ВЫРОЖДЕННЫМИ ВЕСАМИ. ВАРИАНТ II

Лемма 4. Симметризуемая слева положительно-полуопределенным симметризатором $H^+_{EE} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ матрица $L \in \mathbb{R}^{n\times n}$ при выполнении условия

$$HH^+_{EE}L = L \tag{36}$$

приводится к диагональной форме с помощью S-взвешенного ортогонального преобразования, т.е. существуют такие невырожденные матрицы G и S:

$$G^{\mathrm{T}}SG = E\,, \tag{37}$$

что

$$G^{\mathrm{T}}SLG = \Lambda,\ G^{\mathrm{T}}H^+_{EE}LG = \Lambda\,, \tag{38}$$

а матрица L представляется в виде

$$L = G\Lambda G^{\mathrm{T}}S\,, \tag{39}$$

где $S = QD^{-2}Q^{\mathrm{T}}$; Q — ортогональная матрица, которая диагонализует матрицу H, т.е. $Q^{\mathrm{T}}HQ = \Phi$, $\Phi = DI(H)D = \mathrm{diag}(\varphi_i)$, $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_r > 0$, $\varphi_{r+1}, \ldots, \varphi_n = 0$ — собственные значения матрицы H; r — ранг матрицы H, $D = \mathrm{diag}(\sqrt{\varphi_1}, \ldots, \sqrt{\varphi_r}, 1, \ldots, 1)$; $I(H)$ — матрица инерции для H; столбцы матрицы G образуют линейно независимую систему собственных векторов матрицы L, а диагональные элементы матрицы Λ являются соответствующими собственными значениями матрицы L.

Доказательство. Из условия (36) следует, что для указанной в лемме симметризуемой матрицы L симметризатором H^+_{EE} выполняется условие для рангов матриц согласно определению 1. Используя утверждение леммы 1, покажем, что симметризуемая вырожденным симметризатором H матрица L, удовлетворяющая условию (36), диагонализуемая, т.е. подобна диагональной матрице. Для этого достаточно показать, что матрицу L можно представить в виде произведения симметричной положительно-определенной матрицы и симметричной матрицы. Пусть выполняется (36), тогда, используя спектральные разложения матриц H и H^+_{EE} и ортогональность матрицы Q, получаем

$$L = HH_{EE}^{+}L = Q\,\Phi Q^{\mathrm{T}} Q\,\Phi_{EE}^{+} Q^{\mathrm{T}} L = QI(H)Q^{\mathrm{T}} L = QD^{2} Q^{\mathrm{T}} Q\,\Phi_{EE}^{+} Q^{\mathrm{T}} L =$$

$$= QD^{2} Q^{\mathrm{T}} H_{EE}^{+} L = S^{-1} H_{EE}^{+} L,$$

т.е.

$$L = S^{-1} H_{EE}^{+} L\,, \tag{40}$$

где $S^{-1} = QD^{2}Q^{\mathrm{T}}$ — симметричная положительно-определенная матрица, $H_{EE}^{+}L$ — симметричная матрица.

Следовательно, при выполнении условия (36) в силу леммы 1 матрица L является диагонализуемой. Поскольку $H_{EE}^{+}L$ — симметричная матрица, $L = S^{-1}H_{EE}^{+}L$ — симметризуемая матрица положительно-определенным симметризатором S. Пусть G_1 есть S-взвешенная ортогональная матрица, т.е. $G_1^{\mathrm{T}} SG_1 = E$. Обозначим симметричную матрицу $W = G_1^{\mathrm{T}} SLG_1$. Известно [18], что действительная симметричная матрица приводится к диагональному виду с помощью обычного ортогонального преобразования. Пусть G_2 — ортогональная матрица, которая приводит матрицу W к диагональному виду, т.е. $G_2^{\mathrm{T}} WG_2 = G_2^{\mathrm{T}} G_1^{\mathrm{T}} SLG_1G_2 = \Lambda$, где $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_i)$, $\lambda_i \in \sigma(W)$. Обозначим $G = G_1G_2$, тогда для G выполняется (37). Следовательно, G является S-взвешенной ортогональной матрицей и $G^{\mathrm{T}} SLG = \Lambda$, т.е. имеет место первое равенство в (38), где $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_i)$, $\lambda_i \in \sigma(W)$. Второе равенство в (38) следует из первого и равенства (40). Из (37) имеем $G^{\mathrm{T}} S = G^{-1}$, с учетом чего из первого равенства в (38) получим (39). В силу равенства $G^{\mathrm{T}} S = G^{-1}$ и первого равенства в (38) имеем $G^{-1}LG = \Lambda$, т.е. матрица L является матрицей простой структуры и, следовательно [18], столбцы матрицы G образуют линейно независимую систему собственных векторов матрицы L, а диагональные элементы матрицы Λ являются соответствующими собственными значениями матрицы L.

Лемма 4 доказана.

Аналогично лемме 3 доказывается лемма 5.

Лемма 5. Пусть $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, а $B \in \mathbb{R}^{m\times m}$ и $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ — симметричные положительно-полуопределенные матрицы, $G^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{m\times m}$ — невырожденная матрица. Тогда при выполнении условий $B_{EE}^{+}BA = A$ и $AC_{EE}^{+}C = A$ ранги матриц $CA^{\mathrm{T}} B_{EE}^{+} A$, $ACA^{\mathrm{T}} B_{EE}^{+}$, $G^{\mathrm{T}} B_{EE}^{+} AC$ и A совпадают; собственные значения матриц $CA^{\mathrm{T}} B_{EE}^{+} A$ и $ACA^{\mathrm{T}} B_{EE}^{+}$ вещественные и неотрицательные.

Теорема 3. Пусть $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ — произвольная матрица и выполняются условия

$$B_{EE}^{+}BA = A\,, \;\; AC_{EE}^{+}C = A\,, \tag{41}$$

где $B = B^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{m\times m}$ и $C = C^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ — положительно-полуопределенные матрицы, тогда для матрицы A существуют взвешенные ортогональные матрицы $G \in \mathbb{R}^{m\times m}$ и $V \in \mathbb{R}^{n\times n}$ соответственно с положительно-определенными весами $M \in \mathbb{R}^{m\times m}$ и $N \in \mathbb{R}^{n\times n}$ такие, что

$$G^{\mathrm{T}} B_{EE}^{+} AV = \Sigma = \begin{cases} \| \,\mathrm{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \ldots,\ \sigma_r, 0, \ldots,\ 0)\; O_m^{n-m} \,\|, & \text{если } m \le n, \\ \left\| \begin{matrix} \mathrm{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \ldots,\ \sigma_r, 0, \ldots,\ 0) \\ O_{m-n}^{n} \end{matrix} \right\|, & \text{если } m \ge n, \end{cases} \tag{42}$$

и

$$A = G\Sigma V^{\mathrm{T}} N. \tag{43}$$

Здесь r — ранг матрицы A; столбцы матрицы G — ортонормированные в $\mathbb{R}^m(M)$ собственные векторы матрицы $ACA^{\mathrm{T}}B_{EE}^{+}$; столбцы матрицы V — ортонормированные в $\mathbb{R}^n(N)$ собственные векторы матрицы $CA^{\mathrm{T}}B_{EE}^{+}A$; $M=S\in\mathbb{R}^{m\times m}$, $N=S\in\mathbb{R}^{n\times n}$, матрица S определена в лемме 4, где следует положить $H=B\in\mathbb{R}^{m\times m}$ в случае матрицы M и $H=C\in\mathbb{R}^{n\times n}$ в случае матрицы N; σ_i, $i=1,\ldots,r,$ — квадратные корни из ненулевых собственных значений матрицы $ACA^{\mathrm{T}}B_{EE}^{+}$ или $CA^{\mathrm{T}}B_{EE}^{+}A$; $O_k^l\in\mathbb{R}^{k\times l}$ — нулевая матрица.

Доказательство. Теорема 3 доказывается аналогично теореме 1. Поэтому приведем сокращенный вариант доказательства, т.е. его основные существенные элементы. Не ограничивая общности, будем считать, что $m\le n$. Рассмотрим матрицу $L=ACA^{\mathrm{T}}B_{EE}^{+}$, которая симмметризуема слева симметризатором B_{EE}^{+}. В силу первого равенства в (41) и равенства $B_{EE}^{+}B=BB_{EE}^{+}$ для нее выполняется условие $BB_{EE}^{+}=L$. Тогда согласно лемме 4 матрица L приводится к диагональной форме с помощью M-взвешенного ($M=S\in\mathbb{R}^{m\times m}$) ортогонального преобразования, т.е. существуют такие невырожденные матрицы G и M, удовлетворяющие равенству $G^{\mathrm{T}}MG=E$, что

$$G^{\mathrm{T}}MLG=\Lambda,\ G^{\mathrm{T}}BLG=\Lambda, \tag{44}$$

где $M=QD^{-2}Q^{\mathrm{T}}$; Q — ортогональная матрица, которая диагонализует матрицу B, т.е. $Q^{\mathrm{T}}BQ=\Phi$, $\Phi=DI(B)D=\mathrm{diag}(\varphi_i)$, $\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\ \varphi_r>0$, $\varphi_{r+1},\ldots,\ \varphi_n=0$ — собственные значения матрицы B; r — ранг матрицы B, $D=\mathrm{diag}(\sqrt{\varphi_1},\ldots,\sqrt{\varphi_r},1,\ldots,1)$; $I(B)$ — матрица инерции для B; столбцы матрицы G образуют линейно независимую систему собственных векторов матрицы L, а диагональные элементы матрицы Λ являются соответствующими собственными значениями матрицы L.

В лемме 5 отмечалось, что собственные значения матрицы L вещественные и неотрицательные, а $r=rk(A)$. Обозначим их σ_i^2, где $\sigma_1\ge\sigma_2\ge\ldots\ge\sigma_r>0$, $\sigma_{r+1},\ldots,\sigma_m=0$, $r=rk(ACA^{\mathrm{T}}B_{EE}^{+})$. По аналогии с [5] в силу первого и второго равенств в (44) имеем $G^{\mathrm{T}}B_{EE}^{+}ACA^{\mathrm{T}}B_{EE}^{+}G=\Sigma_1^2$. Определим матрицу $Z=G^{\mathrm{T}}B_{EE}^{+}AC^{1/2}$, тогда $ZZ^{\mathrm{T}}=\Sigma_1^2$ и аналогично теореме 1 в [5] заключаем, что $\|z_i\|_E=\sigma_i$ и первые r строк матрицы Z — ненулевые попарно ортогональные в $\mathbb{R}^n(E)$ векторы $z_1^{\mathrm{T}},\ldots,z_r^{\mathrm{T}}$, а остальные строки $z_{r+1}^{\mathrm{T}},\ldots,z_m^{\mathrm{T}}$ являются нулевыми векторами.

Рассмотрим матрицу $F=CA^{\mathrm{T}}B_{EE}^{+}A$. В силу второго условия в (41) она симметризуема слева симметризатором C_{EE}^{+}, поскольку $C_{EE}^{+}CA^{\mathrm{T}}B_{EE}^{+}A=A^{\mathrm{T}}B_{EE}^{+}A$. В силу равенства $CC_{EE}^{+}C=C$ для этой матрицы выполняется условие $CC_{EE}^{+}F=F$. Тогда согласно лемме 4 матрица F приводится к диагональной форме с помощью N-взвешенного ортогонального преобразования, т.е. существуют такие невырожденные матрицы V и N, $V^{\mathrm{T}}NV=E$, что $V^{\mathrm{T}}NFV=\Lambda, V^{\mathrm{T}}CFV=\Lambda$. Следовательно, матрица F подобна диагональной матрице, поскольку $V^{\mathrm{T}}N=V^{-1}$ и $V^{-1}FV=\Lambda$. Согласно лемме 4 матрица F представляется в виде $F=V\Lambda V^{\mathrm{T}}N$, где $N=QD^{-2}Q^{\mathrm{T}}$; Q — ортогональная матрица, которая диагонализует матрицу C, т.е. $Q^{\mathrm{T}}CQ=\Phi$, $\Phi=DI(C)D=\mathrm{diag}(\varphi_i)$, $\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\ \varphi_r>0$, $\varphi_{r+1},\ldots,\ \varphi_n=0$ — собственные значения матрицы C; r — ранг матрицы C, $D=\mathrm{diag}(\sqrt{\varphi_1},\ldots,\sqrt{\varphi_r},1,\ldots,1)$; $I(C)$ — матрица инерции для C; столбцы матрицы V образуют линейно независимую систему собственных векторов матрицы F, а диагональные элементы матрицы Λ являются соответствующими собственными значениями матрицы F.

Аналогично теореме 1 строим в $\mathbb{R}^n(N)$ ортонормированную систему вектор-строк $v_i^{\mathrm{T}} = \sigma_i^{-1} z_i^{\mathrm{T}} N^{-1/2}$, $i = 1, \ldots, r$, где $N = QD^{-2}Q^{\mathrm{T}}$ в отличие от теоремы 1. В качестве v_j^{T}, $j = r+1, \ldots, n$, выберем собственные векторы матрицы $F = CA^{\mathrm{T}} B_{EE}^{+} A$, соответствующие нулевому собственному значению, и аналогично теореме 1 устанавливаем, что v_j^{T}, $j = r+1, \ldots, n$, являются попарно ортогональными с вектор-строками v_i^{T}, $i = 1, \ldots, r$.

Дальнейшие рассуждения по схеме доказательства теоремы 1 приведут к утверждениям теоремы 3.

Теперь, используя результаты, доказанные в теореме 3, получаем разложение взвешенной псевдообратной матрицы для матрицы A. Пусть $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $X \in \mathbb{R}^{n \times m}$, а $B \in \mathbb{R}^{m \times m}$ и $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ — симметричные положительно-полуопределенные матрицы. Далее рассмотрим взвешенную псевдообратную матрицу для матрицы A, которая в [20] определяется как матрица $X = A_{BC}^{+}$, удовлетворяющая четырем условиям:

$$AXA = A,\ XAX = X,\ (AXB)^{\mathrm{T}} = AXB,\ (XAC)^{\mathrm{T}} = XAC, \tag{45}$$

т.е. случай, когда матрицы AX и XA симметризуемы справа вырожденными симметризаторами B и C.

В [20] установлено, что для существования единственного решения системы матричных уравнений (45) необходимо и достаточно выполнение условий

$$B_{EE}^{+} BA = A,\ rk(AC) = rk(A). \tag{46}$$

Определение 5. Вектор x^{+}, который является решением следующей задачи: найти

$$\min_{x \in \overline{\mathbb{R}}^{n}(C_{EE}^{+}) \cap \Omega} \| x \|_{C_{EE}^{+}},\ \Omega = \operatorname{Arg} \min_{x \in \mathbb{R}^n} \| Ax - f \|_{B_{EE}^{+}}, \tag{47}$$

где B_{EE}^{+} и C_{EE}^{+} — симметричные положительно-полуопределенные матрицы, будем называть взвешенным нормальным псевдорешением с вырожденными весами B_{EE}^{+} и C_{EE}^{+} системы (33), порожденным псевдообратной матрицей, определенной условиями (45), (46).

Замечание 4. В [20] показано, что задача (47) имеет единственное решение, которое определяется взвешенной псевдообратной матрицей с вырожденными весами, определенной условиями (45), (46) и правой частью системы (33) согласно формуле $x^{+} = A_{BC}^{+} f$.

Замечание 5. Из (47) следует, что в случае, когда вектор f принадлежит нуль-пространству матрицы B_{EE}^{+}, задача (47) будет иметь нулевое решение.

В дальнейшем вместо взвешенной псевдообратной матрицы A_{BC}^{+}, определенной условиями (45), (46), будем рассматривать взвешенную псевдообратную матрицу A_{BC}^{+}, определенную условиями (45), (41), т.е. второе условие $rk(AC) = rk(A)$ в (46) заменим более жестким условием $AC_{EE}^{+}C = A$. Легко убедиться, что из второго условия в (41) следует второе условие в (46), поэтому все свойства взвешенной псевдообратной матрицы, определенной условиями (45), (46), будут иметь место для матрицы, определенной условиями (45), (41), в том числе, для последней будет справедливо замечание 4. Такая замена условия в определении взвешенной псевдообратной матрицы обусловлена тем обстоятельством, что взвешенное сингулярное разложение матрицы A получено в теореме 3 при выполнении условий (41).

Теорема 4. Взвешенная псевдообратная матрица для матрицы A при выполнении условий (41) имеет разложение

$$A_{BC}^{+} = V\,\Sigma_{EE}^{+} G^{\mathrm{T}} B_{EE}^{+}\,, \tag{48}$$

где матрицы V, G, B определены в теореме 3, а матрица Σ_{EE}^{+} — псевдообратная матрица Мура–Пенроуза для матрицы Σ из (42).

Доказательство. Чтобы убедиться в утверждении теоремы 4, покажем, что матрица $X = A_{BC}^{+}$ из (48) удовлетворяет системе (45) при выполнении условий (41).

Нетрудно убедиться в справедливости равенств

$$MB = B_{EE}^{+} B\,,\ \ NC = C_{EE}^{+} C\,. \tag{49}$$

Действительно,

$$MB = QD^{-2}Q^{\mathrm{T}} Q\,\Phi Q^{\mathrm{T}} = QD^{-2}\,\Phi Q^{\mathrm{T}} = QI(C)Q^{\mathrm{T}} = Q\,\Phi_{EE}^{+} Q^{\mathrm{T}} Q\,\Phi Q^{\mathrm{T}} = B_{EE}^{+} B.$$

Аналогично получаем второе равенство в (49).

Учитывая (49), разложения матриц A и A_{BC}^{+}, представленные соответственно формулами (43) и (48), ортогональность столбцов матрицы G в $\mathbb{R}^{m}(M)$ и V в $\mathbb{R}^{n}(N)$, равенство $\Sigma\Sigma_{EE}^{+}\Sigma = \Sigma$, получаем $AA_{BC}^{+}A = G\Sigma V^{\mathrm{T}} NV\Sigma_{EE}^{+} G^{\mathrm{T}} MG\Sigma V^{\mathrm{T}} N = G\Sigma V^{\mathrm{T}} N = A$, т.е. матрица A_{BC}^{+} удовлетворяет первому условию в (45).

В силу описанных ранее свойств матриц G и V, разложений матриц A и A_{BC}^{+} и равенства $\Sigma_{EE}^{+}\Sigma\Sigma_{EE}^{+} = \Sigma_{EE}^{+}$ имеем

$$A_{BC}^{+} AA_{BC}^{+} = V\,\Sigma_{EE}^{+} G^{\mathrm{T}} MG\,\Sigma V^{\mathrm{T}} NV\,\Sigma_{EE}^{+} G^{\mathrm{T}} M = V\,\Sigma_{EE}^{+} G^{\mathrm{T}} M = A_{BC}^{+}\,,$$

так что матрица A_{BC}^{+} удовлетворяет и второму условию в (45).

Осталось показать, что матрицы BAA_{BC}^{+} и $CA_{BC}^{+}A$ симметричные. Отметим, что, поскольку $B_{EE}^{+}BL = L$ и $C_{EE}^{+}CF = F$, имеем

$$B_{EE}^{+} BG = G\,,\ \ C_{EE}^{+} CV = V, \tag{50}$$

так как столбцы матриц G и V — собственные векторы соответственно матриц L и F.

Учитывая разложения матриц A и A_{BC}^{+}, ортогональность столбцов матрицы V в $\mathbb{R}^{n}(N)$ и первые равенства в (49), (50), получаем

$$AA_{BC}^{+} B = G\Sigma V^{\mathrm{T}} NV\Sigma_{EE}^{+} G^{\mathrm{T}} MB = G\Sigma\Sigma_{EE}^{+} G^{\mathrm{T}} MB = G\Sigma\Sigma_{EE}^{+} G^{\mathrm{T}} B_{EE}^{+} B = G\Sigma\Sigma_{EE}^{+} G^{\mathrm{T}},$$

откуда следует, что $AA_{BC}^{+}B$ — симметричная матрица.

Наконец, в силу вторых равенств в (49), (50), разложений матриц A и A_{BC}^{+}, а также ортогональности столбцов матрицы G в $\mathbb{R}^{m}(M)$ имеем $A_{BC}^{+}AC = V\,\Sigma_{EE}^{+} G^{\mathrm{T}} MG\,\Sigma V^{\mathrm{T}} NC = V\,\Sigma_{EE}^{+}\Sigma V^{\mathrm{T}} NC = V\,\Sigma_{EE}^{+}\Sigma V^{\mathrm{T}} C_{EE}^{+} C = V\,\Sigma_{EE}^{+}\Sigma V^{\mathrm{T}}$, т.е. установили, что $A_{BC}^{+}AC$ — симметричная матрица.

Кроме того, из второго условия в (41) следует второе условие в (46), так что для матрицы из (48) выполняются условия (45), (46).

Теорема 4 доказана.

РАЗЛОЖЕНИЯ В РЯДЫ И ПРОИЗВЕДЕНИЯ ВЗВЕШЕННЫХ ПСЕВДООБРАТНЫХ МАТРИЦ С ВЫРОЖДЕННЫМИ ВЕСАМИ

В работе [5] на основании сингулярного разложения взвешенных псевдообратных матриц с вырожденными весами получены и исследованы разложения в матричные степенные ряды и произведения с отрицательными показателями степеней взвешенных псевдообратных матриц, определенных условиями (31), (15).

Аналогично можно получить на основании теоремы 4 разложения в матричные степенные ряды и произведения с отрицательными показателями степеней взвешенных псевдообратных матриц, определенных условиями (45), (41).

Теорема 5. Для произвольной матрицы $A \neq 0 \in \mathbb{R}^{m\times n}$, симметричных положительно-полуопределенных матриц $B \in \mathbb{R}^{m\times m}$ и $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$, удовлетворяющих условиям (41), и для действительного числа $0<\delta<\infty$ имеют место следующие разложения взвешенных псевдообратных матриц, определенных условиями (45), (41), в матричные степенные ряды:

$$A_{BC}^{+} = \sum_{k=1}^{\infty} \delta^{k-1} CA^{\mathrm{T}} B_{EE}^{+1/2} (B_{EE}^{+1/2} ACA^{\mathrm{T}} B_{EE}^{+1/2} + \delta E)^{-k} B_{EE}^{+1/2} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \delta^{k-1} (CA^{\mathrm{T}} B_{EE}^{+} A + \delta E)^{-k} CA^{\mathrm{T}} B_{EE}^{+} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \delta^{k-1} CA^{\mathrm{T}} B_{EE}^{+} (ACA^{\mathrm{T}} B_{EE}^{+} + \delta E)^{-k} = \sum_{k=1}^{\infty} \delta^{k-1} C (A^{\mathrm{T}} B_{EE}^{+} AC + \delta E)^{-k} A^{\mathrm{T}} B_{EE}^{+} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \delta^{k-1} C^{1/2} (C^{1/2} A^{\mathrm{T}} B_{EE}^{+} AC^{1/2} + \delta E)^{-k} C^{1/2} A^{\mathrm{T}} B_{EE}^{+} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \delta^{k-1} CA^{\mathrm{T}} (B_{EE}^{+} ACA^{\mathrm{T}} + \delta E)^{-k} B_{EE}^{+},$$

причем

$$\| A_{BC}^{+} - A_{\delta,\, p}^{+} \|_{C_{EE}^{+} B^{1/2}} \leq \sigma_{*}^{-1} \delta^{p} (\delta + \sigma_{*}^{2})^{-p}, \qquad (51)$$

где $A_{\delta,p}^{+} = \sum_{k=1}^{p} \delta^{k-1} CA^{\mathrm{T}} B_{EE}^{+1/2} (B_{EE}^{+1/2} ACA^{\mathrm{T}} B_{EE}^{+1/2} + \delta E)^{-k} B_{EE}^{+1/2}$, $p = 1, 2, \ldots$, σ_{*} — минимальный ненулевой диагональный элемент матрицы Σ из (42).

На основании теоремы 5 аналогично [5] имеем следующее разложение взвешенной псевдообратной матрицы с вырожденными весами в матричное степенное произведение:

$$A_{BC}^{+} = \prod_{k=0}^{\infty} \{E + \delta^{2^k} (CA^{\mathrm{T}} B_{EE}^{+} A + \delta E)^{-(2^k)}\} (CA^{\mathrm{T}} B_{EE}^{+} A + \delta E)^{-1} CA^{\mathrm{T}} B_{EE}^{+}\,. \qquad (52)$$

Обозначим

$$A_{\delta,\, n}^{+} = \prod_{k=0}^{n-1} \{E + \delta^{2^k} (CA^{\mathrm{T}} B_{EE}^{+} A + \delta E)^{-(2^k)}\} (CA^{\mathrm{T}} B_{EE}^{+} A + \delta E)^{-1} CA^{\mathrm{T}} B_{EE}^{+}\,, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Тогда в силу (52) и определения $A_{\delta,\, n}^{+}$ имеем

$$\| A_{BC}^{+} - A_{\delta,\, n}^{+} \|_{C_{EE}^{+} B^{1/2}} \leq \sigma_{*}^{-1} \delta^{2^n} (\delta + \sigma_{*}^{2})^{-(2^n)}. \qquad (53)$$

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ ЗАДАЧ

Из оценки (51) следует, что для любого $p = 1, 2, \ldots$ имеем следующее предельное представление взвешенной псевдообратной матрицы:

$$A_{BC}^{+} = \lim_{\delta \to +0} \sum_{k=1}^{p} \delta^{k-1} (CA^{\mathrm{T}} B_{EE}^{+} A + \delta E)^{-k} CA^{\mathrm{T}} B_{EE}^{+}\,, \qquad (54)$$

а из оценки (53) для любого $n = 1, 2, \ldots$ имеем

$$A_{BC}^{+} = \lim_{\delta \to +0} \prod_{k=0}^{n-1} \{E + \delta^{2^k} (CA^{\mathrm{T}} B_{EE}^{+} A + \delta E)^{-(2^k)}\} (CA^{\mathrm{T}} B_{EE}^{+} A + \delta E)^{-1} CA^{\mathrm{T}} B_{EE}^{+}. \qquad (55)$$

Из предельных представлений (54), (55) взвешенных псевдообратных матриц следует, что на основании предложенных предельных представлений можно вычислять приближения к взвешенным псевдообратным матрицам. Оценки близости взвешенных псевдообратных матриц и их приближенных значений определены формулами (51), (53).

На основании формулы (54) получим следующие СЛАУ для вычисления приближения к взвешенному нормальному псевдорешению системы (33):

$$(CA^{\mathrm{T}} B_{EE}^{+} A + \delta E)^{p-m} x = \sum_{k=1}^{p} \delta^{k-1} (CA^{\mathrm{T}} B_{EE}^{+} A + \delta E)^{p-m-k} CA^{\mathrm{T}} B_{EE}^{+} f, \quad (56)$$

$$m = 0, 1, \ldots, p\,.$$

В частности, получим

$$(CA^{\mathrm{T}} B_{EE}^{+} A + \delta E)^{p} x = \sum_{k=1}^{p} \delta^{k-1} (CA^{\mathrm{T}} B_{EE}^{+} A + \delta E)^{p-k} CA^{\mathrm{T}} B_{EE}^{+} f \ \text{ при } \ m = 0,$$

$$(CA^{\mathrm{T}} B_{EE}^{+} A + \delta E) x = \sum_{k=1}^{p} \delta^{k-1} (CA^{\mathrm{T}} B_{EE}^{+} A + \delta E)^{1-k} CA^{\mathrm{T}} B_{EE}^{+} f \ \text{ при } \ m = p-1,$$

$$x = \sum_{k=1}^{p} \delta^{k-1} (CA^{\mathrm{T}} B_{EE}^{+} A + \delta E)^{-k} CA^{\mathrm{T}} B_{EE}^{+} f \ \text{ при } \ m = p.$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема 6. Пусть x^{+} — решение задачи (47), а $x_{\delta,p}$ — решение одной из систем (56), тогда справедлива оценка

$$\| x^{+} - x_{\delta,\, p} \|_{C_{EE}^{+}} \le \sigma_{*}^{-1} \delta^{p} (\delta + \sigma_{*}^{2})^{-p} \| f \|_{B_{EE}^{+}},$$

где σ_{*} определен в теореме 5.

На основании (55) имеем следующие регуляризованные задачи для нахождения приближения к решению задачи (33):

$$(CA^{\mathrm{T}} B_{EE}^{+} A + \delta E)^{n-m} x = \prod_{k=0}^{n-1} \{ (CA^{\mathrm{T}} B_{EE}^{+} A + \delta E)^{n-m-1} +$$

$$+ \delta^{2^{k}} (CA^{\mathrm{T}} B_{EE}^{+} A + \delta E)^{n-m-(2^{k})-1} \} CA^{\mathrm{T}} B_{EE}^{+} f\,, \ m = 0, 1, \ldots, n. \quad (57)$$

Теорема 7. Пусть x^{+} — решение задачи (47), а $x_{\delta,n}$ — решение одной из систем (57), тогда справедлива оценка

$$\| x^{+} - x_{\delta,n} \|_{C_{EE}^{+}} \le \sigma_{*}^{-1} \delta^{2^{n}} (\delta + \sigma_{*}^{2})^{-(2^{n})} \| f \|_{B_{EE}^{+}}.$$

Замечание 6. Из (56) и (57) следует, что в случае, когда вектор f принадлежит нуль-пространству матрицы B_{EE}^{+} , эти задачи будут иметь нулевое решение.

Отметим, что метод регуляризации для нахождения нормальных псевдорешений СЛАУ и для вычисления *L*-псевдорешений исследован соответственно в [21, 22]. В [23] описана расширенная регуляризованная задача для нахождения нормальных псевдорешений СЛАУ.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе предложено и исследовано два варианта взвешенных сингулярных разложений матриц с вырожденными весами с использованием взвешенных ортогональных матриц. Определены достаточные условия существования построенных сингулярных разложений матриц. На основании взвешенных сингулярных разложениях матриц даны разложения взвешенных псевдообратных для них матриц с положительно-полуопределенными весовыми матрицами. Показано, что полученные разложения взвешенных псевдообратных матриц можно использовать при обосновании их разложений в матричные степенные ряды и матричные степенные произведения с отрицательными показателями степеней. Определено применение этих разложений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Форсайт Дж., Молер К. Численное решение систем линейных алгебраических уравнений. — М.: Мир, 1969. — 168 с.
2. Van Loan C.F. Generalizing the singular value decomposition // SIAM J. Numer. Anal. — 1976. — **13**, N 1. — P. 76–83.
3. Галба Е.Ф. Взвешенное сингулярное разложение и взвешенное псевдообращение матриц // Укр. мат. журн. — 1996. — **48**, № 10. — С. 1426–1430.
4. Лоусон Ч., Хенсон Р. Численное решение задач метода наименьших квадратов. — М.: Наука, 1986. — 232 с.
5. Галба Е.Ф., Дейнека В.С., Сергиенко И.В. Взвешенное сингулярное разложение и взвешенное псевдообращение матриц с вырожденными весами // Журн. вычисл. математики и мат. физики. — 2012. — **52**, № 12. — С. 2115–2132.
6. Химич А.Н. Оценки возмущений для решения задачи наименьших квадратов // Кибернетика и системный анализ. — 1996. — № 3. — С. 142–145.
7. Химич А.Н., Николаевская Е.А. Анализ достоверности компьютерных решений систем линейных алгебраических уравнений с приближенно заданными исходными данными // Кибернетика и системный анализ. — 2008. — № 6. — С. 83–95.
8. Николаевская Е.А., Химич А.Н. Оценка погрешности взвешенного нормального псевдорешения с положительно-определенными весами // Журн. вычисл. математики и мат. физики. — 2009. — **49**, №.3. — С. 422–430.
9. Галба Е.Ф., Дейнека В.С., Сергиенко И.В. Необходимые и достаточные условия существования одного из вариантов взвешенного сингулярного разложения матриц с вырожденными весами // Докл. РАН. — 2014. — **455**, № 3. — С. 261–264.
10. Moore E.H. On the reciprocal of the general algebraic matrix // Abstract. Bull. Amer. Math. Soc. 1920. — **26**. — P. 394–395.
11. Penrose R. A generalized inverse for matrices // Proc. Cambridge Phil. Soc. — 1955. — **51**, N 3. — P. 406–413.
12. Алберт А. Регрессия, псевдоинверсия и рекуррентное оценивание.— М.: Наука, 1975. — 223 с.
13. Галба Е.Ф., Молчанов И.Н., Скопецкий В.В. Итерационные методы для вычисления взвешенной псевдообратной матрицы с вырожденными весами // Кибернетика и системный анализ. — 1999. — № 5. — С. 150–169.
14. Галба Е.Ф. Итерационные методы для вычисления взвешенного нормального псевдорешения с вырожденными весами // Журн. вычисл. математики и мат. физики. — 1999. — **39**, № 6. — С. 882–896.
15. Lancaster P., Rozsa P. Eigenvectors of H-self-adjoint matrices // Z. angew. Math. und Mech. — 1984. — **64**, N 9. — S. 439–441.
16. Икрамов Х.Д. Об алгебраических свойствах классов псевдоперестановочных и H-самосопряженных матриц // Журн. вычисл. математики и мат. физики. — 1992. — **32**, № 8. — С. 155–169.
17. Икрамов Х.Д. Задачник по линейной алгебре. — М.: Наука, 1975. — 320 с.
18. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. — М.: Мир, 1989. — 656 с.
19. Галба Е.Ф., Дейнека В.С., Сергиенко И.В. Взвешенные псевдообратные матрицы и взвешенные нормальные псевдорешения с вырожденными весами // Журн. вычисл. математики и мат. физики. — 2009. — **49**, №.8. — С. 1347–1363.
20. Сергиенко И.В., Галба Е.Ф., Дейнека В.С. Теоремы существования и единственности в теории взвешенной псевдоинверсии с вырожденными весами // Кибернетика и системный анализ. — 2011. — № 1. — С. 14–33.
21. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. — М.: Наука, 1974. — 288 с.
22. Морозов В.А. Регулярные методы решения некорректно поставленных задач. — М.: Наука, 1987. — 240 с.
23. Жданов А.И. Метод расширенных регуляризованных нормальных уравнений // Журн. вычисл. математики и мат. физики. — 2012. — **52**, № 2. — С. 205–208.

Поступила 22.09.2014