УДК 519.21

**Б.В. НОРКИН**

# СТОХАСТИЧЕСКОЕ ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПРОЦЕССАМИ РИСКА С ЛИПШИЦЕВЫМИ ФУНКЦИЯМИ ВЫИГРЫША

**Аннотация.** Исследована задача стохастического оптимального управления дивидендной политикой страховой компании в дискретном времени с общей липшицевой функцией выигрыша, включающей индикаторы доходности и риска. Для построения оптимальных управлений и оценки показателей функционирования компании обоснован метод динамического программирования. Получены оценки скорости сходимости метода последовательных приближений для нахождения, вообще говоря, неограниченных функций Беллмана. Парето-оптимальное множество задачи численно аппроксимируется с помощью барьерно-пропорциональных стратегий управления.

**Ключевые слова:** процесс риска, страхование, стохастическое оптимальное управление, дискретное время, липшицевые функции выигрыша, оптимальная дивидендная политика, динамическое программирование, метод последовательных приближений, парето-оптимальность, барьерно-пропорциональные стратегии.

## ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе исследуется проблема оптимального управления дивидендной политикой страховой компании в дискретном времени и с общей липшицевой функцией выигрыша, включающей индикаторы доходности и риска. Функционирование страховой компании описывается стохастическим процессом риска в дискретном времени с вычитанием дивидендов. Концептуально данная задача рассматривается как двухкритериальная: необходимо максимизировать ожидаемый показатель доходности (средние суммарные дисконтированные дивиденды) и минимизировать риск (вероятность) разорения на заданном интервале планирования. Цель рабы состоит в построении парето-оптимальных границ в пространстве показателей качества управления «доходность–риск».

В однокритериальной постановке для бесконечного интервала времени проблема нахождения оптимальных дивидендов изучалась в работах [1–4] и других (обзоры [5, 6]). В качестве основного критерия оптимизации использовались средние суммарные дисконтированные дивиденды. В частности, в [1] описан следующий парадокс (парадокс де Финетти): при оптимальной стратегии управления (на бесконечном интервале времени) страховая компания разоряется с вероятностью единица (см. также обсуждение парадокса в [2–6]). Данный результат показывает, что приведенная постановка задачи не является полностью удовлетворительной. Желательно найти эффективную дивидендную стратегию, при которой вероятность разорения мала. Отметим, что разорение может произойти в очень отдаленном будущем, поэтому целесообразно рассматривать процесс на конечном интервале времени. Кроме того, важно явно учесть в постановке задачи показатели риска.

Частные случаи задачи оптимизации дивидендных стратегий с учетом показателей риска (вероятность разорения или время жизни процесса, конечного состояния процесса) изучались в [8–17]. В работах [18–20] данная проблема решалась путем оптимизации свертки показателей доходности и риска. Однако в общем случае проблема многокритериальной оптимизации дивидендных стратегий для разнообразных критериев доходности и риска ни теоретически, ни практически (численно) полностью не решена. Трудность состоит в том, что оптимальное значение функционала задачи не является равномерно ограниченной сверху функцией на множестве начальных состояний процесса риска. Это не позволяет использовать стандартную sup-норму для функций Беллмана и принцип сжимающих отображений для нахождения решения. Кроме того, построение парето-оптимального множества предполагает вычисление разнообразных показателей доходности и риска для того или иного набора управлений, что требует решения большого числа интегральных уравнений и является непростой задачей.

В принципе, парето-оптимальная граница может быть найдена как огибающая множества всех возможных пар «средние дивиденды–вероятность разорения», соответствующих всем допустимым стратегиям управления. Множество таких стратегий бесконечно, поэтому важно перебирать только «хорошие» (эффективные) стратегии. В работах [1–4] отмечено, что для однокритериальной постановки оптимальными являются барьерные (пороговые) стратегии: если текущий капитал меньше некоторого барьера, то дивиденды не выплачиваются, в противном случае выплачивается сумма превышения капитала над порогом. Таким образом, при барьерной стратегии управления процесс не превосходит некоторого барьера. Однако нетрудно видеть, что при барьерной стратегии с увеличением горизонта планирования вероятность разорения стремится к единице [1] (см. также [4]). Поэтому целесообразно рассматривать и другие типы стратегий, при которых процесс риска может быть не ограничен. Одна из них — пропорциональная стратегия, когда в качестве дивидендов выплачивается определенная доля от превышения текущего капитала над заданным порогом (барьером). В [3] изучаются оптимальные нелинейные барьерные стратегии, в которых оптимизируются параметры барьера. Возможно также использование комбинации барьерной и пропорциональной стратегий. Обзор результатов по оптимальным дивидендным стратегиям в однокритериальных задачах приведен в [5–7].

Еще одна возможность построения эффективных стратегий управления состоит в решении задачи стохастического оптимального управления для свертки каких-либо критериев. В работах [18, 19] исследовалась свертка средних дисконтированных дивидендов (с варьируемым коэффициентом) и среднего дисконтированного времени жизни (этот показатель рассматривался также в [2, 16]). Дисконтирование означает, что при принятии текущих решений год жизни в далеком будущем значит меньше, чем год жизни в ближайшее время. Дисконтирование также позволяет избежать формальной проблемы возможного бесконечного среднего времени жизни. В работе [20] рассматривалась свертка средних дисконтированных дивидендов и среднего дисконтированного заемного капитала, необходимого для предотвращения разорения. Для простых сверток критериев и простого множества допустимых управлений в [18–20] показано, что для полученных агрегированных задач оптимального управления справедлив принцип динамического программирования, выполнены уравнения Беллмана и существуют позиционные оптимальные стратегии управления дивидендами. Однако для общих интегральных липшицевых критериев управления процессом риска эти результаты не справедливы и требуют обобщения. В настоящей статье строятся новые линейные оценки функций Беллмана и новые оценки скорости сходимости метода последовательных приближений для решения уравнений Беллмана. Получены новые условия существования и единственности решений уравнений Беллмана, основанные не на общем принципе сжимающих отображений, а использующие специфику задачи.

Когда дивидендная политика (управление) уже определена, необходимо еще вычислить соответствующие показатели доходности (ожидаемые совокупные дивиденды) и риска (вероятность разорения, средний дефицит капитала). Вопрос эффективности вычисления этих сложных показателей становится принципиальным. Их можно найти путем решения некоторых интегральных уравнений [2, 21, 22] или оценить методом Монте-Карло [23]. В настоящей работе показано, что возникающие интегральные уравнения эффективно решаются методом последовательных приближений.

Процесс риска описывает стохастическую эволюцию резервов страховой компании, предназначенных для покрытия страховых требований. Математическая модель эволюции резервов $X_t$ в дискретном времени $t = 0, 1, \ldots$ имеет вид [1–7]

$$X_{t+1} = f(X_t, U_t, Y_t) = \begin{cases} X_t - U_t + Y_t, & X_t \ge 0, \\ X_t, & X_t < 0, \end{cases} \tag{1}$$

$$X_0 = x \ge 0,\ U_t \in \mathbf{U}(X_t),\ t = 0, 1, \ldots, \tag{2}$$

где $\{Y_t \ge 0\}$ — независимые одинаково распределенные (как некоторая случайная величина $Y$) случайные величины (агрегированные премии минус требования) с общей функцией распределения $F$; $U_t$ — вычитаемые дивиденды из допустимого множества $\mathbf{U}(X_t) \subseteq [0, X_t]$; $x$ — начальное состояние процесса (1). Обозначим момент остановки (разорения, замирания) $\tau = \sup\{t \ge 0 : \min_{0 \le k < t} X_k \ge 0\}$ ($\tau = 0$ при $X_0 < 0$) процесса и последовательность допустимых управлений $U = \{U_t \in \mathbf{U}(X_t),\ t = 0, 1, \ldots\}$. Будем предполагать, что отображение $x \to \mathbf{U}(x) \subseteq [0, x]$ компактнозначно и полунепрерывно сверху.

Траектории процесса риска (1), (2) оцениваются на основании показателей выигрыша и риска. В качестве показателей выигрыша могут приниматься, например, среднее время жизни процесса, средние суммарные дисконтированные дивиденды, среднее дисконтированное значение капитала в момент остановки и др. В качестве показателей риска используются вероятность разорения, средний дефицит капитала по траектории или в момент остановки и др.

Обозначим $r(x, u, y)$ функцию вознаграждения за один шаг времени (по определению $r(x, u, y) = 0$ при $x < 0$). Например,

$$r_0(x, u, y) = \begin{cases} u, & x \ge 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases} \quad r_1(x, y) = \begin{cases} 1, & x \ge 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

$$r_2(x, u, y) = \begin{cases} \min\{0, x - u + y\}, & x \ge 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases} \quad r_3(x, u, y) = \begin{cases} \mathbf{1}_{\{x - u + y < 0\}}, & x \ge 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

где $\mathbf{1}_{\{\cdot\}}$ — индикаторная функция события в скобках (равна единице, если условие в скобках имеет место, и равна нулю в противном случае). Дисконтированная функция выигрыша за $(t+1)$ периодов при управлении $U = \{U_t,\ t = 0, 1, \ldots\}$ и начальном состоянии $x$ имеет вид

$$V_t(x, U) = \mathbf{E}\left[\sum_{k=0}^{t} \gamma^k r(X_k, U_k, Y_k)\right] = \mathbf{E}\left[\sum_{k=0}^{\min\{t, \tau-1\}} \gamma^k r(X_k, U_k, Y_k)\right], \tag{3}$$

где $\gamma$ — дисконтирующий множитель, $0 < \gamma \le 1$. В частности, представляют интерес следующие показатели: средние суммарные дисконтированные дивиденды (до момента $\min\{t, \tau - 1\}$)

$$V_t^0(x, U) = \mathbf{E}\left[\sum_{k=0}^{t} \gamma^k r_0(X_k, U_k, Y_k)\right] = \mathbf{E}\left[\sum_{k=0}^{\min\{t, \tau-1\}} \gamma^k U_k\right]; \tag{4}$$

среднее (дисконтированное при $\gamma < 1$) время жизни до момента $\min\{t, \tau - 1\}$

$$V_t^1(x, U) = \mathbf{E}\left[\sum_{k=0}^{t} \gamma^k r_1(X_k, U_k, Y_k)\right] = \mathbf{E}\left[\sum_{k=0}^{\min\{t, \tau-1\}} \gamma^k\right] = \frac{1 - \mathbf{E}\gamma^{\min\{t+1, \tau\}}}{1 - \gamma}; \tag{5}$$

средний дисконтированный дефицит капитала в момент остановки

$$V_t^2(x, U) = \mathbf{E}\left[\sum_{k=0}^{t} \gamma^k r_2(X_k, U_k, Y_k)\right] =$$

$$= \mathbf{E}\left[\sum_{k=0}^{\min\{t, \tau-1\}} \gamma^k \min\{0, X_k - U_k + Y_k\}\right]; \tag{6}$$

(дисконтированная при $\gamma < 1$) вероятность разорения за время $t$

$$V_t^3(x,U) = \mathbf{E}\left[\sum_{k=0}^{t} \gamma^k r_3(X_k, U_k, Y_k)\right] = \mathbf{E}\left[\sum_{k=0}^{\min\{t,\tau-1\}} \gamma^k \mathbf{1}_{\{X_k - U_k + Y_k < 0\}}\right]. \quad (7)$$

**Замечание 1.** Среднее время жизни $\mathbf{E}\tau$ не очень удобный индикатор риска, поскольку оно может равняться бесконечности. Поэтому наряду с $\mathbf{E}\tau$ в литературе [2, 24] рассматривается также так называемое среднее дисконтированное время жизни (5): $V_t^1(x,U) = (1-\mathbf{E}\gamma^{\min\{t+1,\tau\}})/(1-\gamma) \le 1/(1-\gamma)$. Очевидно, что $0 \le V_T^1(x,U) \le$ $\le \mathbf{E}\tau$. Дисконтирование можно интерпретировать как наличие некоторого случайного фактора (с биноминальным распределением), который может остановить процесс риска независимо от его текущего состояния [25].

Определим функции выигрыша (Беллмана)

$$V_t(x) = \sup_{\{U:\, U_k \in \mathbf{U}(x)\}} V_t(x,U). \quad (8)$$

По определению будем считать, что $V_t(x) = 0$ для $x < 0$. Аналогично $V_t^i(x) = \sup_{\{U:\, U_k \in \mathbf{U}(x)\}} V_t^i(x,U)$, где $V_t^i(x,U)$ для $i = 0, 1, 2, 3$ определены в (4)–(7). Для случая $t = +\infty$ введем отдельные обозначения:

$$V_\infty(x,U) = \mathbf{E}\left[\sum_{k=0}^{\tau-1} \gamma^k r(X_k, U_k, Y_k)\right] = V(x,U),$$

$$V_\infty(x) = \sup_{\{U:\, U_k \in \mathbf{U}(x)\}} V(x,U) = V(x), \quad (9)$$

$$V_\infty^i(x,U) = \mathbf{E}\left[\sum_{k=0}^{\tau-1} \gamma^k r_i(X_k, U_k, Y_k)\right] = V^i(x,U),$$

$$V_\infty^i(x) = \sup_{\{U:\, U_k \in \mathbf{U}(x)\}} V^i(x,U) = V^i(x).$$

### СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ БЕЛЛМАНА

Если функция вознаграждения за один период времени $r(x, u, y)$ равномерно ограничена, т.е. $r(x, u, y) \le A < +\infty$ для всех $(x, u, y)$, то очевидно, что функции (3), (8) также равномерно ограничены:

$$V_t(x,U) \le V_t(x) \le A(t+1), \quad \gamma = 1,$$

$$V_t(x,U) \le V_t(x) \le A/(1-\gamma), \quad 0 < \gamma < 1.$$

В противном случае, как, например, при $r_0(x, u, y) = u$, ограниченность и конечность функций Беллмана требуют обоснования.

**Лемма 1** (границы для значений функций выигрыша (4)–(7)). Пусть $\mathbf{U}(x) = [0, x]$, $\mathbf{E}\max\{0, Y\} < +\infty$, $\mathbf{E}\min\{0, Y\} > -\infty$ и $\gamma < 1$. Тогда функции Беллмана $V_t^i(x) = \sup_{\{U:\, U_t \in \mathbf{U}(x)\}} V_t^i(x,U)$, где $V_t^i(x,U)$ определены в (4)–(7), удовлетворяют следующим ограничениям:

$$x \le V_t^0(x) \le V^0(x) \le x + \gamma \mathbf{E}\max\{0, Y\}/(1-\gamma), \quad (10)$$

$$1 \le V_t^1(x) \le V^1(x) \le 1/(1-\gamma), \quad (11)$$

$$\mathbf{E}\min\{0, Y\}/(1-\gamma) \le V^2(x) \le V_t^2(x) \le 0, \quad (12)$$

$$0 \le V_t^3(x) \le V^3(x) \le 1. \quad (13)$$

**Доказательство.** Неравенства (10) приведены в [26; 4, Lemma 1.8)]. Поскольку

$$1 \le V_t^1(x,U) \le V^1(x,U) = \mathbf{E}\sum_{k=0}^{\tau-1} \gamma^k = (1-\mathbf{E}\gamma^\tau)/(1-\gamma) \le 1/(1-\gamma),$$

имеем $1 \le V_t^1(x) = \sup_U V_t^1(x,U) \le \sup_U V^1(x,U) = V^1(x) \le 1/(1-\gamma)$. Для $V^2(x,U)$ получаем

$$0 \ge V_t^2(x,U) \ge V^2(x,U) \ge \mathbf{E}\sum_{k=0}^{\tau-1}\gamma^k \min\{0, Y_k\} =$$

$$= \mathbf{E}\min\{0, Y\}\sum_{k=0}^{\infty}\gamma^k \ge \mathbf{E}\min\{0, Y\}/(1-\gamma),$$

откуда следует (12). Так как $0 \le V_t^3(x,U) \le V^3(x,U) = \gamma^{\tau-1} \le 1$, то выполнено (13). Лемма доказана.

**Замечание 2.** Наряду с функциями $V_t^i(x,U)$ рассмотрим их агрегаты вида

$$V_t(x,U) = V_t^0(x,U) + \lambda V_t^i(x,U), \tag{14}$$

где $\lambda \ge 0$ — агрегирующий множитель. Им соответствуют функции выигрыша за один шаг

$$r(x, u, y) = r_0(x, u, y) + \lambda r_i(x, u, y) = \begin{cases} u + \lambda r_i(x, u, y), & x \ge 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

В этом случае оценки снизу и сверху для функции Беллмана $V_t(x) = \sup_U V_t(x,U)$ легко получить из оценок (10)–(13) для составляющих функций $V_t^i(x,U)$. Например,

$$x \le \sup_U V_t^0(x,U) \le V_t(x) = \sup_U (V_t^0(x,U) + \lambda V_t^1(x,U)) \le$$

$$\le \sup_U V_t^0(x,U) + \lambda \sup_U V_t^1(x,U) \le x + \frac{\lambda + \gamma \mathbf{E}\max\{0, Y\}}{1-\gamma}.$$

Аналогично, с учетом того, что $\mathbf{E}\min\{0, Y\}/(1-\gamma) \le V_t^2(x,U) \le 0$, получаем

$$x + \frac{\lambda \mathbf{E}\min\{0, Y\}}{1-\gamma} \le V_t(x) = \sup_U (V_t^0(x,U) + \lambda V_t^2(x,U)) \le$$

$$\le \sup_U V_t^0(x,U) \le x + \frac{\gamma \mathbf{E}\max\{0, Y\}}{1-\gamma}.$$

Пусть справедливы следующие предположения:

1) $\mathbf{E}|Y| < \infty$ для случайной величины $Y$, распределенной так же, как все $\{Y_k\}$;

2) отображение $\mathbf{U}(x) \subseteq [0, x]$ замкнутозначно и полунепрерывно сверху;

3) функция $\bar{r}(x, u) = \mathbf{E}r(x, u, Y)$ полунепрерывна сверху по $(x, u)$;

4) $|r(x, u, y)| \le C_0 + C_1|y| + C_2 u + C_3 x$ для некоторых чисел $C_0, C_1, C_2, C_3 \ge 0$ и всех $(x \ge 0, u \in \mathbf{U}(x) \subseteq [0, x], y)$.

Заметим, что условие 3 выполнено для полунепрерывной сверху по $(x, u)$ функции $r(x, u, y)$, удовлетворяющей предположениям 1, 4. Условие 4 выполнено для липшицевых функций $r(x, u, y)$.

**Лемма 2** (граница для общих функций выигрыша ). Пусть выполнены предположения 1–4, тогда

$$|V_t(x)| \le |V(x)| \le (C_0 + C_1\mathbf{E}|Y| + (C_2 + C_3)x)/(1-\gamma) +$$

$$+ (C_2 + C_3)\gamma \mathbf{E}\max\{0, Y\}/(1-\gamma)^2.$$

**Доказательство.** Очевидно, что для $k < \tau$ в силу (1), (2) и предположения 2 имеет место

$$0 \le U_k \le X_k \le X_{k-1} + \max\{0, Y_{k-1}\} \le x + \sum_{s=0}^{k-1}\max\{0, Y_s\}$$

и, следовательно, ввиду предположения 4 имеем

$$|r(X_k, U_k, Y_k)| \le C_0 + C_1 |Y_k| + C_2 U_k + C_3 X_k \le C_0 + C_1 |Y_k| + (C_2 + C_3) X_k \le$$

$$\le C_0 + C_1 |Y_k| + (C_2 + C_3)\left(x + \sum_{s=0}^{k-1} \max\{0, Y_s\}\right).$$

Тогда

$$|V_t(x)| \le |V(x)| \le \sup_{\{U: U_k \in \mathbf{U}(X_k)\}} \mathbf{E}\left[\sum_{k=0}^{\tau-1} \gamma^k |r(X_k, U_k, Y_k)|\right] \le$$

$$\le \sup_{\{U: U_k \in \mathbf{U}(X_k)\}} \mathbf{E}\left[\sum_{k=0}^{\tau-1} \gamma^k \left(C_0 + C_1 |Y_k| + (C_2 + C_3)\left(x + \sum_{s=0}^{k-1} \max\{0, Y_s\}\right)\right)\right] \le$$

$$\le \left[\sum_{k=0}^{\infty} \gamma^k (C_0 + C_1 \mathbf{E}|Y| + (C_2 + C_3)(x + k\mathbf{E}\max\{0, Y\}))\right].$$

Учитывая, что $\sum_{k=0}^{\infty} \gamma^k = 1/(1-\gamma)$ и $\sum_{k=0}^{\infty} k\gamma^k = \gamma/(1-\gamma)^2$, получаем утверждение леммы.

Рассмотрим рекуррентные соотношения (Беллмана)

$$\widetilde{V}_t(x) = \sup_{u \in \mathbf{U}(x)} \{\mathbf{E} r(x, u, Y) + \gamma \mathbf{E} \widetilde{V}_{t-1}(x - u + Y)\}, \ \widetilde{V}_{-1}(x) \equiv 0, \ 0 \le t \le T < \infty. \quad (15)$$

Следующая лемма устанавливает границы для функций $\widetilde{V}_t(x)$.

**Лемма 3.** Пусть выполнены предположения 1–4. Тогда функции $\widetilde{V}_t(x)$ (15) удовлетворяют следующим неравенствам:

$$|\widetilde{V}_0(x)| \le C_0 + C_1 \mathbf{E}|Y| + (C_2 + C_3)x,$$

$$|\widetilde{V}_t(x)| \le (1 + \gamma + \ldots + \gamma^t)(C_0 + C_1 \mathbf{E}|Y| + (C_2 + C_3)x) +$$

$$+ [(\gamma + \ldots + \gamma^t) + (\gamma^2 + \ldots + \gamma^t) + \ldots + \gamma^t](C_2 + C_3)\mathbf{E}\max\{0, Y\}, \ t \ge 1,$$

и, значит, при $0 < \gamma < 1$ выполнено

$$|\widetilde{V}_t(x)| \le (C_0 + C_1 \mathbf{E}|Y| + (C_2 + C_3)x)/(1-\gamma) + \gamma(C_2 + C_3)\mathbf{E}\max\{0, Y\}/(1-\gamma)^2.$$

Доказательство выполним по индукции. Для $t = 0$ утверждение леммы выполнено,

$$|\widetilde{V}_0(x)| \le \sup_{u \in \mathbf{U}(x)} \mathbf{E}|r(x, u, Y)| \le \sup_{u \in [0, x]} \mathbf{E}(C_0 + C_1 |Y| + C_2 u + C_3 x) \le$$

$$\le C_0 + C_1 \mathbf{E}|Y| + (C_2 + C_3)x.$$

Пусть утверждение леммы выполнено для $t-1$, докажем его для $t$. Действительно,

$$|\widetilde{V}_t(x)| \le \sup_{u \in \mathbf{U}(x)} \{\mathbf{E}|r(x, u, Y)| + \gamma \mathbf{E}|\widetilde{V}_{t-1}(x - u + Y)|\} \le \sup_{u \in [0, x]} \{\mathbf{E}(C_0 + C_1 |Y| +$$

$$+ C_2 u + C_3 x) + \gamma(1 + \gamma + \ldots + \gamma^{t-1})(C_0 + C_1 \mathbf{E}|Y| + (C_2 + C_3)\mathbf{E}\max\{0, x - u + Y\}) +$$

$$+ \gamma[(\gamma + \ldots + \gamma^{t-1}) + (\gamma^2 + \ldots + \gamma^{t-1}) + \ldots + \gamma^{t-1}](C_2 + C_3)\mathbf{E}\max\{0, Y\}\} \le (C_0 + C_1 \mathbf{E}|Y| +$$

$$+ (C_2 + C_3)x) + \gamma(1 + \gamma + \ldots + \gamma^{t-1})(C_0 + C_1 \mathbf{E}|Y| + (C_2 + C_3)(x + \mathbf{E}\max\{0, Y\})) +$$

$$+ \gamma[(\gamma + \ldots + \gamma^{t-1}) + (\gamma^2 + \ldots + \gamma^{t-1}) + \ldots + \gamma^{t-1}](C_2 + C_3)\mathbf{E}\max\{0, Y\},$$

что и требовалось доказать.

Следующая теорема формулирует достаточные условия совпадения функций $V_t(x)$ (8) и $\widetilde{V}_t(x)$ (15).

**Теорема 1** (свойства функций (15) и существование оптимальных управлений при конечном временном горизонте $T<\infty$). Пусть выполнены предположения 1–4. Тогда функции $\widetilde{V}_t(x)$ (15) совпадают с $V_t(x)$ (8) и полунепрерывны сверху по $x$. Кроме того, функции $\mathbf{E}\widetilde{V}_{t-1}(x-u+Y)$ полунепрерывны сверху по $(x,u)$, а $U_t=u^*_{T-t}(x^t)$, где

$$u^*_t(x)=\max\{v\in\arg\max_{u\in\mathbf{U}(x)}\{\mathbf{E}r(x,u,Y)+\gamma\mathbf{E}\widetilde{V}_{t-1}(x-u+Y)\}\} \tag{16}$$

корректно определены и измеримы (по Борелю), являются оптимальными управлениями (решениями) для задач (8).

**Доказательство.** В предположениях 3, 4 функция $\mathbf{E}r(x,u,Y)$ полунепрерывна сверху по $(x,u)$ в силу леммы Фату [29, гл. II, §6, теорема 2(b)]. Тогда ввиду полунепрерывности сверху отображения $\mathbf{U}(\cdot)$ функция максимума

$$\widetilde{V}_0(x)=\sup_{u\in\mathbf{U}(x)}\mathbf{E}r(x,u,Y)=\max_{u\in\mathbf{U}(x)}\mathbf{E}r(x,u,Y)<+\infty$$

полунепрерывна сверху по $x\ge 0$ [28, гл. 3, разд. 1, предложение 21], отображение $U^*_0(x)=\arg\max_{u\in\mathbf{U}(x)}\mathbf{E}r(x,u,Y)$ замкнутозначно и измеримо, а селектор $u^*_0(x)=\max\{u\in U^*_0(x)\}$ является измеримой (по Борелю) функцией [30, sec. 14].

Покажем, что все $\widetilde{V}_t(x)$ полунепрерывны сверху по $x$, а $u^*_t(x)$ являются измеримыми оптимальными управлениями для задач (8). Как видно, утверждение выполнено для $t=0$. Действуя по индукции, предположим, что функция $\widetilde{V}_{t-1}(x)$ полунепрерывна сверху. Тогда функция $\widetilde{V}_{t-1}(x-u+y)$ полунепрерывна сверху по $(x,u)$ при каждом $y$, а в силу предположения 4 и леммы 2 $\widetilde{V}_{t-1}(x')\le A_{t-1}+B_{t-1}x'$, где $A_{t-1}>0$, $B_{t-1}>0$ — некоторые константы, поэтому

$$\widetilde{V}_{t-1}(x-u+y)\le A_{t-1}+B_{t-1}\max\{0,x-u+y\}\le$$

$$\le A_{t-1}+B_{t-1}\max\{0,x-\inf_{u\in\mathbf{U}(x)}u\}+B_{t-1}\max\{0,y\},$$

$$\mathbf{E}\widetilde{V}_{t-1}(x-u+Y)\le A_{t-1}+B_{t-1}\max\{0,x-\inf_{u\in\mathbf{U}(x)}u\}+B_{t-1}\mathbf{E}\max\{0,Y\}.$$

В силу леммы Фату [29, гл. II, §6, теорема 2(b)] функция $\mathbf{E}\widetilde{V}_{t-1}(x-u+Y)$ полунепрерывна сверху по $(x,u)$. Отсюда следует [28, гл. 3, разд. 1, предложение 21], что функция максимума $\widetilde{V}_t(x)=\sup_{u\in\mathbf{U}(x)}\{\mathbf{E}r(x,u,Y)+\gamma\mathbf{E}\widetilde{V}_{t-1}(x-u+Y)\}$ полунепрерывна сверху по $x$, отображение

$$U^*_t(x)=\arg\max_{u\in\mathbf{U}(x)}\{\mathbf{E}r(x,u,Y)+\gamma\mathbf{E}\widetilde{V}_{t-1}(x-u+Y)\}$$

замкнутозначно и измеримо, а функция $u^*_t(x)=\max\{u\in U^*_t(x)\}$ измерима по Борелю (следует из утверждений [30, sec. 14.3, 14.31, 14.32, 14.37]). Теперь, согласно [4, Corollary 1.2], функции $V_t(x)$ (8) совпадают с $\widetilde{V}_t(x)$ (15) и последовательность $U^*=\{u^*_{T-t}(X_t), 0\le t\le T\}$ является оптимальным управлением для задач (8),

$$V_t(x)=V_t(x,U^*)=\mathbf{E}\sum_{k=0}^{\tau^*-1}\gamma^k r(x,u^*_{T-t}(X_k),Y_k),\ 0\le t\le T,$$

где $\tau^*$ — момент остановки (разорения) процесса (2) с $U^*=\{U^*_k=u^*_{T-t}(X_k)\}$.

Теорема доказана.

Исследуем случай бесконечного временного горизонта $T=\infty$. Рассмотрим уравнение (Беллмана)

$$V(x)=\sup_{u\in\mathbf{U}(x)}\{\mathbf{E}r(x,u,Y)+\gamma\mathbf{E}V(f(x,u,Y))\}=$$

$$=\sup_{u\in\mathbf{U}(x)}\{\mathbf{E}r(x,u,Y)+\gamma\mathbf{E}V(x-u+Y)\}. \tag{17}$$

Следующие утверждения устанавливают существование и единственность линейно ограниченного полунепрерывного сверху решения $V(\cdot)$ уравнения Беллмана (17), а также существование оптимальных позиционных управлений $u^*(x)$ для случая, когда функция вознаграждения $r(x, u, y)$ и сама функция Беллмана $V(x)$ не являются равномерно ограниченными, а ограничены линейно. Тогда стандартная норма $||V|| = \sup_{x\ge 0} V(x) = +\infty$ теряет смысл и теоремы о неподвижной точке в банаховом пространстве ограниченных функций неприменимы для обоснования существования и единственности решения уравнения (17).

Уравнение (17) обычно решается методом последовательных приближений (15), поэтому сначала в сформулированной ниже лемме отметим, что последовательность $\{\widetilde{V}_k(\cdot)\}$ сходится к некоторой функции $V(\cdot)$, а затем в последующей теореме (о свойствах функции Беллмана) покажем, что эта предельная функция является единственным решением уравнения (17).

**Лемма 4.** В предположениях 1–4 последовательность (15) равномерно сходится на каждом интервале $[0, x_{\max}]$ к некоторой функции $V(x)$ и справедливы оценки

$$\sup_{x\in[0,x_{\max}]} |V(x) - \widetilde{V}_t(x)| \le \frac{C_0 + C_1 \mathbf{E}|Y| + (C_2 + C_3) x_{\max}}{1-\gamma} \gamma^{t+1} +$$

$$+ \frac{(C_2 + C_3) \mathbf{E} \max\{0, Y\} (\gamma + (1-\gamma)(t+1))}{(1-\gamma)^2} \gamma^{t+1}. \qquad (18)$$

**Доказательство.** Действительно, в условиях теоремы 1 в силу оптимальности управлений

$$\widetilde{V}_{t+1}(x) = \max_{u\in \mathbf{U}(x)} \{\mathbf{E} r(x, u, Y) + \gamma \mathbf{E} \widetilde{V}_t (x - u + Y)\} =$$

$$= \mathbf{E} r(x, u^*_{t+1}(x), Y) + \gamma \mathbf{E} \widetilde{V}_t (x - u^*_{t+1}(x) + Y),$$

$$\widetilde{V}_t(x) = \max_{u\in \mathbf{U}(x)} \{\mathbf{E} r(x, u, Y) + \gamma \mathbf{E} \widetilde{V}_{t-1} (x - u + Y)\} \ge$$

$$\ge \mathbf{E} r(x, u^*_{t+1}(x), Y) + \gamma \mathbf{E} \widetilde{V}_{t-1} (x - u^*_{t+1}(x) + Y),$$

поэтому

$$\widetilde{V}_{t+1}(x) - \widetilde{V}_t(x) \le \gamma \mathbf{E}[\widetilde{V}_t(x - u^*_{t+1}(x) + Y) - \widetilde{V}_{t-1}(x - u^*_{t+1}(x) + Y)] \le$$

$$\le \gamma\, \mathbf{E} \sup_{0\le x' \le x + \max\{0, Y\}} |\widetilde{V}_t(x') - \widetilde{V}_{t-1}(x')|.$$

Аналогично

$$\widetilde{V}_{t+1}(x) = \max_{u\in \mathbf{U}(x)} \{\mathbf{E} r(x, u, Y) + \gamma \mathbf{E} \widetilde{V}_t (x - u + Y)\} \ge$$

$$\ge \mathbf{E} r(x, u^*_t(x), Y) + \gamma \mathbf{E} \widetilde{V}_t (x - u^*_t(x) + Y),$$

$$\widetilde{V}_t(x) = \max_{u\in \mathbf{U}(x)} \{\mathbf{E} r(x, u, Y) + \gamma \mathbf{E} \widetilde{V}_{t-1} (x - u + Y)\} =$$

$$= \mathbf{E} r(x, u^*_t(x), Y) + \gamma \mathbf{E} \widetilde{V}_{t-1} (x - u^*_t(x) + Y),$$

поэтому

$$\widetilde{V}_{t+1}(x) - \widetilde{V}_t(x) \ge \gamma \mathbf{E}[\widetilde{V}_t(x - u^*_t(x) + Y) - \widetilde{V}_{t-1}(x - u^*_t(x) + Y)] =$$

$$= -\gamma \mathbf{E} \sup_{0\le x' \le x + \max\{0, Y\}} |\widetilde{V}_t(x') - \widetilde{V}_{t-1}(x')|.$$

Следовательно,

$$|\widetilde{V}_{t+1}(x) - \widetilde{V}_t(x)| \le \gamma \mathbf{E} \sup_{0\le x' \le x + \max\{0, Y\}} |\widetilde{V}_t(x') - \widetilde{V}_{t-1}(x')|$$

и, итерируя по $t$, получаем оценку

$$|\widetilde{V}_{t+1}(x)-\widetilde{V}_t(x)|\le\gamma^{t+1}\mathbf{E}\sup_{0\le x'\le x+(t+1)\max\{0,Y\}}|\widetilde{V}_0(x')|.$$

Напомним, что $|\widetilde{V}_0(x')|=\mathbf{E}|r(x,u,Y)|\le C_0+C_1\mathbf{E}|Y|+(C_2+C_3)x'$, поэтому

$$|\widetilde{V}_{t+1}(x)-\widetilde{V}_t(x)|\le\gamma^{t+1}(C_0+C_1\mathbf{E}|Y|+(C_2+C_3)(x+(t+1)\mathbf{E}\max\{0,Y\})).$$

Таким образом, последовательность $\{\widetilde{V}_t(x)\}$ фундаментальна, сходится к некоторому пределу $V(x)$ и имеет место оценка

$$|V(x)-\widetilde{V}_t(x)|\le\sum_{k=t}^{\infty}|\widetilde{V}_{k+1}(x)-\widetilde{V}_k(x)|\le$$

$$\le\sum_{k=t}^{\infty}\gamma^{k+1}(C_0+C_1\mathbf{E}|Y|+(C_2+C_3)(x+(k+1)\mathbf{E}\max\{0,Y\}))\le$$

$$\le\frac{C_0+C_1\mathbf{E}|Y|+(C_2+C_3)x}{1-\gamma}\gamma^{t+1}+(C_2+C_3)\mathbf{E}\max\{0,Y\}\sum_{k=t}^{\infty}(k+1)\gamma^{k+1}.$$

Учитывая, что $\sum_{k=t}^{\infty}(k+1)\gamma^{k+1}=\left(\frac{\gamma}{(1-\gamma)^2}+\frac{t+1}{1-\gamma}\right)\gamma^{t+1}$, окончательно получаем оценку

$$|V(x)-\widetilde{V}_t(x)|\le\frac{C_0+C_1\mathbf{E}|Y|+(C_2+C_3)x}{1-\gamma}\gamma^{t+1}+$$

$$+(C_2+C_3)\mathbf{E}\max\{0,Y\}\left(\frac{\gamma}{(1-\gamma)^2}+\frac{t+1}{1-\gamma}\right)\gamma^{t+1}=$$

$$=\frac{C_0+C_1\mathbf{E}|Y|+(C_2+C_3)x}{1-\gamma}\gamma^{t+1}+\frac{(C_2+C_3)\mathbf{E}\max\{0,Y\}(\gamma+(1-\gamma)(t+1))}{(1-\gamma)^2}\gamma^{t+1},$$

откуда следует равномерная оценка (18). Лемма доказана.

**Теорема 2** (свойства функции Беллмана и существование оптимальных управлений при бесконечном временном горизонте $T=\infty$). В предположениях 1–4 предел $V(x)=\lim_{t\to\infty}\widetilde{V}_t(x)$ существует, где $\widetilde{V}_t(x)$ определены в (15), и является полунепрерывной сверху функцией. Функция $V(x)$ — единственное полунепрерывное сверху решение уравнения (17), удовлетворяющее условию $|V(x)|\le A+Bx$ для всех $x\ge0$, где $A\ge0, B\ge0$ — произвольные константы. Функция $\varphi_x(u)=\mathbf{E}V(x-u+Y)$ полунепрерывна сверху, экстремальное отображение

$$U^*(x)=\arg\max_{u\in\mathbf{U}(x)}\{\mathbf{E}r(x,u,Y)+\gamma\mathbf{E}V(x-u+Y)\}\tag{19}$$

полунепрерывно сверху, а функция

$$u^*(x)=\max\{u\in U^*(x)\}\tag{20}$$

корректно определена, измерима по Борелю и является решением задачи оптимального управления (9).

**Доказательство.** Докажем, что $V(x)$ полунепрерывна сверху. В силу леммы 4 последовательность функций $\{\widetilde{V}_t(\cdot)\}$ равномерно на каждом компакте сходится к некоторой предельной функции $V(\cdot)$. Так как по теореме 1 все функции $\widetilde{V}_t(\cdot)$ полунепрерывны сверху, их равномерный предел $V(\cdot)$ также полунепрерывная сверху функция.

Покажем, что предел $V(\cdot)$ удовлетворяет уравнению Беллмана (17). Для каждого фиксированного $x$ рассмотрим функции

$$v_{t-1,x}(u)=\mathbf{E}r(x,u,Y)+\gamma\mathbf{E}\widetilde{V}_{t-1}(x-u+Y),\ \ u\in\mathbf{U}(x),$$

$$v_x(u)=\mathbf{E}r(x,u,Y)+\gamma\mathbf{E}V(x-u+Y),\ \ u\in\mathbf{U}(x).$$

В силу теоремы 1 функции $v_{t-1,x}(u)$ полунепрерывны сверху по $u$. Кроме того, они равномерно сходятся к (полунепрерывной сверху) функции $v_x(u)$ на компакте $\mathbf{U}(x)$, а именно, в силу (18) для $u\in\mathbf{U}(x)$ имеет место

$$|v_x(u)-v_{t-1,x}(u)|\le\gamma\mathbf{E}|V(x-u+Y)-\widetilde{V}_{t-1}(x-u+Y)|\le$$

$$\le\frac{C_0+C_1\mathbf{E}|Y|+(C_2+C_3)(x+\mathbf{E}\max\{0,Y\})}{1-\gamma}\gamma^{t+1}+$$

$$+\frac{(C_2+C_3)\mathbf{E}\max\{0,Y\}(\gamma+(1-\gamma)(t+1))}{(1-\gamma)^2}\gamma^{t+1},$$

поэтому

$$V(x)=\lim_{t\to\infty}\widetilde{V}_t(x)=\lim_{t\to\infty}\sup_{u\in\mathbf{U}(x)}v_{t-1,x}(u)=\sup_{u\in\mathbf{U}(x)}\lim_{t\to\infty}v_{t-1,x}(u)=$$

$$=\sup_{u\in\mathbf{U}(x)}v_x(u)=\sup_{u\in\mathbf{U}(x)}[\mathbf{E}r(x,u,Y)+\gamma\mathbf{E}V(x-u+Y)].$$

Таким образом, полунепрерывная сверху функция $V(x)$ удовлетворяет уравнению Беллмана (17) и существует измеримая [30, Sec. 14] функция $u^*(x)$ (20).

Докажем единственность построенного решения $V(x)$ уравнения (17). Пусть существует еще одно решение $\widetilde{V}(\cdot)$ такое, что $|\widetilde{V}(x)|\le A+Bx$, и соответствующее оптимальное управление $\widetilde{u}(\cdot)$. Имеем

$$V(x)=\sup_{u\in\mathbf{U}(x)}\{\mathbf{E}r(x,u,Y_0)+\gamma\mathbf{E}V(x-u+Y_0)\}=$$

$$=\mathbf{E}r(x,u^*(x),Y_0)+\gamma\mathbf{E}V(x-u^*(x)+Y_0),$$

$$\widetilde{V}(x)=\sup_{u\in\mathbf{U}(x)}\{\mathbf{E}r(x,u,Y_0)+\gamma\mathbf{E}\widetilde{V}(x-u+Y_0)\}=$$

$$=\mathbf{E}r(x,\widetilde{u}(x),Y_0)+\gamma\mathbf{E}\widetilde{V}(x-\widetilde{u}(x)+Y_0).$$

Отсюда получаем

$$V(x)-\widetilde{V}(x)\le\gamma\mathbf{E}(V(x-u^*(x)+Y_0)-\widetilde{V}(x-u^*(x)+Y_0))\le$$

$$\le\gamma\mathbf{E}\sup_{0\le x'\le x+\max\{0,Y_0\}}|V(x')-\widetilde{V}(x')|,$$

$$\widetilde{V}(x)-V(x)\le\gamma\mathbf{E}(\widetilde{V}(x-\widetilde{u}(x)+Y_0)-V(x-\widetilde{u}(x)+Y_0))\le$$

$$\le\gamma\mathbf{E}\sup_{0\le x'\le x+\max\{0,Y_0\}}|\widetilde{V}(x')-V(x')|,$$

$$|V(x)-\widetilde{V}(x)|\le\gamma\mathbf{E}\sup_{0\le x'\le x+\max\{0,Y_0\}}|V(x')-\widetilde{V}(x')|.$$

Для любого $t$ имеет место

$$|V(x)-\widetilde{V}(x)|\le\gamma\mathbf{E}\sup_{0\le x'\le x+\max\{0,Y_0\}}|V(x')-\widetilde{V}(x')|\le$$

$$\le\gamma^t\mathbf{E}\sup_{0\le x'\le x+\sum_{k=0}^{t-1}\max\{0,Y_k\}}|V(x')-\widetilde{V}(x')|\le$$

$$\le\gamma^t\mathbf{E}\sup_{0\le x'\le x+\sum_{k=0}^{t-1}\max\{0,Y_k\}}|V(x')|+\gamma^t\mathbf{E}\sup_{0\le x'\le x+\sum_{k=0}^{t-1}\max\{0,Y_k\}}|\widetilde{V}(x')|.$$

Учитывая, что по лемме 3

$$|V(x')|\le(C_0+C_1\mathbf{E}|Y|+(C_2+C_3)(x'+\mathbf{E}\max\{0,Y\}))/(1-\gamma)+$$

$$+(C_2+C_3)\gamma\mathbf{E}\max\{0,Y\}/(1-\gamma)^2,$$

а по предположению $|\widetilde{V}(x')|\le A+Bx'$, получаем

$$|V(x)-V'(x)|\le\gamma^t(C_0+C_1\mathbf{E}|Y|+(C_2+C_3)(x+t\mathbf{E}\max\{0,Y\}))/(1-\gamma)+$$

$$+\gamma^t(C_2+C_3)\gamma\,\mathbf{E}\max\{0,Y\}/(1-\gamma)^2+(A+B(x+t\mathbf{E}\max\{0,Y\}))\gamma^t\to 0,$$

что и требовалось доказать.

Заметим, что для любого управления $U'=\{U'_t\in\mathbf{U}(x)\}$ и соответствующей траектории $\{X'_t=X'_{t-1}-U'_{t-1}+Y_t,\ X'_0=x, U'_{t-1}\in\mathbf{U}(X'_{t-1}),\ t\ge 0\}$ для условных математических ожиданий $\bar r(X'_k,U'_k)=\mathbf{E}\{r(X'_k,U'_k,Y_k)|X'_k,U'_k\}$ выполнено следующее условие [4, (1.3), Corollary 1.3]: $\lim_{t\to\infty}\sup_{U'}\mathbf{E}\sum_{k=t}^{\infty}|\bar r(X'_k,U'_k)|\gamma^k=0.$

Действительно,

$$\sup_{U'}\mathbf{E}\sum_{k=t}^{\infty}|\mathbf{E}\{r(X'_k,U'_k,Y_k)|X'_k,U'_k\}|\gamma^k\le\sup_{U'}\mathbf{E}\sum_{k=t}^{\infty}|r(X'_k,U'_k,Y_k)|\gamma^k=$$

$$=\sup_{U'}\mathbf{E}\sum_{k=t}^{\tau-1}|r(X'_k,U'_k,Y_k)|\gamma^k=\gamma^t\sup_{U'}\mathbf{E}\sum_{k=t}^{\tau-1}|r(X'_k,U'_k,Y_k)|\gamma^{k-t}\le$$

$$\le\gamma^t\sup_{U'}\mathbf{E}\sum_{k=t}^{\tau-1}(C_0+C_1|Y_k|+C_2U'_k+C_3X'_k)\gamma^{k-t}\le$$

$$\le\gamma^t\sup_{U'}\mathbf{E}\sum_{k=t}^{\tau-1}(C_0+C_1|Y_k|+(C_2+C_3)X'_k)\gamma^{k-t}\le$$

$$\le\gamma^t\sup_{U'}\mathbf{E}\sum_{k=t}^{\tau-1}(C_0+C_1|Y_k|+(C_2+C_3)(X'_t+\sum_{s=0}^{k-1}\max\{0,Y_s\}))\gamma^{k-t}\le$$

$$\le\frac{C_0+C_1\mathbf{E}|Y|}{1-\gamma}\gamma^t+\gamma^t(C_2+C_3)\sup_{U'}\mathbf{E}X'_t\sum_{k=t}^{\infty}\gamma^{k-t}+$$

$$+(C_2+C_3)\mathbf{E}\max\{0,Y\}\sum_{k=t}^{\infty}k\gamma^k\le\frac{C_0+C_1\mathbf{E}|Y|}{1-\gamma}\gamma^t+$$

$$+\frac{(C_2+C_3)(x+t\mathbf{E}\max\{0,Y\})}{1-\gamma}\gamma^t+(C_2+C_3)\mathbf{E}\max\{0,Y\}\sum_{k=t}^{\infty}k\gamma^k\to 0.$$

Поэтому в силу [4, Corollary 1.3] $u^*(x)$ является оптимальным управлением задачи (9) таким, что

$$V(x)=\sup_{\{U:U_k\in\mathbf{U}(X_k)\}}V(x,U)=V(x,U^*)=\mathbf{E}\sum_{t=0}^{\tau^*-1}\gamma^t r(X^*_t,u^*(X^*_t),Y_t),$$

где $\{X^*_{t+1}=X^*_t-u^*(X^*_t)+Y_t,\ X^*_0=x, 0\le t<\tau^*\}$, $\tau^*$ — момент остановки (разорения) этого процесса.

Теорема доказана.

## ДРУГИЕ (НЕ ДИВИДЕНДНЫЕ) ФУНКЦИИ ВЫИГРЫША БЕЛЛМАНА

В работах [1–4] для задачи оптимального управления дивидендами (4) установлен барьерный характер оптимальных управлений, т.е. $u^*(x)=\max\{0,x-b\}$ для некоторого $b\ge 0$. Заметим, что при условии $\Pr\{Y<0\}>0$ для любой барьерной стратегии $\widetilde u(x)=\max\{0,x-b\}$ вероятность разорения процесса $\{\widetilde x_{t+1}=\widetilde x_t-\widetilde u(\widetilde x_t)+Y_t,\ \widetilde x_0\in[0,b]\}$ равна единице. Поэтому наряду с барьерной стратегией целесообразно рассматривать другие типы стратегий, например барьерно-пропорциональные стратегии $\widetilde u(x)=\max\{0,\alpha(x-b)\}$, где $b\ge 0,\ 0<\alpha\le 1$. В этом случае траектория $\{X_t\}$ не превосходит кусочно-линейного барьера $B(x,\alpha,b)=\min\{x,\alpha b+(1-\alpha)x\}$. В работах [31, 32] рассматривается нелинейный дивидендный барьер $B(x)$, соответствующий управлению $u(x)=\max\{0, x-B(x)\}$. Однако в общем случае оптимальные дивидендные стратегии могут иметь более сложную структуру (последовательность барьеров и другие [5, section 1.5; 6]. Если параметрическая форма дивидендного барьера выбрана, то задача может состоять в поиске оптимальных параметров барьера.

Для любого фиксированного непрерывного управления $\widetilde{u}(x)=\mathbf{U}(x)\subseteq[0,x]$ соответствующие значения средних дисконтированных дивидендов $\widetilde{V}^0(x)=$ $=\mathbf{E}\sum_{t=0}^{\widetilde{\tau}-1}\gamma^t\widetilde{u}(x_t)$ и среднего дисконтированного времени жизни $\widetilde{V}^1(x)=$ $=\mathbf{E}\sum_{y=0}^{\widetilde{\tau}(x)-1}\gamma^t=(1-\mathbf{E}\gamma^{\widetilde{\tau}(x)})/(1-\gamma)$ в силу теоремы 2 могут быть найдены из следующих уравнений:

$$\widetilde{V}^0(x)=\widetilde{u}(x)+\gamma\mathbf{E}\widetilde{V}^0(f(x,\widetilde{u}(x),Y))=\widetilde{u}(x)+\gamma\mathbf{E}\widetilde{V}^0(x-\widetilde{u}(x)+Y), \tag{21}$$

$$\widetilde{V}^1(x)=1+\gamma\mathbf{E}\widetilde{V}^1(f(x,\widetilde{u}(x),Y))=1+\gamma\mathbf{E}\widetilde{V}^1(x-\widetilde{u}(x)+Y). \tag{22}$$

Еще одним показателем риска для страховой компании является средний (дисконтированный) дефицит резервов в момент разорения:

$$\widetilde{V}^2(x)=\mathbf{E}\sum_{k=0}^{\widetilde{\tau}(x)-1}\gamma^k r_2(\widetilde{x}_k,\widetilde{u}(\widetilde{x}_k),Y_k)=-\mathbf{E}\sum_{k=0}^{\widetilde{\tau}(x)-1}\gamma^k\min\{0,\widetilde{x}_k-\widetilde{u}(\widetilde{x}_k)+Y_k\}.$$

При $u(x)\le x$ имеет место $0\le r_2(\widetilde{x}_k,\widetilde{u}(\widetilde{x}_k),Y)=-\min\{0,\widetilde{x}_k-\widetilde{u}(\widetilde{x}_k)+Y\}\le$ $\le-\min\{0,Y\}$. Этот показатель удовлетворяет следующему уравнению (при $\mathbf{E}\min\{0,Y\}>-\infty$):

$$\widetilde{V}^2(x)=\mathbf{E}(-\min\{0,x-\widetilde{u}(x)+Y\})+\gamma\mathbf{E}\widetilde{V}^2(x-\widetilde{u}(x)+Y). \tag{23}$$

Важным показателем работы страховой компании является (дисконтированная при $\gamma<1$) вероятность разорения $\widetilde{V}^3(x)=\mathbf{E}\sum_{k=0}^{\widetilde{\tau}-1}\gamma^k\mathbf{1}_{\{\widetilde{x}_k-\widetilde{u}(\widetilde{x}_k)+\widetilde{x}_k<0\}}$, рассматриваемая как функция начального капитала $x$ при управлениях $\widetilde{u}(\cdot)$, где

$$\{\widetilde{x}_t=\widetilde{x}_{t-1}-\widetilde{u}(\widetilde{x}_{t-1})+Y_t,\ \widetilde{x}_0=x,\ t=0,1,\ldots,\widetilde{\tau}(x)\},$$
$$\widetilde{\tau}(x)=\sup\{t\in[0,\infty):\min_{0\le t'<t}\widetilde{x}_{t'}\ge 0\}.$$

Функция $\widetilde{V}^3(x)$ удовлетворяет уравнению

$$\widetilde{V}^3(x)=\mathbf{E}\mathbf{1}_{\{x-\widetilde{u}(x)+Y<0\}}+\gamma\mathbf{E}\widetilde{V}^3(x-\widetilde{u}(x)+Y). \tag{24}$$

Если процесс рассматривается на конечном интервале времени, то необходимо ввести функции вероятности разорения $\widetilde{V}_t^3(x)$ за $t$ временных интервалов при начальном состоянии процесса $x$. Эти функции связаны соотношениями

$$\widetilde{V}_t^3(x)=\mathbf{E}\mathbf{1}_{\{x-\widetilde{u}(x)+Y<0\}}+\gamma\mathbf{E}\widetilde{V}_{t-1}^3(x-\widetilde{u}(x)+Y),\ \widetilde{V}_{-1}^3(x)=0,\ t=0,1,\ldots$$

Поскольку рассматриваемая задача стохастического оптимального управления дивидендами многокритериальна, то для данного $x$ целесообразно построить множества точек $\{(\widetilde{V}^0(x,\lambda),\widetilde{V}^i(x,\lambda)),\lambda\ge 0\}$, $i=1,2,3$, в координатах «доходность–риск», где параметр $\lambda$ играет роль весового коэффициента свертки критериев в (14). Для этого необходимо решить для каждого $\lambda\ge 0$ интегральное уравнение Беллмана (17) с $r(x,u,y)=u+\lambda r_i(x,u,y)$ и найти соответствующую функцию оптимального управления $\widetilde{u}(x,\lambda)$ (20), затем для найденного управления $\widetilde{u}(x,\lambda)$ решить интегральные уравнения для дивидендов $\widetilde{V}^0(x)$ (21), времени жизни $\widetilde{V}^1(x)$ (22), дефицита в момент разорения $\widetilde{V}^2(x)$ (23) и вероятности разорения $\widetilde{V}^3(x)$ (24). Для реализации этого плана важно эффективно решать интегральные уравнения (17), (21)–(24).

## МЕТОД ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ БЕЛЛМАНА

Приближенные численные методы решения однокритериальных задач стохастического оптимального управления (с ограниченными функциями Беллмана) изучаются в [33].

Численно уравнения (17), (21)–(23) можно решать методом последовательных приближений:

$$V_k(x) = \max_{u \in \mathbf{U}(x)} \{\mathbf{E}r(x,u,Y) + \gamma \mathbf{E} V_{k-1}(x-u+Y)\},\ V_{-1}(x)=0,\ k=0,1,\dots, \quad (25)$$

$$V_k^0(x) = \widetilde{u}(x) + \gamma \mathbf{E} V_{k-1}^0(x - \widetilde{u}(x) + Y),\ V_{-1}^0(x)=0,\ k=0,1,\dots, \quad (26)$$

$$V_k^1(x) = 1 + \gamma \mathbf{E} V_{k-1}^1(x - \widetilde{u}(x) + Y),\ V_{-1}^1(x)=0,\ k=0,1,\dots, \quad (27)$$

$$V_k^2(x) = \mathbf{E}(-\min\{0, x - \widetilde{u}(x) + Y\}) + \gamma \mathbf{E} V_{k-1}^2(x - \widetilde{u}(x) + Y),$$

$$V_{-1}^2(x)=0,\ k=0,1,\dots, \quad (28)$$

$$\widetilde{V}_t^3(x) = \mathbf{E}\mathbf{1}_{\{x-\widetilde{u}(x)+Y<0\}} + \gamma \mathbf{E} \widetilde{V}_{t-1}^3(x - \widetilde{u}(x) + Y),\ V_{-1}^3(x)=0,\ k=0,1,\dots \quad (29)$$

Итерационный метод (25) при условиях 1–4 и $\gamma<1$ сходится в силу теоремы 2 и оценки (18) леммы 4. Аналогичные оценки и равномерная сходимость при $\gamma<1$ на любом конечном интервале значений $x \in [0, x_{\max}]$ имеют место для последовательностей $\{V_k^i(x),\ k=0,1,\dots\}$, $i=0,1,2,3$ (см. (26)–(29)), при любом фиксированном непрерывном управлении $\widetilde{u}(x) \in [0,x]$ в силу теоремы 2 (для $\mathbf{U}(x)=\widetilde{u}(x)$).

При $\gamma=1$ последовательности $\{V_t^i(\cdot),\ t=0,1,\dots\}$, $i=2,3$, ограничены и монотонно сходятся к своим пределам $\{V^i(\cdot)\}$, но сходимость может быть более медленной, чем (18), и неравномерной. В этом случае исследование сходимости требует более тонкого анализа [21, 22], поскольку операторы в правой части рекуррентных соотношений (28), (29) могут быть не сжимающими.

Следующая лемма устанавливает равномерную сходимость последовательности управлений (16) к экстремальному отображению (19).

**Лемма 5** (сходимость последовательности управлений). В условиях теоремы 2 последовательность управлений (16) равномерно сходится к экстремальному отображению (19), а именно, для любой последовательности точек $\{x_t \to x,\ t=0,1,\dots\}$ множество всех предельных точек последовательности $\{u_t(x_t),\ t=0,1,\dots\}$ принадлежит $U^*(x)$.

**Доказательство.** Обозначим

$$v_{t-1}(x,u) = \mathbf{E}r(x,u,Y) + \gamma \mathbf{E}\widetilde{V}_{t-1}(x-u+Y),$$

$$v(x,u) = \mathbf{E}r(x,u,Y) + \gamma \mathbf{E}V(x-u+Y).$$

Как отмечалось при доказательстве теоремы 2, функции $v_{t-1}(x,u), \widetilde{V}_t(x)$ равномерно сходятся соответственно к функциям $v(x,u)$, $V(x)$. Пусть $\{x_t \to x\}$ и $\{u_{t_k}(x_{t_k}) \to u,\ k=1,2,\dots\}$. Так как $u_{t_k}(x_{t_k}) \in U_{t_k}^*(x_{t_k})$, имеем $u_{t_k}(x_{t_k}) \in [0, x_{t_k}]$ и $\widetilde{V}_{t_k}(x_{t_k}) = v_{t_k-1}(x_{t_k}, u_{t_k})$. В силу свойств равномерной сходимости отсюда получаем, что $u \in [0,x]$ и $\widetilde{V}(x) = v_{t-1}(x,u)$, т.е. $u \in U^*(x)$, что и требовалось доказать.

## АППРОКСИМАЦИЯ ПАРЕТО-ОПТИМАЛЬНЫХ МНОЖЕСТВ В ЗАДАЧЕ ОПТИМИЗАЦИИ ДИВИДЕНДОВ

В данном разделе приведены некоторые результаты численных экспериментов по аппроксимации парето-оптимального множества задачи оптимального управления дивидендами по критериям доходность–риск. Сначала методом последовательных приближений экспериментально исследовалась структура оптимальных управлений задач (8), (9) для свертки критериев (14). Оказалось, что в широком диапазоне изменения параметров $0 \le \lambda \le 100$ и $0{,}5 < \gamma < 1$ оптимальные управления имеют барьерный характер. Затем строились аппроксимации парето-оптимальных границ для множеств $\{(V_T^0(x, \widetilde{u}) / (cT), V_T^1(x, \widetilde{u}) / T\}$ и $\{(V_T^0(x, \widetilde{u}) / (cT), V_T^3(x, \widetilde{u}))\}$, где управления имеют барьерно-пропорциональный вид $\widetilde{u}(x) = \alpha \max\{0, x - b\}$, $\alpha \in (0, 1]$, $b \in [0, x]$, при некотором фиксированном начальном капитале $x$ и горизонте планирования $T$. Здесь нормирующий множитель $cT$ имеет смысл совокупной страховой премии, полученной за время $T$. Величины $V_T^0(x, \widetilde{u})$, $V_T^1(x, \widetilde{u})$ и $V_T^3(x, \widetilde{u})$ найдены итерационно согласно соотношениям соответственно (26), (27) и (29). На рис. 1 показаны графики расчетов для начального капитала $x = 10$, горизонта планирования $T = 100$, страховой премии $c = 1$, и случайных требований $Y \in \{1, -1\}$ с вероятностями $\{0.6, 0.4\}$. Вопросы построения распределения случайной величины $Y$ на основе данных страховой статистики рассмотрены в [23, 34].

Вычислительные эксперименты проведены с помощью системы Matlab 8.2 на персональном компьютере конфигурации Intel Core i5 3570K (на штатной частоте) 8Gb RAM. Время построения графиков не превосходило нескольких секунд.

На рис. 1 представлены примеры аппроксимации парето-оптимальных множеств в плоскости нормированное время жизни $V_T^1 / T$–нормированные дивиденды $V_T^0 / cT$ (рис 1, *а*) и вероятность разорения $V_T^3$–нормированные дивиденды $V_T^0 / cT$ (рис 1, *б*).

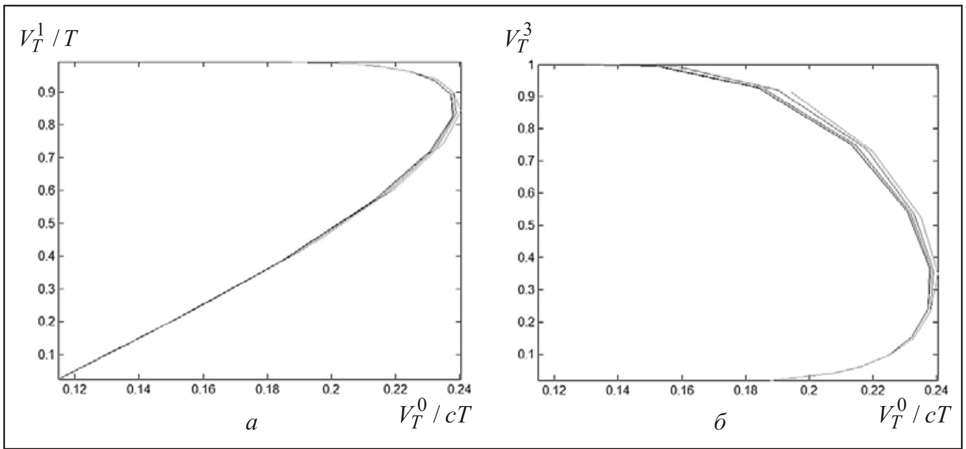


*Рис. 1.* Графики аппроксимации парето-оптимальных множеств

Численные эксперименты показывают, что на конечном временном интервале при наличии дисконтирующего множителя барьерные стратегии $u(x) = \max\{0, x - b\}$ доминируют над барьерно-пропорциональными стратегиями $u(x) = \alpha \max\{0, x - b\}$ при $\alpha < 1$, однако в случае отсутствия дисконтирования барьерно-пропорциональные стратегии могут доминировать над барьерными стратегиями.

**ЗАКЛЮЧЕНИЕ**

В статье рассмотрена задача стохастического оптимального управления дивидендной политикой страховой компании с интегральными критериями, объединяющими показатели доходности и риска. Установлены условия применимости метода динамического программирования и получены оценки скорости сходимости метода последовательных приближений для решения задачи. В численных экспериментах выявлено, что оптимальные управления в агрегированной однокритериальной задаче имеют вид барьерной стратегии. Для построения аппроксимации парето-оптимального множества использованы барьерно-пропорциональные стратегии управления. Численные эксперименты показывают, что на конечном временном интервале при наличии дисконтирующего множителя барьерные стратегии доминируют над барьерно-пропорциональными стратегиями, однако в случае отсутствия дисконтирования барьерно-пропорциональные стратегии могут доминировать над чисто барьерными стратегиями.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. Finetti B. de. Su un' impostazione alternativa della teoria collettiva del rischio // Trans. the XV-th Intern. Congress of Actuaries. — 1957. — **2**. — P. 433–443.
2. Borch K. The theory of risk (with discussion) // J. Roy. Statist. Soc. Ser. B. — 1967. — **29**. — P. 432–467.
3. Gerber H.U. An introduction to mathematical risk theory. — Philadelphia: Huebner Foundation Monographs, 1979. — 164 p.
4. Schmidli H. Stochastic control in insurance. — London: Springer-Verlag, 2008. — 254 p.
5. Avanzi B. Strategies for dividend distribution: A review // North Amer. Actuar. J. — 2009. — **13**, N 2. — P. 217–251.
6. Albrecher H., Thonhauser S. Optimality results for dividend problems in insurance // Rev. R. Acad. Cien. Ser. A. Math. — 2009. — **103**, N 2. — P. 295–320.
7. Asmussen S., Albrecher H. Ruin probabilities. — Sec. ed. — London: World Sci., 2010. — 602 p.
8. Shreve S.E., Lehoczky J.P., Gaver D.P. Optimal consumption for general diffusions with dbsorbing and deflecting Barriers // SIAM J. Control and Optim. — 1984. — **22**, N 1. — P. 55–75.
9. Пиуновский А.Б. Оптимальное управление случайными последовательностями в задачах с ограничениями. — М.: Науч. книга, 1996. — 294 с.
10. Piunovsky A.B. Optimal control of random sequences in problems with constraints. — Dordrecht: Springer, 1997. — 345 p.
11. Sethi S.P. Optimal consumption and investment with bankruptcy. — Boston; Dordrecht; London: Kluwer Acad. Publ., 1997. — 428 p.
12. Paulsen J. Optimal dividend payouts for diffusions with solvency constraints // Finance Stoch. — 2003. — **7**, N 4. — P. 457–473.
13. Hipp C. Optimal dividend payment under a ruin constraint: discrete time and state space // Blatter der DGVFM (Blatter der Deutschen Gesellschaft fur Versicherungs- und Finanzmathematik e.V.). — 2003. — **26**, iss. 2. — P. 255–264.
14. Dickson D.C.M., Waters H.R. Some optimal dividend problems // ASTIN Bulletin. — 2004. — **34**, N 1. — P. 49–74.
15. Gerber H.U., Shiu E.S.W., Smith N. Maximizing dividends without bankruptcy // ASTIN Bull. — 2006. — **36**, N 1. — P. 5–23.
16. Thonhauser S., Albrecher H. Dividend maximization under consideration of the time value of ruin // Insurance: Mathematics and Economics. — 2007. — **41**. — P. 163–184.
17. Bayraktar E., Young V. Maximizing utility of consumption subject to a constraint on the probability of lifetime ruin // Finance and Research Letters. — 2008. — **5**, N 4. — P. 204–212.
18. Норкин Б.В. О численном решении задачи стохастического оптимального управления дивидендной политикой страховой компании // Компьютер. математика. — Киев: Ин-т кибернетики им. В.М. Глушкова НАНУ, 2014. — № 1. — С. 131–139.
19. Норкин Б.В. О стохастическом оптимальном управлении процессами риска в дискретном времени // Теория оптимальных решений. — Киев: Ин-т кибернетики им. В.М. Глушкова НАНУ, 2014. — № 1. — С. 55–62.
20. Норкин Б.В. О стохастическом оптимальном управлении процессами риска в дискретном времени // Проблемы управления и информатики. — 2014. — № 5. — С. 00–00.
21. Норкин Б.В. Необходимые и достаточные условия существования и единственности решений интегральных уравнений страховой математики // Кибернетика и системный анализ. — 2006. — № 5. — С. 157–164.
22. Норкин Б.В. О решении основного интегрального уравнения актуарной математики методом последовательных приближений // Укр. мат. журн. — 2007. — **59**, № 12. — С. 112–127.

23. Норкин Б.В. Системный имитационный анализ и оптимизация страхового бизнеса // Кибернетика и системный анализ. — 2014. — № 2. — С. 112–125.
24. Gerber H.U., Shiu E.S.W. On the time value of ruin // North Amer. Actuar. J. — 1998. — **2**. — P. 48–78.
25. Discounting, catastrophic risks management and vulnerability modeling / Y. Ermoliev, T. Ermolieva, G. Fischer et al. // Math. and Comput. in Simul. — 2008. — **79**. — P. 917–924.
26. Gerber H.U. Entscheidungskriterien fur den zusammengesetzten Poisson–Prozess // Schweiz. Verein. Versicherungsmath. Mitt. — 1969. — **69**. — P. 185–228.
27. Bertsekas D. P., Shreve S.E. Stochastic optimal Control: the discrete-time case. — Belmont (Mass.): Athena Sci., 1996. — 323 p.
28. Обен Ж.-П., Экланд И. Прикладной нелинейный анализ. — М.: Мир, 1988. — 512 с.
29. Ширяев А.Н. Вероятность. — М.: Наука, 1980. — 574 с.
30. Rockafellar R.T., Wets R.J-B. Variational analysis. — Berlin: Springer, 1998. — 734 p.
31. Gerber H. The dilemma between dividends and safety and a generalization of the Lundberg–Cramer formulas // Scand. Actuar. J. — 1974. — Iss. 1. — P. 46–57.
32. Albrecher H., Kainhofer R. Risk theory with a nonlinear dividend barrier // Computing. — 2002. — **68**, N 4. — P. 289–311.
33. Kushner K.J., Dupuis P. Numerical methods for stochastic control problems in continuous time. — New York: Springer-Verlag, 1992. — 439 p.
34. Норкин Б.В. Об идентификации моделей динамического финансового анализа страховой компании // Комп'ютер. математика. — Київ: Ін-т кібернетики ім. В.М. Глушкова НАНУ. — 2013. — № 2. — С. 24–33.

*Поступила 20.12.2013*

Б.В. Норкин

Стохастическое оптимальное управление процессами риска с липшицевыми функциями выигрыша

Реферат. Исследуется задача стохастического оптимального управления дивидендной политикой страховой компании в дискретном времени с общей липшицевой функцией выигрыша, включающей индикаторы доходности и риска. Для построения позиционных оптимальных управлений и оценки показателей функционирования компании обоснован метод динамического программирования. Получены оценки скорости сходимости метода последовательных приближений для нахождения, вообще говоря, неограниченных функций Беллмана. Парето-оптимальное множество задачи численно аппроксимируется с помощью барьерно-пропорциональных стратегий управления.

Ключевые слова: процесс риска, страхование, стохастическое оптимальное управление, дискретное время, липшицевые функции выигрыша, оптимальная дивидендная политика, динамическое программирование, метод последовательных приближений, Парето оптимальность, барьерно-пропорциональные стратегии.

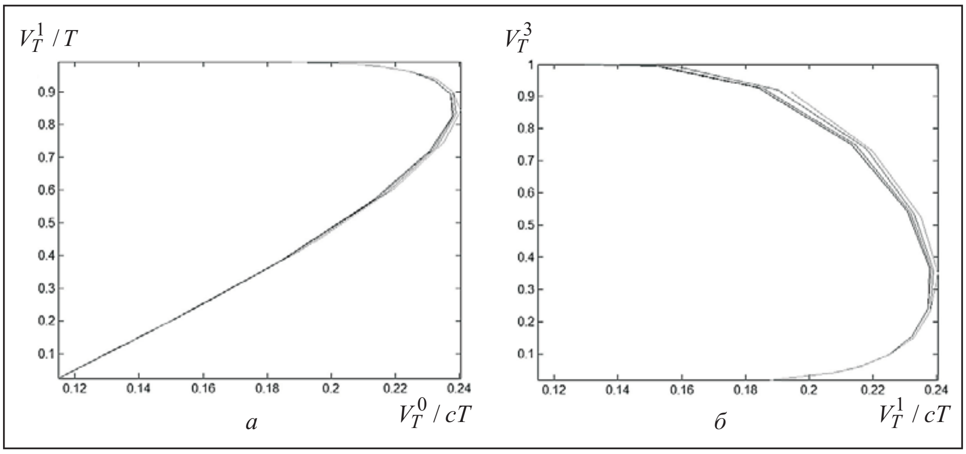


*Рис. 1.* Пример аппроксимации парето-оптимальных множеств