УДК 519.713.4

И.К. РЫСЦОВ

ПРИМИТИВНЫЕ И НЕПРИВОДИМЫЕ АВТОМАТЫ

Аннотация. Введено понятие неприводимого автомата и показано, что всякий неприводимый автомат является примитивным. Доказана неприводимость для возвратных примитивных автоматов с единичным дефектом. Показано также, что теорему Манна–Понизовского о неприводимых представлениях полугрупп можно использовать для линейных представлений автоматов

Ключевые слова: конечные автоматы, моноиды, полугруппы.

ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] Й. Черны сформулировал свою знаменитую гипотезу о том, что в любом возвратном автомате с n состояниями существует возвратное слово, длиной не большей чем $(n-1)^2$. Несмотря на многочисленные исследования, проблема до сих пор не решена. Если математическая проблема не решается, значит, не хватает «хорошей» теории. Для проблемы Черны эта мысль тем более актуальна, поскольку уже давно стало понятно, что только комбинаторными методами ее решить не удастся. В данном случае можно применять теорию полугрупп, как наиболее близкую к автоматам алгебраическую теорию. Недавно решением проблемы Черны занялась группа алгебраистов из Израиля, Канады, Португалии, России и ситуация начала меняться. В частности, Альмейда и Стейнберг в работе [2] использовали теорему Манна–Понизовского о линейных представлениях полугрупп для доказательства обобщенной гипотезы Черны для одного класса автоматов. В их работе интересны не только полученные результаты, но и методы исследования.

В настоящей статье вводится понятие неприводимого автомата и показано, что теорию Манна–Понизовского можно также применить для исследования линейных представлений неприводимых автоматов.

КОНЕЧНЫЕ АВТОМАТЫ И МОНОИДЫ

Пусть S — конечное множество, состоящее из n элементов, тогда S^n — множество всех одноместных функций (преобразований) на этом множестве $S^n = \{f \mid f : S \to S\}$. Заметим, что данное множество содержит n^n элементов и находится во взаимно-однозначном соответствии с множеством всех векторов, длиной n, компоненты которых берутся из S. Поэтому множество S^n можно считать декартовой степенью множества S.

Обозначим $(s)f$ значение преобразования f на элементе s из S. Здесь преобразование расположено справа от аргумента, что позволяет не менять порядка их следования при суперпозиции. Область значений (образ) преобразования f обозначим $\mathrm{Im}(f) = (S)f$, а его ядро $\mathrm{Ker}(f) = \{(s,t) \mid (s)f = (t)f\}$. Заметим, что ранг эквивалентности $\mathrm{Ker}(f)$ совпадает с числом $|\mathrm{Im}(f)|$, которое называется рангом преобразования f и обозначается $\mathrm{rk}(f)$. Число $n - \mathrm{rk}(f)$ назовем дефектом преобразования f и обозначим $\mathrm{df}(f)$.

Известно, что преобразования можно переумножать с помощью операции суперпозиции (последовательного применения). Так, если $f : S \to S$ и $g : S \to S$ — два преобразования, то их произведение $f \cdot g$ определяется по формуле

$$(s)f \cdot g = ((s)f)g \quad \forall s \in S. \qquad (1)$$

Напомним, что полугруппой называется множество с ассоциативной операцией, а моноидом — полугруппа с единицей. Множество S^n вместе с введенной операцией умножения (1) — моноид (некоммутативный), поскольку ассоциативность этой операции очевидна, а единица — тождественное преобразование. Этот моноид назовем полным моноидом преобразований на множестве S или глобальным моноидом, а его элементы — подстановками n-го порядка. Подмоноиды полного моноида называются моноидами преобразований на множестве S.

Конечным автоматом (без выхода) называется тройка $A=(S, X, F)$, где S — конечное множество состояний, состоящее из n элементов, X — конечный входной алфавит, а F — отображение вида $F: X \to S^n$, которое каждому символу x из X ставит в соответствие преобразование $F(x)$ из S^n. Число n называется числом состояний автомата.

Свободным моноидом X^* называется множество всех слов (последовательностей) в алфавите X вместе с операцией конкатенации (приписывания) слов. Это единственный бесконечный моноид, рассматриваемый в настоящей статье. Отображение $F: X \to S^n$ естественным образом продолжается до гомоморфизма моноидов

$$F: X^* \to S^n, \tag{2}$$

когда каждому входному слову $w = x_1 \ldots x_m$, $x_i \in X$, $1 \le i \le m$, сопоставляется произведение базовых подстановок $F(w) = F(x_1) \cdot \ldots \cdot F(x_m)$ в моноиде S^n. Будем также считать, что пустому слову (единице свободного моноида) соответствует тождественное преобразование на S.

Область значений $F(X^*)$ гомоморфизма (2) назовем моноидом переходов автомата A и обозначим M_A. Данный моноид можно рассматривать как алгебраическое замыкание базового набора подстановок $F(X)$ в полном моноиде S^n, т.е. $M_A = \langle F(X) \rangle$. Отметим, что моноид переходов конечен, поскольку $M_A \subseteq S^n$, и содержит не более n^n элементов.

Отображение F определяет функцию переходов автомата по формуле

$$F(s, w) = (s) f, \tag{3}$$

где $f = F(w)$, $s \in S$, $w \in X^*$. Таким образом, функция переходов сводится к аппликации, т.е. к применению подстановки f из M_A к состоянию s. При этом косвенное действие свободного моноида на множестве состояний далее будем заменять прямым действием моноида переходов.

Пусть T — подмножество состояний из S и $W \subseteq X^*$, тогда положим $F(T, W) = \{F(s, w) | s \in T, w \in W\}$. Аналогично, если $Y \subseteq M_A$, то считаем, что $(T)Y = \{(s) f \mid s \in T, f \in Y\}$. Напомним, что подавтоматом автомата A называется подмножество состояний T, которое инвариантно относительно действия моноида, т.е. $(T) M_A \subseteq T$ или, что равносильно, $F(T, X) \subseteq T$. Если состояние s образует подавтомат, т.е. $(s) M_A = \{s\}$, то s называется тупиковым (неподвижным) состоянием.

Если $t \in (s) M_A$, то состояние t называется достижимым из s. Состояния s и t называются взаимно достижимыми, если каждое из них достижимо из другого состояния. Отношение взаимной достижимости является отношением эквивалентности на множестве состояний, а его классы называются компонентами сильной связности.

Автомат A называется транзитивным (сильно связным), если для любого его состояния s выполняется условие $(s) M_A = S$. Последнее равносильно тому, что в автомате не имеется собственных подавтоматов, отличных от всего автомата.

Ядром автомата называется совокупность его сильно связных компонент, которые являются подавтоматами. Нетрудно видеть, что из любого состояния автомата можно с помощью некоторого входного слова перейти в ядро автомата.

Пусть π — бинарное отношение на множестве состояний S и $Y \subseteq M_A$, тогда считаем, что $(\pi)Y = \{((s)f, (t)f) \mid (s,t) \in \pi, f \in Y\}$. Отношение эквивалентности σ на S называется конгруенцией автомата A, если оно инвариантно относительно действия моноида автомата, т.е. если $(\sigma)M_A \subseteq \sigma$.

Определение 1. Транзитивный автомат называется примитивным, если он не имеет нетривиальных конгруенций, т.е. отличных от тождественного отношения Δ_S и универсального отношения $S \times S$.

Назовем бинарное отношение $\pi \subseteq S \times S$ полным, если его эквивалентное замыкание совпадает с универсальным отношением $S \times S$. На языке графов это означает, что граф (S, π) является связным, если считать его ребра неориентированными. Следующая теорема дает критерий примитивности автомата.

Теорема 1. Автомат A примитивный тогда и только тогда, когда для любых различных состояний s и t отношение $(s,t)M_A$ полное.

Доказательство. Действительно, отношение $\pi = (s,t)M_A$ является инвариантным, поскольку $(\pi)M_A = ((s,t)M_A)M_A = (s,t)M_A \cdot M_A = (s,t)M_A = \pi$. Значит, эквивалентное замыкание этого отношения $\sigma = \overline{\pi}$ также инвариантно и, следовательно, является конгруенцией. Тогда из примитивности автомата A и включений $\Delta_S \subset \pi \subseteq \sigma$ следует, что $\sigma = S \times S$.

И наоборот, если автомат A непримитивный и имеет нетривиальную конгруенцию σ, то для пары различных состояний (s,t) из σ будем иметь следующие включения: $(s,t)M_A \subseteq (\sigma)M_A \subseteq \sigma \subset S \times S$.

Теорема доказана.

ВОЗВРАТНЫЕ АВТОМАТЫ И АВТОМАТЫ С НУЛЕМ

Напомним, что непустое подмножество I моноида M называется правым (соответственно левым) идеалом в M, если $I \cdot M \subseteq I$ ($M \cdot I \subseteq I$). В некоммутативном моноиде необходимо различать правые и левые идеалы. Двусторонним идеалом или идеалом называется подмножество, которое является и левым, и правым идеалом. Идеалы моноида упорядочиваются по включению и образуют (частично) упорядоченное множество, которое называется «остовом» моноида. Минимальные элементы этого упорядоченного множества называются минимальными идеалами.

Очевидно, что конечный моноид имеет, по крайней мере, один минимальный идеал, но оказывается, что он единственный и наименьший, т.е. содержится во всех других идеалах. Действительно, если I, J — идеалы моноида M, то их пересечение $I \cap J$ будет непустым, поскольку оно должно содержать их произведение и, следовательно, являться идеалом моноида. Таким образом, пересечение всех идеалов конечного моноида M будет его наименьшим идеалом, который называется ядром моноида и обозначается $K(M)$.

Подстановку f из полного моноида S^n назовем константной или константой, если она является постоянной функцией, которая отображает все состояния в одно и то же состояние. Очевидно, что ранг константы равен единице и всего в полном моноиде имеется n констант, которые образуют его ядро $K(S^n) = \{f \mid \mathrm{rk}(f) = 1\}$. Множество всех подстановок ранга r из S^n обозначим $\Delta_r(n)$.

Входное слово w называется возвратным в автомате $A = (S, X, F)$, если подстановка $F(w)$ является константой. Автомат A называется возвратным (синхронизируемым), если его моноид содержит константную подстановку. Пусть A — возвратный транзитивный автомат с n состояниями, тогда из определений следует равенство

$$K(M_A) = \Delta_1(n) = \{f \mid \mathrm{rk}(f) = 1\}. \qquad (4)$$

Автоматом с нулем (или 0-автоматом) называется автомат, ядро которого состоит из одного состояния — нуля. Автомат с нулем имеет единственное неподвижное состояние, которое достижимо из всех других состояний. Поэтому любой 0-автомат будет возвратным, и входное слово, которое переводит все состояния автомата в ноль, будем называть нулевым.

Автомат с нулем A называется 0-транзитивным, если для любого его ненулевого состояния s выполняется условие $(s)M_A = S$. Последнее равносильно тому, что в автомате A не имеется собственных ненулевых подавтоматов.

Пусть A — автомат с нулем, тогда его сильно связная компонента C называется 0-транзитивной, если подмножество $C \cup \{0\}$ образует 0-транзитивный подавтомат. Совокупность всех 0-транзитивных компонент образует «расширенное» ядро автомата с нулем. В частности, из любого ненулевого состояния 0-автомата можно с помощью некоторого входного слова перейти в одну из его 0-транзитивных компонент.

Пусть $A = (S, X, F)$ — конечный автомат, тогда его автоматом пар назовем автомат $A^2 = ((S \times S) \setminus \Delta_S \cup \{z\}, X, F_2)$, в котором функция переходов на любой паре различных состояний s и t определяется следующим образом: $F_2((s,t),x) = (F(s,x), F(t,x))$, если $F(s,x) \neq F(t,x)$, и $F_2((s,t),x) = z$ в противном случае. Состояние z считается неподвижным $F_2(z,x) = z$ для всех x из X. Приведенная простая конструкция помогает определить многие свойства автомата A.

Предложение 1. Автомат A возвратный тогда и только тогда, когда его автомат пар является 0-автоматом [3]. Входное слово возвратное для A тогда и только тогда, когда оно нулевое в автомате пар.

Пусть автомат A возвратный и C является 0-транзитивной компонентой автомата пар A^2, тогда назовем ее полной, если полным является отношение $\pi(C) = \{(s,t) | (s,t) \in C\}$. Следующая теорема усиливает теорему 1 для возвратных автоматов (в работе [8] она описана иначе).

Теорема 2. Возвратный транзитивный автомат будет примитивным тогда и только тогда, когда все 0-транзитивные компоненты автомата пар будут полными.

Доказательство. Действительно, пусть C является 0-транзитивной компонентой автомата пар A^2, тогда отношение $\pi(C) \cup \Delta_S$ инвариантно. Значит, из примитивности автомата A следует, что $\pi(C)$ должно быть полным.

И наоборот, пусть все отношения $\pi(C)$ полные, а s и t — произвольная пара различных состояний. Из пары (s,t) в 0-автомате A^2 достигается некоторая 0-транзитивная компонента C, тогда имеет место включение $\pi(C) \subseteq (s,t)M_A$ и, следовательно, отношение $(s,t)M_A$ должно быть полным. Отсюда и из теоремы 1 в силу произвольности выбора пары (s,t) следует, что автомат A примитивный.

Теорема доказана.

ЛИНЕЙНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ МОНОИДОВ

Пусть Q — поле рациональных чисел, тогда обозначим $\mathrm{Hom}(Q^n)$ алгебру всех линейных преобразований линейного пространства Q^n. При фиксированном базисе в пространстве Q^n линейное преобразование задается матрицей размера $n \times n$ над полем Q, поэтому наряду с преобразованиями будем использовать и матрицы.

Линейным представлением (или представлением) моноида M называется гомоморфизм φ моноида M в мультипликативный моноид алгебры линейных преобразований:

$$\varphi : M \to \mathrm{Hom}(Q^n). \qquad (5)$$

Это означает, что $\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$ для любых a, b из M, и кроме того, единица моноида отображается в тождественное преобразование (единичную матрицу). Если φ — мономорфизм, т.е. взаимно-однозначный гомоморфизм вида (5), то считают, что φ является точным представлением моноида M линейными преобразованиями над полем Q.

Число n называется степенью представления, а линейное пространство $V=Q^n$ — несущим пространством. Представление φ задает действие элемента моноида a из M на вектор v из V следующим образом: $\varphi(v, a)=v\cdot\varphi(a)$, где в правой части равенства при фиксированном базисе вектор (строка) v умножается на матрицу преобразования $\varphi(a)$. Заметим, что это действие линейно по первому аргументу. Далее положим $\varphi(v, M)=\{\varphi(v,a)|\ a\in M\}$.

Пусть φ — представление моноида M, а V — его несущее пространство, тогда подпространство U из V называется инвариантным относительно φ, если $\varphi(v,a)\in U$ для всех v из U и a из M.

Представление φ моноида M называется неприводимым, если его несущее пространство V не содержит собственных ненулевых инвариантных подпространств. Это означает, что для любого ненулевого вектора v подмножество векторов $\varphi(v, M)$ полное, т.е. содержит базис пространства V.

Важность неприводимых представлений определяется двумя обстоятельствами. Во-первых, любое представление моноида можно «разложить» на неприводимые компоненты таким образом, что все матрицы этого представления в подходящем базисе будут иметь блочно-треугольную форму, а по диагонали разместятся блоки неприводимых представлений [4, § 5.1]. Отметим, что в отличие от представлений групп [5] инвариантное подпространство моноида может не иметь инвариантного ортогонального дополнения. Во-вторых, для неприводимого представления φ моноида M множество преобразований $\varphi(M)$ порождает простую алгебру (т.е. не имеющую собственных ненулевых идеалов), которая согласно классической теореме Веддерберна по существу сводится к полной матричной алгебре [2, 4]. Таким образом, для неприводимых представлений можно в какой-то мере описать структуру представляющей алгебры линейных преобразований.

Далее сопоставим каждому элементу i из множества $S=[1,n]$ вектор $\theta(i)=e_i$ из стандартного базиса $B=[e_1,e_2,\ldots,e_n]$ пространства Q^n. Тогда биекцию θ можно продолжить до изоморфизма моноидов S^n и B^n, сопоставив подстановке $f=[i_1,i_2,\ldots,i_n]$ подстановку $\theta(f)=[\theta(i_1),\theta(i_2),\ldots,\theta(i_n)]$. Однако любое отображение, определенное на базисе B, можно однозначно продолжить на все пространство, поэтому подстановки $\theta(f)$ будут также линейными операторами в пространстве Q^n. Следовательно, получаем точное линейное представление полного моноида S^n, которое назовем стандартным (базисным) представлением:

$$\theta: S^n\to B^n\subset \mathrm{Hom}\,(Q^n)\,. \qquad (6)$$

В базисе B линейный оператор $\theta(f)$ будет задаваться мономиальной (по строкам) матрицей размера $n\times n$, т.е. матрицей, в каждой строке которой расположена одна единица, а остальные элементы строки равны нулю. Тогда транспонированная матрица $\theta(f)^{\mathrm{T}}$ мономиальна по столбцам и для нее единичный вектор e, т.е. все координаты которого равны 1, является левым неподвижным вектором:

$$e\cdot\theta(f)^{\mathrm{T}}=e. \qquad (7)$$

Пусть $v=(q_1,q_2,\ldots,q_n)$ — вектор из Q^n, тогда его валентностью (весом) назовем сумму его координат $|v|=q_1+q_2+\ldots+q_n$. Заметим, что вес будет линейной функцией, поскольку он равен скалярному произведению вектора v и единичного вектора e: $|v|=\langle v, e\rangle$.

Стандартное представление θ является приводимым, так как оно сохраняет вес векторов. Действительно, для любого вектора v из Q^n и любой подстановки f из S^n выполняются равенства

$$|\theta(v,f)|=\langle\theta(v,f), e\rangle=\langle v\cdot\theta(f), e\rangle=\langle v, e\cdot\theta(f)^{\mathrm{T}}\rangle=\langle v,e\rangle=|v|.$$

Здесь использовано известное из линейной алгебры свойство скалярного произведения и свойство (7).

Таким образом, любая гиперплоскость, перпендикулярная вектору e, инвариантна относительно θ, в частности инвариантно следующее подпространство размерности $n-1$:

$$V_0 = \{v \mid \langle v, e\rangle = 0\}. \qquad (8)$$

Ограничение представления θ на подпространстве V_0 обозначим θ_0 и назовем его основным представлением моноида S^n:

$$\theta_0 : S^n \to \mathrm{Hom}_Q(V_0), \qquad (9)$$

где $\mathrm{Hom}_Q(V_0)$ — алгебра линейных преобразований подпространства V_0, определенном по формуле (8), над Q.

Представление θ_0 будет уже неприводимым, поскольку оно неприводимо, даже относительно действия симметрической группы степени n, которая является подмоноидом полного моноида [5]. Кроме того, представление θ_0 будет иметь непустое ядро $\theta_0^{-1}(0)$, которое описывается в следующем предложении.

Предложение 2. Ядро представления θ_0 совпадает с ядром S^n.

Доказательство. Напомним, что ядро моноида S^n состоит из константных подстановок $\Delta_1(n)$. Пусть B — стандартный базис несущего пространства Q^n представления θ, тогда $B_0 = \{e_i - e_n \mid 1 \le i \le n-1\}$ является базисом подпространства V_0 и для любого из этих базисных векторов имеем условия

$$\theta_0(e_i - e_n, f) = \theta(e_i - e_n, f) = e_i \cdot \theta(f) - e_n \cdot \theta(f).$$

Следовательно, $\theta_0(f) = 0$ тогда и только тогда, когда все строки мономиальной матрицы $\theta(f)$ одинаковы, т.е. когда f — константа. Предложение доказано.

НЕПРИВОДИМЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ПОЛУГРУПП

Поскольку основное представление θ_0 полного моноида S^n неприводимо, можно применить к нему теорему Манна–Понизовского (МП-теорему) [4, § 5.3]. Однако даже формулировка этой теоремы требует введения довольно большого числа понятий из теории полугрупп, которые в данной статье не определяются, их можно найти в [4] или в [6] (в трех первых главах).

Значение МП-теоремы состоит в том, что она связывает неприводимое представление моноида со структурой его идеалов. Доказывается, что у неприводимого представления конечного моноида есть вершина (апекс), т.е. наименьший регулярный J-класс, идеал которого не содержится в ядре представления. Существование такого класса неочевидно, поскольку очевидным является лишь существование минимального класса с подобными свойствами.

В рассматриваемом случае найти вершину основного представления θ_0 довольно легко, поскольку моноид S^n имеет линейную структуру идеалов [4, теорема 2.9]. Поэтому здесь каждый идеал является главным и следующим по счету J-классом, идеал которого содержит ядро $\Delta_1(n)$, будет J-класс $\Delta_2(n)$. Таким образом, из предложения 2 получаем следующее предложение.

Предложение 3. Вершиной основного представления θ_0 глобального моноида S^n будет J-класс $\Delta_2(n)$, состоящий из всех подстановок ранга 2.

Рассматриваемая МП-теорема устанавливает связь между неприводимыми представлениями моноида и 0-простой полугруппы $D \cup \{0\}$, которая получается присоединением нуля к вершине этого представления — регулярному J-классу D. Структура 0-простых полугрупп, т.е. не имеющих собственных ненулевых идеалов, описывается теоремой Риса [4, § 3.2], согласно которой конечная 0-простая полугруппа вида $D \cup \{0\}$ изоморфна рисовской полугруппе матричного типа над группой с нулем, причем в качестве группы можно взять максимальную подгруппу из регулярного J-класса D. Умножение в рисовской полугруппе — это обычное матричное умножение с промежуточной сэндвич-матрицей, структура которой в основном определяет свойства 0-простой полугруппы.

Дальнейшие исследования выявили связь между неприводимыми представлениями 0-простой полугруппы $D \cup \{0\}$ и ее максимальной подгруппы G [4, § 5.4]. А именно, если в сэндвич-матрицу 0-простой полугруппы подставить вместо элементов группы их матрицы из некоторого неприводимого представления группы, то ранг полученной рациональной матрицы оказывается равным степени минимального неприводимого представления исходного моноида [2].

Применим теперь эту МП-теорию (которая несколько шире МП-теоремы) к описываемому случаю. Отметим, что максимальная подгруппа регулярного J-класса $\Delta_2(n)$ состоит из двух элементов. Это следует из общей теоремы, описывающей в частности структуру H-классов полного моноида [4, теорема 2.9]. Очевидное одномерное представление двухэлементной группы с помощью чисел $\{-1, 1\}$ позволяет рассматривать сэндвич-матрицу 0-простой полугруппы $\Delta_2(n) \cup \{0\}$ как целочисленную матрицу, в которой вместо элементов группы подставлены числа -1 или 1, а остальные элементы равны 0. Поскольку представление θ_0 имеет степень $n-1$, из МП-теории следует приведенная далее теорема.

Теорема 3. Ранг сэндвич-матрицы 0-простой полугруппы $\Delta_2(n) \cup \{0\}$ равен $n-1$.

В принципе, эту теорему можно доказать непосредственно без использования МП-теории, но это потребовало бы детального анализа структуры сэндвич-матрицы и способов ее построения.

НЕПРИВОДИМЫЕ АВТОМАТЫ

Пусть $A = (S, X, F)$ — конечный автомат с n состояниями, тогда стандартным (линейным) представлением ρ автомата A назовем композицию $\rho = \theta \circ F$ гомоморфизмов (2) и (6). Здесь композиция отображений, как обычно, записывается справа налево. Таким образом, ρ будет гомоморфизмом моноидов вида $\rho : X^* \to B^n$. По сути стандартное линейное представление автомата является матричной формой его задания с помощью набора базовых мономиальных матриц $\rho(x)$ для всех x из X.

Стандартное представление автомата будет приводимым в силу приводимости представления θ. Поэтому основным представлением ρ_0 автомата A назовем композицию $\rho_0 = \theta_0 \circ F$ гомоморфизмов (2) и (9). Таким образом, ρ_0 будет гомоморфизмом моноидов вида $\rho_0 : X^* \to \mathrm{Hom}_Q(V_0)$. Обозначим η_0 ограничение представления θ_0 на моноиде автомата M_A, тогда получим равенство

$$\rho_0 = \eta_0 \circ F.$$

Отсюда следует, что представление ρ_0 задает действие входного слова w на вектор v из подпространства V_0 следующим образом: $\rho_0(v, w) = \eta_0(v, f) = v \cdot \eta_0(f)$, где $f = F(w)$. Далее положим $\eta_0(v, M_A) = \{\eta_0(v, f) \mid f \in M_A\}$.

Определение 2. Конечный транзитивный автомат A назовем неприводимым (над полем Q), если основное линейное представление его моноида $\eta_0 : M_A \to \mathrm{Hom}_Q(V_0)$ является неприводимым.

Напомним, что неприводимость означает отсутствие собственных ненулевых инвариантных подпространств в пространстве V_0 или, что равносильно, для каждого ненулевого вектора v из V_0 подмножество векторов $\eta_0(v, M_A)$ должно быть полным, т.е. содержать базис V_0.

Исследуем связь между примитивными и неприводимыми автоматами. Для этого докажем вспомогательное предложение.

Пусть $\pi \subseteq S \times S$ — бинарное отношение, тогда $U(\pi)$ — подмножество векторов $U(\pi) = \{e_i - e_j \mid (i, j) \in \pi\}$, а $V(\pi)$ — их линейная оболочка $V(\pi) = \mathrm{Lin}(U(\pi))$. Далее, пусть σ — эквивалентность ранга r на множестве S с классами

$S_1, S_2, \ldots, S_r$, тогда, очевидно, имеем следующее разложение в прямую сумму подпространств:

$$V(\sigma) = V(S_1 \times S_1) \otimes \ldots \otimes V(S_r \times S_r).$$

Отсюда с учетом равенств $\dim(V(S_i \times S_i)) = |S_i| - 1$, $1 \le i \le r$, получаем равенство

$$\dim(V(\sigma)) = n - r. \tag{10}$$

Предложение 4. Бинарное отношение $\pi \subseteq S \times S$ полное, тогда и только тогда, когда множество векторов $U(\pi)$ полное в V_0.

Доказательство. Обозначим σ эквивалентное замыкание отношения π, тогда из включений $U(\pi^{-1}) \subset V(\pi)$ и $U(\pi \circ \pi) \subset V(\pi)$ заключаем, что $U(\sigma) \subset V(\pi)$. Отсюда следует равенство

$$V(\pi) = V(\sigma). \tag{11}$$

Предположим теперь, что отношение π полное, тогда $\sigma = S \times S$, и из (10) и (11) заключаем, что $V(\pi) = V(\sigma) = V_0$. Значит, подмножество векторов $U(\pi)$ полное.

И наоборот, предположим, что подмножество векторов $U(\pi)$ является полным, тогда из (11) следует, что $V(\sigma) = V(\pi) = V_0$. Значит, $\dim(V(\sigma)) = n - 1$ и из (10) следует, что $\sigma = S \times S$.

Предложение доказано.

Теорема 4. Каждый неприводимый автомат является примитивным.

Доказательство. Пусть автомат $A = (S, X, F)$, где $S = [1, n]$, является неприводимым и пусть σ — нетождественная конгруенция в A. Выберем в σ пару состояний (i, j), где $i \ne j$, и рассмотрим множество пар $\pi = (i, j) M_A$. Этому множеству пар соответствует подмножество векторов $U(\pi) = \eta_0(e_i - e_j, M_A)$, которое в силу неприводимости представления η_0 полное в пространстве V_0. Отсюда и из предложения 4 следует, что отношение π также полное, а поскольку $\pi \subseteq \sigma$, то $\sigma = S \times S$. Значит, автомат A является примитивным.

Теорема доказана.

Теперь сузим класс рассматриваемых автоматов. Конечный автомат $A = (S, X, F)$ назовем автоматом с единичным дефектом (или слабодефектным), если каждый входной символ x из X удовлетворяет условию $\mathrm{df}(F(x)) \le 1$. Это означает, что каждая базовая подстановка $F(x)$ является либо перестановкой (биекцией), либо склеивает ровно два состояния (сингулярная подстановка). Если сингулярная подстановка f склеивает состояния i и j, то ядром линейного преобразования $\eta_0(f)$ в пространстве V_0 является прямая, натянутая на вектор $e_i - e_j$:

$$\mathrm{Ker}(\eta_0(f)) = \{q(e_i - e_j) \mid q \in Q\}. \tag{12}$$

Отметим, что слабодефектные автоматы довольно часто встречаются в проблеме Черны, в частности серия примеров самого Черны [1] попадает в этот класс. Докажем основную теорему.

Теорема 5. Возвратный слабодефектный примитивный автомат будет неприводимым.

Доказательство. Пусть $A = (S, X, F)$ — возвратный, слабодефектный, примитивный автомат и пусть v — ненулевой вектор из V_0. Положим $V_1 = \mathrm{Lin}(\eta_0(v, M_A))$, тогда V_1 — инвариантное подпространство, которое содержит вектор v. Далее, в силу возвратности автомата A существует кратчайшее непустое слово w такое, что $\rho_0(v, w) = 0$. Пусть $w = yx$, где x — последний входной символ слова w, тогда x должен быть сингулярным символом, поскольку в ядре матрицы $\rho_0(x)$ находится ненулевой вектор $u = \rho_0(v, y)$. Значит, из свойства (12) заключаем, что выполняется условие

$$u = q \cdot (e_i - e_j), \tag{13}$$

где $q \ne 0$, а i и j — различные состояния, которые склеиваются символом x в A.

Далее, поскольку $u = \eta_0(v, F(y))$, то $u \in V_1$ и, следовательно, из свойства (13) заключаем $(e_i - e_j) \in V_1$.

Рассмотрим множество пар $\pi = (i, j) M_A$, где i и j — различные состояния, которые склеиваются символом x в автомате A. В силу теоремы 1 это множество пар полное. Значит, из предложения 4 заключаем, что множество векторов $U(\pi) = \eta_0(e_i - e_j, M_A)$ также полное в пространстве V_0. Следовательно, $V_1 = V_0$, поскольку $U(\pi) \subset V_1$.

Теорема доказана.

Пусть теперь A — возвратный, слабодефектный, примитивный автомат, тогда согласно доказанной теореме представление η_0 является неприводимым. Значит, к нему можно применить МП-теорему. Во-первых, заметим, что из свойства (4) и предложения 2 следует, что ядро представления η_0 совпадает с ядром полного моноида, которое состоит из константных подстановок

$$\eta_0^{-1}(0) = \Delta_1(n). \tag{14}$$

Во-вторых, в силу возвратности и слабой дефектности автомата A в моноиде M_A будут содержаться подстановки всех рангов и, в частности, подстановки ранга два $D_2 = \Delta_2(n) \cap M_A$. Значит, из (14) заключаем, что вершина D представления η_0 находится среди этих подстановок:

$$D \subseteq D_2. \tag{15}$$

Вопрос о том, что в (15) $D = D_2$, требует дополнительного исследования. Например, для автомата Кари [7] это равенство выполняется. Более того, в настоящее время не известны примеры со строгим включением в условии (15).

Кроме того, из результатов Ж. Перро [6, § 2.4], следует, что все J-классы моноида M_A на втором уровне регулярные. Таким образом, из МП-теоремы получаем заключительное утверждение.

Теорема 6. Пусть A — возвратный, слабодефектный, примитивный автомат с n состояниями, тогда его основное представление η_0 неприводимое, вершиной η_0 является регулярный J-класс D, удовлетворяющий условию (15), полугруппа $D \cup \{0\}$ будет 0-простой, а ранг сэндвич-матрицы этой полугруппы, состоящей из чисел $\{-1, 0, 1\}$, равен $n-1$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Конечно, было бы преувеличением утверждать, что МП-теорема позволяет решить проблему Черны. Однако она связывает данную проблему с теорией представления полугрупп, что дает информацию о неприводимых представлениях моноида автомата и помогает в решить эту проблему.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Cerny J. Poznamka *k* homogennym experimentom s konecnymy automatami // Math. Fyz. Cas. SAV. — 1964. — **14**. — P. 208–215.
2. Almeida J., Steinberg B. Matrix mortality and the Cerny-Pin conjecture // Lecture Notes in Computer Science. — 2009. — **5583**. — P. 67–80.
3. Рысцов И. Представление регулярных идеалов в конечных автоматах // Кибернетика и системный анализ. — 2003. — № 5. — С. 48–58.
4. Клиффорд А., Престон Г. Алгебраическая теория полугрупп. — М.: Мир, 1972. — Т. 1. — 285 с.
5. Винберг Э. Линейные представления групп. — М.: Наука, 1985. — 144 с.
6. Лаллеман Ж. Полугруппы и комбинаторные приложения. — М.: Мир, 1985. — 439 с.
7. Kari J. A counter example to a conjecture concerning synchronizing words in finite automata // EATCS Bull. — 2001. — **73**. — P. 146.
8. Steinberg B. A theory of transformation monoids: combinatorics and representation theory // The Electronic Journal of Combinatorics. — 2010. — **17**, #R164. — P. 1–56.

Поступила 04.07.2014