УДК 519.21

А.А. ВОЙНА

СТАТИСТИЧЕСКОЕ ОЦЕНИВАНИЕ В СКРЫТОЙ МАРКОВСКОЙ МОДЕЛИ ИЕРАРХИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЫ

Аннотация. Приведена математическая модель иерархической стохастической структуры и рассмотрен ряд задач статистического оценивания в условиях неполных наблюдений. Изложен метод построения состоятельных оценок параметров скрытой марковской модели, основанный на использовании структуры корреляционной зависимости цепи Маркова. Подобные модели встречаются в прикладных разделах теории случайных процессов: теории массового обслуживания, теории управления запасами, теории риска и др. Описаны конкретные примеры оценивания параметров для моделей из перечисленных областей.

Ключевые слова: цепь Маркова, скрытая марковская модель, система обслуживания, статистическое оценивание, состоятельные оценки.

ВВЕДЕНИЕ

Настоящая работа посвящена применению теоретических результатов из области статистического анализа частично наблюдаемых разрывных случайных процессов к исследованию конкретных стохастических систем. Библиография по проблемам оптимальной нелинейной фильтрации и интерполяции случайных процессов в условиях неполных наблюдений достаточно обширна [1]. Следует подчеркнуть, что большинство исследований касается непрерывных процессов, в то время как многие прикладные модели имеют «ступенчатые» траектории. Их описание возможно только с помощью разрывных случайных процессов. Подобные модели встречаются в таких областях, как теория массового обслуживания, теория сетей, теория управления запасами, теория принятия решений, теория риска и др.

В работах [2–5] получены результаты, связанные с построением конструктивных методов статистического анализа для некоторых типов частично наблюдаемых разрывных марковских процессов. В настоящей статье приведено несколько примеров практического использования предложенного в [3] метода статистического оценивания в так называемой скрытой марковской модели (Hidden Markov Models) [3, 6, 7]. В работе [7] подобные модели причислены к главным аналитическим методам, используемым в математических исследованиях по искусственному интеллекту.

Основной акцент в данной статье сделан на практической интерпретации полученных результатов и комментариях к приводимым примерам.

ИССЛЕДУЕМАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Пусть $x(t)$, $t=0,1,2,$ означает однородную цепь Маркова с дискретным временем, с конечным множеством состояний $E=\{1,2,\dots,m\}$ и матрицей переходных вероятностей за один шаг $P=[p_{ij}]$, $i,j\in E$: $p_{ij}=P\{x(t+1)=j/x(t)=i\}$. Предположим, что переходные вероятности цепи $x(t)$, $t=0,1,2,\dots$, имеют следующий вид:

$$p_{11}+p_{12}=1,\ (p_{11})(p_{12})\neq 0,$$
$$p_{ii-1}+p_{ii+1}=1,\ (p_{ii-1})(p_{ii+1})\neq 0,\ i=2,3,\dots,m-1, \tag{1}$$
$$p_{mm-1}+p_{mm}=1,\ (p_{mm-1})(p_{mm})\neq 0.$$

Подобную цепь можно интерпретировать как математическую модель некоторой иерархической стохастической структуры (системы). Если состояния цепи интерпретировать как последовательные «ступени» (уровни) такой структуры, то состояние $\{1\} \in E$ следует считать ее самой низкой «ступенью», а состояние $\{m\} \in E$ — самой высокой. Согласно принятым предположениям, попав на уровень $\{1< i< m\}$ в средине иерархической «лестницы», система на следующем шаге изменит свое состояние. При этом имеются две возможности: спуститься на ступеньку ниже (вероятность этого $p_{ii-1} \neq 0$) или подняться на следующий уровень (вероятность такого изменения $p_{ii+1} \neq 0$). Попав на самый низкий уровень $\{1\}$ или на самый высокой уровень $\{m\}$, система на следующем шаге может либо остаться в этом состоянии (с вероятностью $p_{11} \neq 0$ для уровня $\{1\}$ и с вероятностью $p_{mm} \neq 0$ для уровня $\{m\}$), либо изменить его (с вероятностью $p_{12} \neq 0$ для уровня $\{1\}$ и с вероятностью $p_{mm-1} \neq 0$ для уровня $\{m\}$).

Предположим далее, что для каждого состояния $i \in E$ определено не зависящую от цепи Маркова $x(t)$, $t = 0,1,2, \ldots$, совокупность случайных величин $\{\xi_i^{(k)}, k = 0,1,2, \ldots\}$ таких, что для разных значений индекса k величины $\xi_i^{(k)}$ независимы между собой, а их распределение не зависит от индекса k. Введем двумерный случайный процесс с дискретным временем $(x(t), \xi(t))$, $t = 0,1,2, \ldots$, первая координата которого $(x(t),\ t = 0,1,2,\ldots)$ является цепью Маркова, а вторая определяется следующим образом:

$$\xi(t) = \xi_{x(t)}^{(t)},\ t = 0,1,2,\ldots$$

В статистическом анализе случайных процессов скрытой марковской моделью [3, 6, 7] называют такой способ проведения наблюдений, при котором имеется возможность наблюдать только значения $\bar{\xi} = (\xi(0), \xi(1), \xi(2), \ldots, \xi(n))$ второй компоненты случайного процесса $(x(t), \xi(t))$, $t = 0,1,2,\ldots$ При этом состояния $\bar{x} = (x(0), x(1), x(2), \ldots, x(n))$ цепи Маркова недоступны для наблюдения и остаются неизвестными. Предположим, что переходные вероятности $P = [p_{ij}]$, $i, j \in E$, цепи Маркова $x(t)$, $t = 0,1,2, \ldots$, известны. Функции распределения

$$F_i(x, \theta_i) = P\{\xi_i^{(l)} < x\},\ i = 1,2, \ldots, m,$$

случайных величин $\xi_i^{(l)}$ для каждого состояния $i \in E$ зависят от параметра $\theta_i \in \Theta_i$, при этом для каждого $i \in E$ множество Θ_i является открытым подмножеством числовой прямой. Задача состоит в том, чтобы на основании наблюдений $\bar{\xi} = (\xi(0), \xi(1), \xi(2), \ldots, \xi(n))$ второй компоненты случайного процесса $(x(t), \xi(t))$, $t = 0,1,2,\ldots$, построить состоятельные оценки векторного параметра $\bar{\theta} = \{\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m\}$.

АЛГОРИТМ МЕТОДА

Метод, предложенный в работе [3], основан на использовании структуры корреляционной зависимости цепи Маркова $x(t)$, $t = 0,1,2,\ldots$, и, условно говоря, предусматривает построение состоятельных оценок векторного параметра $\bar{\theta} = \{\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m\}$ за два шага. На первом шаге выбираем некоторую функцию $h(x)$, $x \in R_1$, таким образом, чтобы для произвольного $i \in E$ и произвольного $\theta_i \in \Theta_i$ были выполнены следующие условия:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(x)|\, dF_i(x, \theta_i) < \infty,\ i \in E.$$

Выполнение этого условия позволит определить функции:

$$H(i, \theta_i) = E[h(\xi_i^{(l)})] = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) dF_i(x, \theta_i),\ i \in E.$$

Введем следующие статистики:

$$H_n = \frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n} h(\xi(l)),$$

$$H_n(k) = \frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n} h(\xi(l))h(\xi(l+k)), \; k = 1,2,\dots,m.$$

Обозначим $P^{(s)} = [p_{ij}^{(s)}], \; i,j \in E, \; p_{ij}^{(s)} = P\{x(t+s) = j / x(t) = i\}$ матрицу переходных вероятностей цепи Маркова $x(t), \; t = 0,1,2,\dots$, за s шагов. Пусть также вектор $\overline{\pi} = \{\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_m\}$ обозначает стационарное распределение цепи Маркова $x(t), \; t = 0,1,2,\dots$ Первый шаг метода состоит в том, чтобы построить состоятельную оценку

$$\overline{H}^{*(n)}(\overline{\theta}) = \{H^{*(n)}(1,\theta_1), H^{*(n)}(2,\theta_2), \dots, H^{*(n)}(m,\theta_m)\}$$

вектора $\overline{H}(\overline{\theta}) = \{H(1,\theta_1), H(2,\theta_2), \dots, H(m,\theta_m)\}$. Эту оценку находим среди решений $\overline{x}^{*(n)} = \{x_1^{*(n)}, x_2^{*(n)}, \dots, x_m^{*(n)}\}$ системы уравнений

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} \pi_i p_{ij} x_i x_j = H_n(1) \\ \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} \pi_i p_{ij}^{(2)} x_i x_j = H_n(2) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} \pi_i p_{ij}^{(m)} x_i x_j = H_n(m). \end{cases} \tag{2}$$

Предположим, что удалось решить эту нелинейную систему уравнений, определить все ее решения $\overline{x}^{*(n)} = \{x_1^{*(n)}, x_2^{*(n)}, \dots, x_m^{*(n)}\}$ и выбрать среди них состоятельную оценку $\overline{H}^{*(n)}(\overline{\theta})$ вектора $\overline{H}(\overline{\theta})$. Переходим тогда ко второму шагу метода и строим состоятельную оценку

$$\overline{\theta}_n^* = \{\theta_n^*(1), \theta_n^*(2), \dots, \theta_n^*(m)\}$$

векторного параметра $\overline{\theta} = \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m\}$. Эту оценку находим среди решений системы уравнений

$$\begin{cases} H(1,\theta_1) = H^{*(n)}(1,\theta_1) \\ H(2,\theta_2) = H^{*(n)}(2,\theta_2) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ H(m,\theta_m) = H^{*(n)}(m,\theta_m). \end{cases} \tag{3}$$

Следует отметить, что выбор функции $h(x), \; x \in R_1$, не влияет на вид решений $\overline{x}^{*(n)} = \{x_1^{*(n)}, x_2^{*(n)}, \dots, x_m^{*(n)}\}$ системы уравнений (2). Данная система и вид ее решений определяется структурой переходных вероятностей (а следовательно, и структурой корреляционной зависимости) цепи Маркова $x(t), \; t = 0,1,2,\dots$ В свою очередь, выбор функции $h(x), x \in R_1$, имеет непосредственное влияние на систему уравнений (3) и, следовательно, на окончательный вид оценки параметра $\overline{\theta} = \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m\}$. Таким образом, выбирая разные функции $h(x), \; x \in R_1$, можем строить в тех же самых условиях разные оценки. Конкретный вид $h(\cdot)$ и свойства, которыми должна обладать данная функция, зависят от анализируемой модели. Иллюстрацией этому служат приведенные в статье примеры.

ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ОБОСНОВАНИЕ МЕТОДА

Пусть $P=[p_{ij}]$, $i,j\in E$, — матрица переходных вероятностей цепи Маркова $x(t)$, $t=0,1,2,\ldots$, за один шаг, $\overline{\pi}=\{\pi_1,\pi_2,\ldots,\pi_m\}$ — вектор стационарного распределения цепи Маркова $x(t)$, $t=0,1,2,\ldots$ Определим диагональную матрицу $\hat{\Pi}$ размера $m\times m$ следующим образом:

$$\hat{\Pi}=\operatorname{diag}\{\sqrt{\pi_1};\sqrt{\pi_2};\ldots,\sqrt{\pi_m}\}.$$

Пусть

$$A=\hat{\Pi}P\hat{\Pi}^{-1}. \tag{4}$$

Построим ортогональную матрицу U, составленную из собственных векторов матрицы A:

$$UU^{\mathrm{T}}=U^{\mathrm{T}}U=E,$$

где E — единичная матрица.

Теорема 1. Если все собственные числа $\{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m\}$ матрицы P — действительные, отличные от нуля, разные числа, то с вероятностью, стремящейся к единице, при n, стремящемся к бесконечности, система уравнений (2) совместна.

Решения $\overline{x}^{*(n)}=\{x_1^{*(n)},x_2^{*(n)},\ldots,x_m^{*(n)}\}$ системы уравнений (2) имеют вид

$$\overline{x}^{*(n)}=\overline{y}^{*}U\hat{\Pi}^{-1},$$

где вектор $\overline{y}^{*}=\{y_1^{*},y_2^{*},\ldots,y_m^{*}\}$ определяется следующим образом: $y_i^{*}=\sqrt{s_i}$ или $y_i^{*}=-\sqrt{s_i}$, $i=1,2,\ldots,m.$

В свою очередь, вектор $\overline{s}=\{s_1,s_2,\ldots,s_m\}$ определяется равенством

$$[\overline{s}]^{\mathrm{T}}=W^{-1}[\overline{H}_n]^{\mathrm{T}},$$

$$\overline{H}_n=\{H_n(1),H_n(2),\ldots,H_n(m)\},$$

где W — квадратная матрица размера $m\times m$ вида

$$W=[w_{ij}]=[(\lambda_j)^i],\ i=1,\ldots,m,\ j=1,\ldots,m.$$

Доказательство теоремы 1 проведем в несколько этапов. Докажем некоторые вспомогательные утверждения, также представляющие интерес.

Теорема 2. Пусть переходные вероятности $P=[p_{ij}]$, $i,j\in E$, за один шаг определяются равенством (1). Тогда цепь Маркова $x(t)$, $t=0,1,2,\ldots$, является эргодической. Если

$$\overline{\pi}=\{\pi_1,\pi_2,\ldots,\pi_m\}$$

означает вектор стационарного распределения цепи Маркова $x(t)$, $t=0,1,2,\ldots$, то для произвольных состояний $i\in E$ и $j\in E$ выполняется равенство

$$\sum_{k=1}^{m}\frac{\pi_k}{\sqrt{\pi_i\pi_j}}p_{ki}p_{kj}=\sum_{k=1}^{m}\frac{\sqrt{\pi_i\pi_j}}{\pi_k}p_{ik}p_{jk}. \tag{5}$$

Отметим, что доказательство теоремы 1 основывается на утверждении теоремы 2. Благодаря тому, что для цепи Маркова $x(t)$, $t=0,1,2,\ldots$, выполняется свойство (5), можно предложить метод решения системы уравнений (2) и записать в явном виде все ее решения. Заметим также, что свойством (5) обладают, например, обратимые цепи Маркова [8, §5.3] и этот метод можно использовать при их изучении.

Доказательство. Цепь Маркова $x(t)$, $t=0,1,2,\ldots$, с матрицей переходных вероятностей за один шаг $P=[p_{ij}]$, $i,j\in E$, которая определяется равенством (1), является конечной, неприводимой и непериодической, что гарантирует ее эргодичность [9]. Принимая во внимание вид матрицы $P=[p_{ij}]$, $i, j \in E$, переходных вероятностей цепи Маркова $x(t)$, $t=0,1,2,\ldots$, приходим к заключению, что ее стационарное распределение $\overline{\pi}=\{\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_m\}$ будет единственным решением следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} \pi_1 p_{11}+\pi_2 p_{21}=\pi_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \pi_{k-1} p_{k-1k}+\pi_{k+1} p_{k+1k}=\pi_k \\ k=2,4,\ldots,m-1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \pi_1+\pi_2+\ldots+\pi_m=1. \end{cases} \tag{6}$$

Используя метод математической индукции, убеждаемся, что для произвольного $k=2,3,\ldots,m$ выполняется равенство

$$\frac{\pi_k}{\pi_{k-1}}=\frac{p_{k-1k}}{p_{kk-1}}. \tag{7}$$

Как следует из определения цепи Маркова $x(t)$, $t=0,1,2,\ldots$, если $i \neq 1$, $j \neq 1$, $i \neq m$, $j \neq m$ и $|i-j| \neq 2$, то

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{\pi_k}{\sqrt{\pi_i \pi_j}} p_{ki} p_{kj}=\sum_{k=1}^{m} \frac{\sqrt{\pi_i \pi_j}}{\pi_k} p_{ik} p_{jk}=0.$$

В справедливости (5) убеждаемся непосредственной проверкой, используя равенство (7) и рассматривая последовательно случаи: $i=1$, $j=1$; $2 \leq i=j \leq m-1$; $i=m$, $j=m$; $1<i<m$, $|i-j|=2$; $i=1$, $j=3$; $i=m-1$, $j=m$. Покажем это на примере случая $1<i<m$, $j-i=2$:

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{\pi_k}{\sqrt{\pi_i \pi_j}} p_{ki} p_{kj}=\sum_{k=1}^{m} \sqrt{\frac{\pi_k}{\pi_i}} \sqrt{\frac{\pi_k}{\pi_j}}\, p_{ki} p_{kj}=$$

$$=\sum_{k=1}^{m} \sqrt{\frac{\pi_k}{\pi_i}} \sqrt{\frac{\pi_k}{\pi_{i+2}}}\, p_{ki} p_{ki+2}=\sqrt{\frac{\pi_{i+1}}{\pi_i}} \sqrt{\frac{\pi_{i+1}}{\pi_{i+2}}}\, p_{i+1i} p_{i+1i+2}=$$

$$=\sqrt{\frac{p_{ii+1}}{p_{i+1i}}} \sqrt{\frac{p_{i+2i+1}}{p_{i+1i+2}}}\, p_{i+1i} p_{i+1i+2}=\sqrt{p_{ii+1} p_{i+1i} p_{i+2i+1} p_{i+1i+2}}.$$

В то же время

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{\sqrt{\pi_i \pi_j}}{\pi_k} p_{ik} p_{jk}=\sum_{k=1}^{m} \sqrt{\frac{\pi_i}{\pi_k}} \sqrt{\frac{\pi_j}{\pi_k}}\, p_{ik} p_{jk}=$$

$$=\sum_{k=1}^{m} \sqrt{\frac{\pi_i}{\pi_k}} \sqrt{\frac{\pi_{i+2}}{\pi_k}}\, p_{ik} p_{i+2k}=\sqrt{\frac{\pi_i}{\pi_{i+1}}} \sqrt{\frac{\pi_{i+2}}{\pi_{i+1}}}\, p_{ii+1} p_{i+2i+1}=$$

$$=\sqrt{\frac{p_{i+1i}}{p_{ii+i}}} \sqrt{\frac{p_{i+1i+2}}{p_{i+2i+1}}}\, p_{ii+1} p_{i+2i+1}=\sqrt{p_{ii+1} p_{i+1i} p_{i+2i+1} p_{i+1i+2}}.$$

Аналогично проверяем это равенство в остальных случаях.

Лемма 1. Пусть $C=[c_{ij}]$, $i=1,\ldots,m$, $j=1,\ldots,m$, — произвольная квадратная матрица размера $m \times m$, $\overline{b}=\{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$ — произвольная вектор-строка размера m. Рассмотрим диагональную матрицу $\hat{B}=\operatorname{diag}\{\sqrt{b_1}; \sqrt{b_2}; \ldots, \sqrt{b_m}\}$ и матрицу $D=\hat{B} C \hat{B}^{-1}$.

Если $A=[\alpha_{ij}]$, $i=1,\dots,m$, $j=1,\dots,m$, — матрица, определенная равенством $A=DD^{\mathrm{T}}$, то

$$\alpha_{ij}=\sum_{k=1}^{m}\frac{\sqrt{b_i b_j}}{b_k}c_{ik}c_{jk},\quad i=1,\dots,m,\ \ j=1,\dots,m.$$

Если $B=[\beta_{ij}]$, $i=1,\dots,m$, $j=1,\dots,m$, — матрица, определенная равенством $B=D^{\mathrm{T}}D$, то

$$\beta_{ij}=\sum_{k=1}^{m}\frac{b_k}{\sqrt{b_i b_j}}c_{ki}c_{kj},\quad i=1,\dots,m,\ \ j=1,\dots,m.$$

Действительно, элемент d_{ij} матрицы D определяется равенством

$$d_{ij}=\frac{\sqrt{b_i}}{\sqrt{b_j}}c_{ij},\quad i=1,\dots,m,\ \ j=1,\dots,m.$$

Тогда элемент $d_{ij}^{(\mathrm{T})}$ матрицы $D^{\mathrm{T}}=[d_{ij}^{(\mathrm{T})}]_{i=1,\dots,m}^{j=1,\dots,m}$ равен

$$d_{ij}^{(T)}=\frac{\sqrt{b_j}}{\sqrt{b_i}}c_{ji},\quad i=1,\dots,m,\ \ j=1,\dots,m.$$

Поэтому элемент α_{ij} матрицы $A=DD^{\mathrm{T}}$ имеет вид

$$\alpha_{ij}=\sum_{k=1}^{m}d_{ik}d_{kj}^{(\mathrm{T})}=\sum_{k=1}^{m}\frac{\sqrt{b_i}}{\sqrt{b_k}}c_{ik}\frac{\sqrt{b_j}}{\sqrt{b_k}}c_{jk},\quad i=1,\dots,m,\ \ j=1,\dots,m.$$

Соответственно элемент β_{ij} матрицы $B=D^{\mathrm{T}}D$ равен

$$\beta_{ij}=\sum_{k=1}^{m}d_{ik}^{(T)}d_{kj}=\sum_{k=1}^{m}\frac{\sqrt{b_k}}{\sqrt{b_i}}c_{ki}\frac{\sqrt{b_k}}{\sqrt{b_j}}c_{kj},\quad i=1,\dots,m,\ \ j=1,\dots,m.$$

Лемма 2. Условие (5) теоремы 2 эквивалентно следующему условию: $AA^{\mathrm{T}}=A^{\mathrm{T}}A$, где матрица A определяется равенством (4).

Доказательство этого факта непосредственно следует из леммы 1.

Лемма 3. Для произвольного натурального числа $k=1,2,\dots$ справедливо равенство

$$A^k=\hat{\Pi}P^k\hat{\Pi}^{-1}.$$

Доказательство. Проведем доказательство, используя метод математической индукции.

Для $k=1$ получим равенство (4), которое определяет матрицу A.

Пусть для некоторого натурального числа k имеет место равенство $A^k=\hat{\Pi}P^k\hat{\Pi}^{-1}$. Тогда

$$A^{k+1}=A^kA=(\hat{\Pi}P^k\hat{\Pi}^{-1})(\hat{\Pi}P\hat{\Pi}^{-1})=(\hat{\Pi}P^kP\hat{\Pi}^{-1})=(\hat{\Pi}P^{k+1}\hat{\Pi}^{-1}),$$

что и доказывает лемму 3.

Доказательство теоремы 1. Обозначим $\{\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_m\}$ собственные числа матрицы P. На основании [10] $\{\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_m\}$ являются также собственными числами матрицы A. Пусть $\overline{\pi}=\{\pi_1,\pi_2,\dots,\pi_m\}$ — вектор стационарного распределения цепи Маркова $x(t)$, $t=0,1,2,\dots$ Определим диагональную матрицу $\Pi=\mathrm{diag}\{\pi_1;\pi_2;\dots,\pi_m\}$. Тогда система уравнений (2) в матричной записи принимает вид

$$\begin{cases}\bar{x}\,\Pi P[\bar{x}]^{\mathrm{T}}=H_n(1)\\ \bar{x}\Pi P^2[\bar{x}]^{\mathrm{T}}=H_n(2)\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \bar{x}\,\Pi P^m[\bar{x}]^{\mathrm{T}}=H_n(m),\end{cases}$$

где $\bar{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ — вектор неизвестных переменных. Выполним в системе уравнений (2) замену переменных, вводя новые переменные $\bar{z} = \{z_1, z_2, \dots, z_m\}$ следующим образом: $[\bar{z}]^{\mathrm{T}} = \hat{\Pi}[\bar{x}]^{\mathrm{T}}$ или $[\bar{x}]^{\mathrm{T}} = \hat{\Pi}^{-1}[\bar{z}]^{\mathrm{T}}$. Поскольку $\Pi = \hat{\Pi}\hat{\Pi}$, в результате такой замены на основании леммы 3 получим систему уравнений

$$\begin{cases} \bar{z}A[\bar{z}]^{\mathrm{T}} = H_n(1) \\ \bar{z}A^2[\bar{z}]^{\mathrm{T}} = H_n(2) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \bar{z}A^m[\bar{z}]^{\mathrm{T}} = H_n(m). \end{cases} \tag{8}$$

Предположим, что все собственные числа $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m\}$ матрицы P (а следовательно, и матрицы A) — действительные, отличные от нуля, разные числа. Выберем m линейно независимых правых собственных векторов $(\bar{a}^{(1)}, \bar{a}^{(2)}, \dots, \bar{a}^{(m)})$ матрицы A:

$$A[\bar{a}^{(k)}]^{\mathrm{T}} = \lambda_k[\bar{a}^{(k)}]^{\mathrm{T}}, \ k = 1, 2, \dots, m,$$

где $\bar{a}^{(k)} = (a_1^{(k)}, a_2^{(k)}, \dots, a_m^{(k)})$, $k = 1, 2, \dots, m$. Осуществив ортогонализацию системы векторов $(\bar{a}^{(1)}, \bar{a}^{(2)}, \dots, \bar{a}^{(m)})$, преобразуем их в ортонормированную систему $(\bar{u}^{(1)}, \bar{u}^{(2)}, \dots, \bar{u}^{(m)})$ собственных векторов матрицы A:

$$A[\bar{u}^{(k)}]^{\mathrm{T}} = \lambda_k[\bar{u}^{(k)}]^{\mathrm{T}}, \ k = 1, 2, \dots, m,$$

при этом для произвольного $k = 1, 2, \dots, m$ и произвольных $k \neq l$, $k = 1, 2, \dots, m$, $l = 1, 2, \dots, m$ имеем

$$\sum_{i=1}^{m} (u_i^{(k)})^2 = 1, \ \sum_{i=1}^{m} u_i^{(k)} u_i^{(l)} = 0.$$

Определим матрицу $U = [u_{ij}]$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, m$, размера $m \times m$, строками которой будут собственные векторы $(\bar{u}^{(1)}, \bar{u}^{(2)}, \dots, \bar{u}^{(m)})$ матрицы A:

$$u_{ij} = u_j^{(i)}, \ i = 1, \dots, m, \ j = 1, \dots, m.$$

Поскольку система векторов $(\bar{u}^{(1)}, \bar{u}^{(2)}, \dots, \bar{u}^{(m)})$ является ортонормированной, матрица U ортогональна. На основании теоремы 2.10.2 [10] матрица A будет ортогонально подобна диагональной матрице Λ, на главной диагонали которой находятся собственные числа $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m\}$ матрицы A:

$$UAU^{\mathrm{T}} = \Lambda,$$

где $\Lambda = \mathrm{diag}\,\{\lambda_1; \lambda_2; \dots, \lambda_m\}$.

Принимая во внимание ортогональность матрицы U, с помощью математической индукции устанавливаем, что для произвольного натурального числа k имеет место равенство

$$UA^kU^{\mathrm{T}} = \Lambda^k.$$

Выполним замену переменных в системе уравнений (8), определяя новые переменные $\bar{y} = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$ следующим образом: $[\bar{y}]^{\mathrm{T}} = U[\bar{z}]^{\mathrm{T}}$ или $[\bar{z}]^{\mathrm{T}} = U^{\mathrm{T}}[\bar{y}]^{\mathrm{T}}$. Система уравнений (8) примет такой вид:

$$\begin{cases} \bar{y}\Lambda[\bar{y}]^{\mathrm{T}} = H_n(1) \\ \bar{y}\Lambda^2[\bar{y}]^{\mathrm{T}} = H_n(2) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \bar{y}\Lambda^m[\bar{y}]^{\mathrm{T}} = H_n(m). \end{cases} \tag{9}$$

Обозначив $s_i = y_i^2$, $i=1,2,\ldots,m$ (или $y_i = \sqrt{s_i}$, $i=1,2,\ldots,m$), введя квадратную матрицу $W = [(\lambda_j)^i]_{i=1,\ldots,m}^{j=1,\ldots,m}$ и вектор $\overline{H}_n = \{H_n(1), H_n(2), \ldots, H_n(m)\}$, окончательно запишем систему уравнений (9) следующим образом:

$$W[\overline{s}]^{\mathrm{T}} = [\overline{H}_n]^{\mathrm{T}}. \qquad (10)$$

В то же время, как показано в работе [3], из общих предельных теорем для сумм случайных величин, определенных на цепях Маркова, вытекает, что для произвольного $k=1,2,\ldots,m$ статистика $H_n(k)$ сходится по вероятности к величине $H(k)$, которая определяется равенством

$$H_n(k) \underset{n\to\infty}{\overset{P}{\to}} H(k) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} \pi_i p_{ij}^{(k)} H(i,\theta_i) H(j,\theta_j),\ k=1,2,\ldots,m.$$

Теорема 1 доказана.

ПРИМЕРЫ

Среди полученных решений системы уравнений (2), явный вид которых приведен в теореме 1, имеется состоятельная оценка $\overline{H}^{*(n)}(\overline{\theta})$ вектора $\overline{H}(\overline{\theta})$, необходимая в системе уравнений (3) для построения состоятельных оценок $\hat{\overline{\theta}}_n = \{\hat{\theta}_n(1), \hat{\theta}_n(2), \ldots, \hat{\theta}_n(m)\}$ векторного параметра $\overline{\theta} = \{\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m\}$. Поэтому возникает проблема выбора среди 2^m возможных решений системы уравнений (2) соответствующего решения.

Решить ее можно либо эмпирическим путем, строя и анализируя соответствующие статистики [3], либо аналитическим, отсеивая на основании анализа дополнительной информации о свойствах модели заведомо «посторонние» решения. Как показывает практика статистического анализа прикладных моделей, наиболее рационально комбинирование двух подходов. Проиллюстрируем это на конкретных примерах. Заметим, что примеры подобного анализа приведены также в работах [2, 3, 11], где рассмотрено задачу непараметрического оценивания в модели Кокса [12], задачу оценивания неизвестных функций распределения для сложного пуассоновского процесса, управляемого простым марковским процессом регенерации [13], а также задачу оценивания параметров смещения в системе обслуживания при неполных наблюдениях.

Пример 1.1. Рассмотрим вначале задачу параметрического оценивания для модели Кокса, или частного случая модели (1), в котором $m=2$. Матрица переходных вероятностей цепи Маркова $x(t)$, $t=0,1,2,\ldots$, за один шаг в этом случае имеет вид

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix},$$

а вектор $\overline{\pi} = \{\pi_1, \pi_2\}$ стационарного распределения цепи соответственно

$$\overline{\pi} = \left\{ \frac{p_{21}}{p_{12}+p_{21}};\ \frac{p_{12}}{p_{12}+p_{21}} \right\}.$$

Собственные числа $\{\lambda_1, \lambda_2\}$ матрицы P равны

$$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 1-(p_{12}+p_{21}).$$

Ортогональная матрица $U=[u_{ij}]$, $i=1,2$, $j=1,2$, имеет вид

$$U = \begin{bmatrix} \dfrac{\sqrt{p_{21}}}{\sqrt{p_{12}+p_{21}}} & \dfrac{\sqrt{p_{12}}}{\sqrt{p_{12}+p_{21}}} \\ \dfrac{\sqrt{p_{12}}}{\sqrt{p_{12}+p_{21}}} & -\dfrac{\sqrt{p_{21}}}{\sqrt{p_{12}+p_{21}}} \end{bmatrix}.$$

Решения $\{s_1, s_2\}$ системы уравнений (10) имеют вид

$$s_1 = \frac{H_n(2) - (1 - p_{12} - p_{21}) H_n(1)}{p_{12} + p_{21}}, \quad s_2 = \frac{H_n(2) - H_n(1)}{(1 - p_{12} - p_{21})(p_{12} + p_{21})}.$$

Поэтому решения $\bar{x}^{*(n)} = \{x_1^{*(n)}, x_2^{*(n)}\}$ системы уравнений (2), среди которых находится состоятельная оценка $\bar{H}^{*(n)}(\bar{\theta})$ вектора $\bar{H}(\bar{\theta})$, примут вид

$$x_1^{*(n)} = y_1^* + y_2^* \sqrt{\frac{p_{12}}{p_{21}}}, \quad x_2^{*(n)} = y_1^* - y_2^* \sqrt{\frac{p_{21}}{p_{12}}}.$$

При этом координаты вектора $\bar{y}^* = \{y_1^*, y_2^*\}$ определяются следующим образом: $y_i^* = \sqrt{s_i}$ или $y_i^* = -\sqrt{s_i}$, $i = 1, 2$.

Необходимо среди четырех возможных решений выбрать искомое. Согласно [3] в некоторых случаях можно воспользоваться самой простой статистикой H_n, построенной по наблюдениям $\bar{\xi} = (\xi(0), \xi(1), \xi(2), \ldots, \xi(n))$. Покажем, что в случае модели Кокса это не приведет к желаемому результату. Как следует из общих предельных теорем для сумм случайных величин, определенных на цепях Маркова, при $(n \to \infty)$, т.е. при неограниченном возрастании количества наблюдений, с вероятностью единица имеет место сходимость

$$\frac{1}{n} \sum_{l=1}^{n} h(\xi(l)) \underset{n \to \infty}{\overset{\text{п.н.}}{\to}} \pi_1 H(1, \theta_1) + \pi_2 H(2, \theta_2).$$

Пусть, например, решение $\bar{x}^{*(n)} = \{x_1^{*(n)}, x_2^{*(n)}\}$ будет необходимой состоятельной оценкой вектора $\bar{H}(\bar{\theta}) = \{H(1, \theta_1), H(2, \theta_2)\}$. Тогда для достаточно большого количества наблюдений n значение статистики H_n должно быть близким к величине $\pi_1 H(1, \theta_1) + \pi_2 H(2, \theta_2)$. Используя вид стационарного распределения $\bar{\pi} = \{\pi_1, \pi_2\}$ цепи $x(t)$, $t = 0, 1, 2, \ldots$, и приведенные выше выражения для решений $\bar{x}^{*(n)} = \{x_1^{*(n)}, x_2^{*(n)}\}$, получаем

$$\pi_1 x_1^{*(n)} + \pi_2 x_2^{*(n)} =$$

$$= \frac{p_{21}}{p_{12} + p_{21}} \left(y_1^* + y_2^* \sqrt{\frac{p_{12}}{p_{21}}} \right) + \frac{p_{12}}{p_{12} + p_{21}} \left(y_1^* - y_2^* \sqrt{\frac{p_{21}}{p_{12}}} \right) = y_1^*.$$

Поэтому статистика H_n не позволяет различить два разных решения, в которых выбрано соответственно $y_2^* = \sqrt{s_2}$ и $y_2^* = -\sqrt{s_2}$. Для окончательного выбора нужного решения необходимо использовать построенные на основании наблюдений $\bar{\xi} = (\xi(0), \xi(1), \xi(2), \ldots, \xi(n))$ статистики более высоких порядков. Можно также с этой целью использовать дополнительную информацию о свойствах модели. Примеры подобного анализа приведены в работах [2, 3, 11]. Рассмотрим пример, касающийся параметрического оценивания.

Предположим, что на основании наблюдений $\bar{\xi} = (\xi(0), \xi(1), \xi(2), \ldots, \xi(n))$ компоненты $\xi(t)$, $t = 0, 1, 2, \ldots$, случайного процесса $(x(t), \xi(t))$, $t = 0, 1, 2, \ldots$, необходимо оценить вторые моменты случайных величин $[\{\xi_i^{(l)}, l = 0, 1, 2, \ldots\}, i = 1, 2]$:

$$m_2(1) = E(\xi_1^{(l)})^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 dF_1(x), \quad m_2(2) = E(\xi_2^{(l)})^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 dF_2(x).$$

Можно предложить следующую практическую интерпретацию подобной задачи. Предположим, что точность измерения наблюдаемых последовательных значений $\xi(0), \xi(1), \xi(2), \ldots$ зависит от неизвестного в момент наблюдения t состояния $x(t)$ цепи Маркова. Необходимо только на основании наблюдений $\overline{\xi} = (\xi(0), \xi(1), \xi(2), \ldots, \xi(n))$ оценить точность измерения для каждого состояния цепи Маркова $x(t)$. В качестве функции $h(x)$, $x \in R_1$, в этом случае выберем функцию

$$h(x) = x^2, \ \ x \in R_1.$$

Тогда статистики $H_n(1)$ и $H_n(2)$ принимают соответственно вид

$$H_n(1) = \frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n} (\xi(l))^2 (\xi(l+1))^2, \ \ H_n(2) = \frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n} (\xi(l))^2 (\xi(l+2))^2.$$

Введем следующие обозначения:

$$M_2^{(1)} = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} \pi_i p_{ij} m_2(i) m_2(j), \tag{11}$$

$$M_2^{(2)} = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} \pi_i p_{ij}^{(2)} m_2(i) m_2(j). \tag{12}$$

Очевидно, что $\overline{m}_2 = \{m_2(1), m_2(2)\} > 0$. Поэтому исследуем знаки решений $\overline{x}^* = \{x_1^*, x_2^*\}$ системы уравнений

$$\begin{cases} \overline{x}\,\Pi P[\overline{x}]^{\mathrm{T}} = M_2^{(1)} \\ \overline{x}\,\Pi P^2[\overline{x}]^{\mathrm{T}} = M_2^{(2)}, \end{cases} \tag{13}$$

где $\overline{x} = \{x_1, x_2\}$. Запишем матрицу $P = [p_{ij}]$, $i, j \in \{1, 2\}$, следующим образом:

$$P = G_1 + (1 - p_{12} - p_{21}) G_2,$$

где

$$G_1 = \begin{bmatrix} \dfrac{p_{21}}{p_{12}+p_{21}} & \dfrac{p_{12}}{p_{12}+p_{21}} \\ \dfrac{p_{21}}{p_{12}+p_{21}} & \dfrac{p_{12}}{p_{12}+p_{21}} \end{bmatrix}, \quad G_2 = \begin{bmatrix} \dfrac{p_{12}}{p_{12}+p_{21}} & -\dfrac{p_{12}}{p_{12}+p_{21}} \\ -\dfrac{p_{21}}{p_{12}+p_{21}} & \dfrac{p_{21}}{p_{12}+p_{21}} \end{bmatrix}.$$

Тогда $P^2 = G_1 + (1 - p_{12} - p_{21})^2 G_2$. Введем матрицы:

$$\hat{G}_1 = \begin{bmatrix} \dfrac{p_{21}}{p_{12}+p_{21}} & \dfrac{\sqrt{p_{12}}}{p_{12}+p_{21}} \\ \dfrac{\sqrt{p_{21}}}{p_{12}+p_{21}} & \dfrac{p_{12}}{p_{12}+p_{21}} \end{bmatrix}, \quad \hat{G}_2 = \begin{bmatrix} \dfrac{p_{12}}{p_{12}+p_{21}} & -\dfrac{\sqrt{p_{12}}}{p_{12}+p_{21}} \\ -\dfrac{\sqrt{p_{21}}}{p_{12}+p_{21}} & \dfrac{p_{21}}{p_{12}+p_{21}} \end{bmatrix},$$

а также вектор $\hat{\overline{m}}_2 = \overline{m}_2 \hat{\Pi} = \{\sqrt{\pi_1}\, m_2(1), \sqrt{\pi_2}\, m_2(2)\}$. Тогда матрица $A = \hat{\Pi} P \hat{\Pi}^{-1}$ принимает вид $A = \hat{G}_1 + (1 - p_{12} - p_{21}) \hat{G}_2$, а равенства (11), (12) можно записать следующим образом:

$$\hat{\overline{m}}_2 [\hat{G}_1 + (1 - p_{12} - p_{21}) \hat{G}_2][\hat{\overline{m}}_2]^{\mathrm{T}} = M_2^{(1)}, \tag{14}$$

$$\hat{\overline{m}}_2 [\hat{G}_1 + (1 - p_{12} - p_{21})^2 \hat{G}_2][\hat{\overline{m}}_2]^{\mathrm{T}} = M_2^{(2)}. \tag{15}$$

Обозначим: $V_1 = \hat{\overline{m}}_2 \hat{G}_1 [\hat{\overline{m}}_2]^{\mathrm{T}}$, $V_2 = \hat{\overline{m}}_2 \hat{G}_2 [\hat{\overline{m}}_2]^{\mathrm{T}}$. Координаты вектора $\hat{\overline{m}}_2$ положительны. Все элементы матрицы $\hat{G}_1$ тоже положительны, а среди элементов матрицы $\hat{G}_2$ имеются отрицательные. Поэтому для квадратичных форм V_1 и V_2 выполняется неравенство $V_1 > V_2$. Записывая равенства (14), (15) в виде

$$V_1 + (1 - p_{12} - p_{21})V_2 = M_2^{(1)},$$

$$V_1 + (1 - p_{12} - p_{21})^2 V_2 = M_2^{(2)},$$

получаем

$$V_2 = \frac{M_2^{(1)} - M_2^{(2)}}{(1 - p_{12} - p_{21})(p_{12} + p_{21})}, \; V_1 = \frac{M_2^{(2)} - M_2^{(1)}(1 - p_{12} - p_{21})}{(p_{12} + p_{21})}.$$

Как следует из проведенных ранее рассуждений, возможные решения $\bar{x}^* = \{x_1^*, x_2^*\}$ системы уравнений (13) имеют вид

$$\left\{ x_1^* = (\pm\sqrt{V_1}) + \sqrt{\frac{p_{12}}{p_{21}}}(\pm\sqrt{V_2}),\; x_2^* = (\pm\sqrt{V_1}) - \sqrt{\frac{p_{21}}{p_{12}}}(\pm\sqrt{V_2}) \right\}.$$

Два решения среди возможных четырех имеют отрицательные компоненты. Поэтому необходимо исследовать только решения вида

$$\bar{x}^*(1) = \left\{ x_1^*(1) = \sqrt{V_1} + \sqrt{\frac{p_{12}}{p_{21}}}\sqrt{V_2},\; x_2^*(1) = \sqrt{V_1} - \sqrt{\frac{p_{21}}{p_{12}}}\sqrt{V_2} \right\},$$

$$\bar{x}^*(2) = \left\{ x_1^*(2) = \sqrt{V_1} - \sqrt{\frac{p_{12}}{p_{21}}}\sqrt{V_2},\; x_2^*(2) = \sqrt{V_1} + \sqrt{\frac{p_{21}}{p_{12}}}\sqrt{V_2} \right\},$$

которые могут быть строго положительны. Очевидно, что $x_1^*(1) > 0$ и $x_2^*(2) > 0$. Пусть $p_{12} = p_{21}$. Тогда $x_2^*(1) = x_1^*(2) = \sqrt{V_1} - \sqrt{V_2} > 0$ и оба решения

$$\bar{x}^*(1) = \{x_1^*(1); x_2^*(1)\},\; \bar{x}^*(2) = \{x_1^*(2); x_2^*(2)\}$$

могут быть вектором $\bar{m}_2 = \{m_2(1), m_2(2)\}$. При этом $x_1^*(1) = x_2^*(2)$ и $x_2^*(1) = x_1^*(2)$. Поэтому в случае, когда $p_{12} = p_{21}$, невозможно только по наблюдениям $\bar{\xi} = (\xi(0), \xi(1), \xi(2), \ldots, \xi(n))$ второй компоненты случайного процесса $(x(t), \xi(t))$, $t = 0,1,2,\ldots$, установить соответствие координат векторов $\bar{x}^*(1)$ и $\bar{x}^*(2)$ состояниям цепи Маркова.

Пусть теперь $p_{12} > p_{21}$. Тогда очевидно, что $x_1^*(1) > 0$ и $x_2^*(1) > 0$, поскольку $V_1 > V_2$. В то же время координата $x_1^*(2)$ вектора $\bar{x}^*(2)$ может быть отрицательна. И наоборот, если $p_{12} < p_{21}$, то $x_1^*(2) > 0$ и $x_2^*(2) > 0$, а координата $x_2^*(1)$ вектора $\bar{x}^*(1)$ может быть отрицательна. Покажем, каким образом дополнительную информацию о свойствах модели можно использовать для окончательного выбора нужного решения.

Пример 1.2. Пусть, например, $p_{12} = 1$, что характерно для подобных иерархических моделей, встречающихся в теории массового обслуживания [11]. Тогда для произвольных значений $0 < p_{21} < 1$ решение $\bar{x}^*(1) = \{x_1^*(1); x_2^*(1)\} > 0$ всегда будет положительным. Условие положительности координаты $x_1^*(2)$ вектора $\bar{x}^*(2)$ принимает вид

$$p_{21} M_2^{(1)} + M_2^{(2)} > \frac{M_2^{(2)} - M_2^{(1)}}{(p_{21})^2}.$$

Учитывая ограничение $0 < p_{21} < 1$, получаем

$$(p_{21})^2 M_2^{(2)} + p_{21}(M_2^{(2)} - M_2^{(1)}) - (M_2^{(2)} - M_2^{(1)}) > 0.$$

Пусть

$$M=\frac{\sqrt{(M_2^{(2)}-M_2^{(1)})(M_2^{(2)}+3M_2^{(1)})-(M_2^{(2)}-M_2^{(1)})}}{2M_2^{(2)}}.$$

Поскольку $(M_2^{(2)}-M_2^{(1)})>0$, имеем $0<M<1$.

В случае, когда $0<p_{21}<M$, единственным положительным решением системы уравнений (13) будет решение $\bar{x}^*(1)$. Поэтому $\overline{m}_2=\bar{x}^*(1)$ и, следовательно, вектор

$$\left\{\sqrt{s_1}+\frac{1}{\sqrt{p_{21}}}\sqrt{s_2},\ \sqrt{s_1}-\sqrt{p_{21}}\sqrt{s_2}\right\},$$

где $\{s_1, s_2\}$ — решения системы уравнений (10), является состоятельной оценкой вектора $\overline{m}_2=\{m_2(1), m_2(2)\}$.

В случае, когда $M<p_{21}<1$, оба решения, $\bar{x}^*(1)\}$ и $\bar{x}^*(2)$, положительны и поэтому могут быть вектором $\overline{m}_2=\{m_2(1), m_2(2)\}$. Окончательный выбор состоятельной оценки вектора $\overline{m}_2$ среди решений

$$\left\{\sqrt{s_1}+\frac{1}{\sqrt{p_{21}}}\sqrt{s_2},\ \sqrt{s_1}-\sqrt{p_{21}}\sqrt{s_2}\right\},\qquad \left\{\sqrt{s_1}-\frac{1}{\sqrt{p_{21}}}\sqrt{s_2},\ \sqrt{s_1}+\sqrt{p_{21}}\sqrt{s_2}\right\}$$

требует дополнительных исследований с применением статистик более высоких порядков [3], построенных по наблюдениям $\overline{\xi}=(\xi(0), \xi(1), \xi(2), \ldots, \xi(n))$.

Замечание 1. Используя предложенный метод, продолжим анализ иерархических моделей, встречающихся в теории массового обслуживания, и рассмотрим трехуровневую иерархическую стохастическую структуру: $m=3$, $E=\{1, 2, 3\}$. Матрица $P=[p_{ij}]$, $i, j\in E$, переходных вероятностей цепи Маркова $x(t)$, $t=0,1,2,\ldots$, за один шаг имеет вид

$$P=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ \alpha & 0 & 1-\alpha\\ 0 & \beta & 1-\beta\end{bmatrix},\ 0<\alpha<1,\ 0<\beta<1.$$

Тогда для произвольных $0<\alpha<1$ и $0<\beta<1$ матрица P имеет три разных, действительных, отличных от нуля собственных числа $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$:

$$\lambda_1=1;\ \lambda_2=\frac{-\beta+\sqrt{\beta^2+4\alpha(1-\beta)}}{2};\ \lambda_3=\frac{-\beta-\sqrt{\beta^2+4\alpha(1-\beta)}}{2}.$$

Вектор $\overline{\pi}=\{\pi_1, \pi_2, \pi_3\}$ стационарного распределения цепи $x(t)$, $t=0,1,2,\ldots$, имеет вид

$$\pi_1=\frac{\alpha\beta}{(1-\alpha)+\beta(1+\alpha)};\ \pi_2=\frac{\beta}{(1-\alpha)+\beta(1+\alpha)};\ \pi_3=\frac{1-\alpha}{(1-\alpha)+\beta(1+\alpha)}.$$

Следовательно, выполнены все условия теоремы 2. Поэтому можно в явном виде записать все решения $\bar{x}^{*(n)}=\{x_1^{*(n)}, x_2^{*(n)}, x_3^{*(n)}\}$ системы уравнений (2), среди которых имеется состоятельная оценка $\overline{H}^{*(n)}(\overline{\theta})$ вектора $\overline{H}(\overline{\theta})$. Выбор соответствующего решения среди $2^3=8$ возможных решений можно сделать, используя рассуждения, подобные предложенным в рассмотренном примере.

Пример 2.1. Рассмотрим задачу оценивания параметров деформации в схеме неполных наблюдений для иерархической структуры. Пусть $x(t)$, $t=0,1,2,\ldots$, означает описанную однородную цепь Маркова с дискретным временем, с конечным множеством состояний $E=\{1,2,\ldots,m\}$, переходные вероятности $P=[p_{ij}]$, $i,j\in E$, которой за один шаг определяются равенством (1). Предположим, что вектор наблюдений $\bar{\xi}=(\xi(0),\xi(1),\xi(2),\ldots,\xi(n))$ имеет структуру

$$\xi(t)=d_{x(t)}(\tau_{x(t)}^{(t)},\theta),\ t=0,1,2,\ldots,$$

где $\{\tau_i^{(k)},\ k=0,1,2,\ldots\}$ — совокупность не зависящих от цепи Маркова $x(t)$, $t=0,1,2,\ldots$, случайных величин, таких, что для разных значений индекса k величины $\tau_i^{(k)}$ независимы между собой, имеют известное распределение, которое не зависит от индекса k и определяется функцией

$$F_i(x)=P\{\tau_i^{(k)}<x\},\quad -\infty<x<\infty,\ i=1,2,\ldots,m.$$

Известна также векторная функция

$$D(x,\theta)=\{d_1(x,\theta),d_2(x,\theta),\ldots,d_m(x,\theta)\},$$

зависящая от неизвестного параметра $\theta=\{\theta_1,\theta_2,\ldots\theta_r\}\in\Theta\subset R_r$, где Θ — открытое подмножество в R_r. Назовем $D(x,\theta)$ функцией деформации.

Предполагается, что значения $(x(0),x(1),x(2),\ldots,x(n))$ состояний цепи Маркова $x(t)$, $t=0,1,2,\ldots$, недоступны для наблюдения. Задача состоит в том, чтобы только на основании наблюдений $\bar{\xi}=(\xi(0),\xi(1),\xi(2),\ldots,\xi(n))$ построить состоятельные оценки для неизвестных значений $\theta^{(0)}=\{\theta_1^{(0)},\theta_2^{(0)},\ldots,\theta_r^{(0)}\}$ параметра θ.

Предположим, что $m=2$, для функции $D(x,\theta)$, которая определяет структуру вектора наблюдений $\bar{\xi}=(\xi(0),\xi(1),\xi(2),\ldots,\xi(n))$, выбрана соответствующая функция $h(x)$. На основании функции $h(x)$ определены координаты $H(1,\theta)$ и $H(2,\theta)$ вектора $\bar{H}(\bar{\theta})$ и соответствующие статистики $H_n(1)$ и $H_n(2)$. В некоторых моделях случайные величины $\tau_i^{(k)}$ можно интерпретировать как время пребывания иерархической стохастической структуры на соответствующем уровне i. Поэтому параметры деформации можно воспринимать как параметры «смещения» или «запаздывания» в регистрировании изменения состояния структуры. Эту дополнительную информацию о функции $D(x,\theta)$ можно использовать при выборе нужных решений системы уравнений (2). Для конкретизации этого утверждения рассмотрим задачу оценивания параметров «смещения» для процесса гибели и размножения.

Предположим далее, что функции распределения $F_i(x)$, $i=1,2$, случайных величин $[\{\tau_i^{(k)},\ k=0,1,2,\ldots\},\ i=1,2]$ и матрица переходных вероятностей цепи Маркова $x(t)$, $t=0,1,2,\ldots$, имеют соответственно вид

$$F_1(t)=P\{\tau_1^{(k)}<t\}=\begin{cases}1-e^{-\lambda t}, & \text{если}\quad 0<t<\infty,\\ 0, & \text{если}\quad t\le 0,\end{cases}$$

$$F_2(t)=P\{\tau_2^{(k)}<t\}=\begin{cases}1-e^{-(\lambda+\nu)t}, & \text{если}\quad 0<t<\infty,\\ 0, & \text{если}\quad t\le 0,\end{cases}$$

$$P=\begin{bmatrix}0 & 1\\ \dfrac{\nu}{\lambda+\nu} & \dfrac{\lambda}{\lambda+\nu}\end{bmatrix}.$$

Подобная модель описывает моменты изменения состояний системы обслуживания $M/M/1/0$. Пусть процесс $\mu(t)$ описывает количество требований в системе в момент времени t, при этом состояние $\{1\}$ соответствует количеству $\mu(t)=0$, а состояние $\{2\}$ — количеству $\mu(t)=1$. Обозначим $s_1,s_2,\ldots,s_k\ldots$ объединенный поток моментов поступления в систему и ухода из нее требований (вместе с моментами их потери в случае поступления в занятую систему). Если интенсивности поступления и обслуживания требований равны соответственно λ и ν, то для цепи Маркова $x(k)$, $k=1,2,\dots$, определенной равенством $x(k)=\mu(s_k)$, $k=1,2,\dots$, имеет место соотношение

$$P\left\{s_k - s_{k-1} < t \Big/ x(k-1)=i\right\} = F_i(t), \ i=1,2 .$$

Стационарным распределением цепи $x(k)$, $k=1,2,\dots$, будет вектор $\overline{\pi} = \left\{\frac{\nu}{\lambda+2\nu}; \frac{\lambda+\nu}{\lambda+2\nu}\right\}$. Собственные числа $\{\lambda_1, \lambda_2\}$ матрицы P равны соответственно $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 = -\frac{\nu}{\lambda+\nu}$. Ортогональная матрица $U=[u_{ij}]$, $i=1,2$, $j=1,2$, имеет вид

$$U = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{\nu}}{\sqrt{\lambda+2\nu}} & \frac{\sqrt{\lambda+\nu}}{\sqrt{\lambda+2\nu}} \\ -\frac{\sqrt{\lambda+\nu}}{\sqrt{\lambda+2\nu}} & \frac{\sqrt{\nu}}{\sqrt{\lambda+2\nu}} \end{bmatrix}.$$

Тогда, как следует из рассуждений, приведенных в описании алгоритма метода, независимо от конкретного вида функции деформации $D(x,\theta)$ и конкретного вида функции $h(x)$ система уравнений

$$\begin{cases} \overline{x}\,\Pi P[\overline{x}]^{\mathrm{T}} = H_n(1) \\ \overline{x}\,\Pi P^2[\overline{x}]^{\mathrm{T}} = H_n(2) \end{cases}$$

имеет решения $\overline{x}^{*(n)} = \{x_1^{*(n)}, x_2^{*(n)}\}$, где

$$x_1^{*(n)} = z_1^* - \frac{\sqrt{\lambda+\nu}}{\sqrt{\nu}} z_2^*, \ x_2^{*(n)} = z_1^* + \frac{\sqrt{\nu}}{\sqrt{\lambda+\nu}} z_2^*,$$

а координаты вектора $\overline{z}^* = \{z_1^*, z_2^*\}$ определяются следующим образом: $z_i^* = \sqrt{H_i^*}$ или $z_i^* = -\sqrt{H_i^*}$, $i=1,2$. При этом

$$H_1^* = \frac{\lambda+\nu}{\lambda+2\nu} H_n(2) + \frac{\nu}{\lambda+2\nu} H_n(1), \ H_2^* = \frac{(\lambda+\nu)^2}{\nu(\lambda+2\nu)} (H_n(2) - H_n(1)).$$

Если, принимая во внимание интерпретацию неизвестных параметров, предположить, что координаты $H(1,\theta)$ и $H(2,\theta)$ вектора $\overline{H}(\overline{\theta})$ положительны, то $z_1^* = \sqrt{H_1^*}$, что согласуется с примером 1.2, в котором следует принять $p_{21} = \frac{\nu}{\lambda+\nu}$, $p_{22} = \frac{\lambda}{\lambda+\nu}$. Выбор соответствующего знака для координаты z_2^* в конкретных условиях можно произвести, используя рассуждения из примера 1.2.

Пример 2.2. Определим более подробно структуру функции $D(x,\theta)$. Рассмотрим следующую модель:

$$\xi(t) = a_{x(t)} + \tau_{x(t)}^{(t)}, \ t=0,1,2,\dots,$$

$$m=2, \ d_1(x,a_1) = a_1 + x, \ d_2(x,a_1) = a_2 + x, \ \theta = \{a_1, a_2\} \in \Theta \subset R_2 .$$

В качестве функции $h(x)$ выберем функцию

$$h(x) = x, \quad x \in R_1 .$$

Тогда статистики $H_n(1)$ и $H_n(2)$ принимают соответственно вид

$$H_n(1)=\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}\xi(l)\xi(l+1),\ H_n(2)=\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}\xi(l)\xi(l+2).$$

Обозначим: $m_1=E(\tau_1^{(k)}),\ m_2=E(\tau_2^{(k)})$. Тогда

$$H(1,\theta)=E[a_1+\tau_1^{(k)}]=a_1+m_1,\ H(2,\theta)=E[a_2+\tau_2^{(k)}]=a_2+m_2.$$

В этом случае «деформация» означает запаздывание в регистрировании изменения состояний системы обслуживания, и, следовательно, оцениваемые величины $\{a_1,a_2\}$ можно считать положительными: $a_1>0,\ a_2>0$.

В свою очередь, координата $\xi(k)$ вектора наблюдений $\bar{\xi}$ будет стохастически эквивалентна значению $\zeta(k)$ случайного процесса $\zeta(k)=\zeta^{(k)}(x(k)),\ k=1,2,\ldots$, в котором $x(t),\ t=0,1,2,\ldots$, — цепь Маркова с матрицей переходных вероятностей за один шаг:

$$P=\begin{bmatrix}0 & 1\\ \dfrac{\nu}{\lambda+\nu} & \dfrac{\lambda}{\lambda+\nu}\end{bmatrix}.$$

Соответственно $\{\zeta^{(k)}(1),\ k=0,1,2,\ldots\}$ и $\{\zeta^{(k)}(2),\ k=0,1,2,\ldots\}$ — не зависящие от цепи Маркова $x(t),\ t=0,1,2,\ldots$, совокупности случайных величин таких, что для разных значений индекса k величины $\zeta^{(k)}(i),\ i=1,2$, независимы между собой, а их распределение не зависит от индекса k и определяется следующими равенствами:

$$U_1(t)=P\{\zeta^{(k)}(1)<t\}=\begin{cases}1-e^{-\lambda(t-a_1)}, & \text{если}\quad a_1<t<\infty,\\ 0, & \text{если}\quad t\le a_1;\end{cases}$$

$$U_2(t)=P\{\zeta^{(k)}(2)<t\}=\begin{cases}1-e^{-(\lambda+\nu)(t-a_2)}, & \text{если}\quad a_2<t<\infty,\\ 0, & \text{если}\quad t\le a_2.\end{cases}$$

Обозначим соответствующий вектор наблюдений $\bar{\zeta}=(\zeta(0),\zeta(1),\zeta(2),\ldots,\zeta(n))$. Положим также $h(x)=x,\ x\in R_1$. Тогда

$$\hat{h}_1(\theta)=E[\zeta^{(k)}(1)]=a_1+\frac{1}{\lambda};\ \hat{h}_2(\theta)=E[\zeta^{(k)}(2)]=a_2+\frac{1}{\lambda+\nu},$$

а статистики $A_n(1)$ и $A_n(2)$, соответствующие статистикам $H_n(1)$ и $H_n(2)$, имеют вид

$$A_n(1)=\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}\zeta(l)\zeta(l+1),\ A_n(2)=\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}\zeta(l)\zeta(l+2).$$

Статистики $\bar{h}^*=\{h_n^*(1);h_n^*(2)\}$, на основании которых строится состоятельная оценка параметра $\theta=\{a_1,a_2\}$, имеют вид

$$h_n^*(1)=z_1^*-\frac{\sqrt{\lambda+\nu}}{\sqrt{\nu}}z_2^*;\ h_n^*(2)=z_1^*+\frac{\sqrt{\nu}}{\sqrt{\lambda+\nu}}z_2^*.$$

При этом координаты вектора $\bar{z}^*=\{z_1^*,z_2^*\}$ определяются следующим образом: $z_i^*=\sqrt{A_i^*}$ или $z_i^*=-\sqrt{A_i^*},\ i=1,2$, где

$$A_1^*=\frac{\lambda+\nu}{\lambda+2\nu}A_n(2)+\frac{\nu}{\lambda+2\nu}A_n(1);\ A_2^*=\frac{(\lambda+\nu)^2}{\nu(\lambda+2\nu)}(A_n(2)-A_n(1)).$$

Рассмотрим разность

$$\hat{h}_2(\theta)-\hat{h}_1(\theta)=(a_2-a_1)-\frac{\nu}{\lambda(\lambda+\nu)}.$$

В то же время

$$h_n^*(2)-h_n^*(1)=z_2^*\frac{\lambda+2\nu}{\sqrt{\nu(\lambda+\nu)}}$$

или

$$z_2^*=\frac{\sqrt{\nu(\lambda+\nu)}}{\lambda+2\nu}(h_n^*(2)-h_n^*(1)).$$

Поскольку знак числа, определяющего разность $(h_n^*(2)-h_n^*(1))$, совпадает со знаком разности $(\hat{h}_2(\theta)-\hat{h}_1(\theta))$, то знак величины z_2^* определяется знаком величины $(a_2-a_1)-\frac{\nu}{\lambda(\lambda+\nu)}$. Согласно предположениям параметры (λ,ν) системы обслуживания известны. Поэтому окончательный выбор знака для z_2^* сводится к исследованию взаимоотношения длительностей запаздывания a_1 и a_2. Как следует из проведенных рассуждений, состоятельными оценками параметров (a_1,a_2) являются статистики:

$$a_n^*(1)=h_n^*(1)-\frac{1}{\lambda};\; a_n^*(2)=h_n^*(2)-\frac{1}{\lambda+\nu}.$$

Замечание 2. Практически ничего не изменится в рассуждениях, проведенных в примере 2.2, если предположить, что функция деформации $D(x,\theta)=\{d_1(x,\theta),d_2(x,\theta)\}$ определяется следующим образом:

$$\theta=\{b_1,b_2\}\in\Theta\subset R_2,\; d_1(x,\theta)=b_1x;\; d_2(x,\theta)=b_2x.$$

Выбирая снова $h(x)=x,\ x\in R_1$, получаем

$$\hat{h}_1(\theta)=E[d_1(\tau_1,b_1)]=\lambda b_1\int_0^\infty xe^{-\lambda x}dx=\frac{b_1}{\lambda},$$

$$\hat{h}_2(\theta)=E[d_2(\tau_2,b_2)]=(\lambda+\nu)b_2\int_0^\infty xe^{-(\lambda+\nu)x}dx=\frac{b_2}{\lambda+\nu}.$$

Поэтому состоятельные оценки для параметров (b_1,b_2) имеют вид

$$b_n^*(1)=\lambda h_n^*(1);\; b_n^*(2)=(\lambda+\nu)h_n^*(2).$$

Отметим также, что подобным образом можно строить оценки параметров более сложных преобразований, например:

$$\theta=\{c_1,c_2\}\in\Theta\subset R_2,\; d_1(x,\theta)=c_1x^{k_1};\; d_2(x,\theta)=c_2x^{k_2},$$

где (k_1,k_2) — известные натуральные числа, (c_1,c_2) — неизвестные параметры.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Следует заметить, что в общем случае выполнять детальный анализ модели с помощью формальных математических средств нецелесообразно. Рассмотренные примеры показывают, что нужно максимально использовать конкретные условия в каждой конкретной ситуации, что помогает отсеять заведомо неподходящие решения и существенным образом упрощает задачу выбора искомого решения. Другими словами, после отсеивания заведомо лишних решений окончательный выбор состоятельных оценок необходимо осуществлять, комбинируя аналитические и эмпирические методы исследования, т.е. анализируя формальными методами вид оставшихся решений и проверяя их с помощью дополнительных статистик вектора неполных наблюдений $\overline{\xi} = (\xi(0), \xi(1), \xi(2), \ldots, \xi(n))$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н. Статистика случайных процессов. — М.: Наука, 1974. — 696 с.
2. Voina O.A. Nonparametric estimation for a compound Poisson process governed by a Markov chain // Theor. Probab. and Math. Statist. — 2013. — N 85. — P. 41–52.
3. Voina A.A. Statistical estimation in a scheme of random variables on Markov chains, with incomplete observations // Ibid. — 1988. — N 37. — P. 19–28.
4. Voina O.A. Conditional distributions of diskontinuous processes in a random medium // Ibid. — 1997. — N 55. — P. 37–47.
5. Voina O.A. Interpolation equation for some classes of Markov processes // Ibid. — 1998. — N 57. — P. 19–31.
6. Rabiner L.R., Juang B.H. An introduction to Hidden Markov Models // IEEE ASSP Mag. — 1986. — **3**, N 1. — P. 4–16.
7. Jones M.T. Al application programming. — Hingham (Mass.): Charles River Media, 2003 (М.Т. Джонс. Программирование искусственного интеллекта в приложениях. — М.: ДМК Пресс., 2006. — 312 с.).
8. Kemeny J.G., Snell J.L. Finite Markov chains. — Princeton (N.J.): Van Nostrand, 1960. — 300 p.
9. Гихман И.И., Скороход А.В. Теория случайных процессов. — М.: Наука, 1971. — Т. 1. — 664 с.; 1973. — Т. 2. — 670 с.
10. Lancaster P. Theory of matrices. — New York: Acad. Press, 1969. — 250 p.
11. Voina O.A., Czapla E. An application of the correlation structure of a Markov chain for the estimation of shift parameters in queuing systems // Theor. Probab. and Math. Statist. — 2005. — N 71. — P. 53–61.
12. Кокс Д., Льюис П. Статистический анализ последовательностей событий. — М.: Мир, 1969. — 312 с.
13. Война А.А. Асимптотическая оптимизация для стохастических моделей, построенных на основании сложного пуассоновского процесса // Кибернетика и системный анализ. — 2011. — № 4. — С. 165–175.

Поступила 19.12.2013