Нелинейные граничные задачи **16**, 162-172 (2006)

 Н.В. Краснощек

ЗАДАЧА С ДВИЖУЩЕЙСЯ ГРАНИЦЕЙ В ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Доказано существование в малом по времени классического решения краевой задачи с движущейся границей для системы плоской теории упругости в напряжениях. Уравнение, описывающее эволюцию границы содержит вторые производные от кривизны и плотность энергии упругих деформаций.

Ключевые слова: теория упругости, тензор напряжений, кривизна, неизвестная граница
MSC (2000): 35R35

1. Постановка задачи.

Пусть изотропное упругое тело имеет форму "бесконечного"цилиндра с образующими, паралллельными оси Ox_3. Предполагается, что внешняя нагрузка равномерно распределена вдоль Ox_3 и действует перпендикулярно ей. В данном случае естественно ограничиться расмотрением произвольного поперечного сечения цилиндра. Особенность изучаемой задачи заключается в том, что форма сечения изменяется во времени, а "движущей силой"этих изменений являются плотность энергии упругих деформаций и кривизна кривой, ограничивающей область сечения (см. [1]).

Введем необходимые обозначения. Обозначим через $\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}, (i,j=1,2)$, компоненты тензоров напряжений и деформаций соответственно. Согласно закону Гука

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda\left(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}\right)\delta_{ij},$$

где λ и μ - постоянные Ламе. Обратив данные соотношения, можно выразить деформации через напряжения

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu}\sigma_{ij} - \frac{\lambda}{4\mu(\lambda+\mu)}\left(\sigma_{11}+\sigma_{22}\right)\delta_{ij}. \tag{1}$$

Введем также величину плотности энергии упругих деформаций

$$w = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{2}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}. \tag{2}$$

С учетом формулы (1) получим

$$w = a_1(\sigma_{11}^2+\sigma_{22}^2) - a_2\sigma_{11}\sigma_{22} + a_3\sigma_{12}^2, \tag{3}$$

где a_1, a_2, a_3 - некоторые положительные постоянные, зависящие от μ и λ.

Перейдем собственно к постановке изучаемой задачи. Будем полагать далее, что для каждого момента времени $t\in[0,T]$ гладкая кривая Γ_t ограничивает односвязную область Ω_t, а напряжения $\sigma_{ij}(x,t)$, $(x=(x_1,x_2))$, являются решением второй краевой задачи плоской теории упругости. А именно, напряжения удовлетворяют уравнениям равновесия

$$\sum_{j=1}^{2}\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0, \quad x\in\Omega_t, \quad i=1,2; \tag{4}$$

Работа частично поддержана грантом 01.07/00130 ДФФД Украины

уравнениям совместности Бельтрами-Митчела

$$-\Delta\left(\sigma_{11}+\sigma_{22}\right)=0, \qquad x\in\Omega_t б \tag{5}$$

и краевым условиям

$$\sum_{j=1}^{2}\sigma_{ij}n^j=g^i, \qquad i=1,2, \qquad x\in\Gamma_t, \tag{6}$$

где $n=(n^1(x,t),n^2(x,t))$- единичный вектор внешней нормали, $g=(g^1(x,t),g^2(x,t))$- заданная поверхностная нагрузка. Кроме того, задано начальное положение кривой Γ_t

$$\Gamma_t|_{t=0}=\Gamma_0, \tag{7}$$

а при $t>0$ ее движение описывается при помощи уравнения:

$$V_n=\frac{\partial^2}{\partial s^2}\left(w-k\right). \tag{8}$$

Здесь V_n - скорость движения кривой Γ_t вдоль нормали n, $\frac{\partial^2}{\partial s^2}$ - вторая производная по переменной дуге кривой s, а $k(x,t)$- ее средняя кривизна. По умолчанию, предполагается, что если Γ_t- круг радиуса r, то $k=1/r$.

Краткое содержание работы состоит в следующем. Во втором пункте введены функциональные пространства, в третьем сформулирована основная теорема. Четвертый пункт посвящен задаче (4)-(6) для заданной области Ω_t, а пятый - сведению задачи с движущейся границей к задаче в фиксированной области. В шестом пункте получены априорные оценки для напряжений. В заключительном седьмом пункте доказан основной результат.

Следует подчеркнуть, что нестационарные задачи со свободной границей для эллиптических уравнений рассматривались в работах [2], [3], [4], идеи и методы которых существенным образом используются в данной статье.

2. Функциональные пространства.

Пусть $\alpha\in(0,1)$. Введем следующие обозначения (см. [5])

$$\langle v\rangle_x^{(\alpha)}=\sup_{\substack{(x',t)\in R_T\\(x'',t)\in R_T}}\tfrac{|v(x',t)-v(x'',t)|}{|x'-x''|^\alpha}, \qquad \langle v\rangle_t^{(\alpha)}=\sup_{\substack{(x,t_1)\in R_T\\(x,t_2)\in R_T}}\tfrac{|v(x,t_1)-v(x,t_2)|}{|t_1-t_2|^\alpha}.$$

Пусть $l>0$- нецелое число, тогда

$$\langle v\rangle_x^{(l)}=\sum_{\mu+4\nu=[l]}\langle D_x^\mu D_t^\nu v\rangle_x^{(l-[l])}, \qquad \langle v\rangle_x^{(l/4)}=\sum_{0<l-\mu-4\nu<4}\langle D_x^\mu D_t^\nu v\rangle_t^{\left(\frac{l-\mu-4\nu}{4}\right)}.$$

Введем пространство $C^{l,\frac{l}{4}}(R_T)$, как множество функций, заданных в R_T и имеющих конечную норму

$$\|v;C^{l,\frac{l}{4}}(R_T)\|=\langle v\rangle^{(l)}+\sum_{j=0}^{[l]}\langle v\rangle^{(j)},$$

где

$$\langle v\rangle^{(j)}=\sum_{\mu+4\nu=j}\sup_{R_T}|D_x^\mu D_t^\nu v|.$$

Если $v \in C^{l,\frac{l}{4}}(R_T)$, то при $[l] < 4$ $v(x,0) = 0$, а при $[l] \geq 4$ $v(x,0) = v_t(x,0) = 0$, будем говорить, что $v \in C_0^{l,\frac{l}{4}}(R_T)$.

Для всякой функции $v \in C_0^{l,\frac{l}{4}}(R_T)$, $[l] \geq 1$ справедливы неравенства (см. [5]):

$$\|v; C^{l-1,\frac{l-1}{4}}(R_T)\| \leq C\,T^{\frac{1}{4}}\|v; C^{l,\frac{l}{4}}(R_T)\|,$$
$$\langle v\rangle^{(j)} \leq C\,T^{\frac{l-j}{4}}\langle v\rangle^{\frac{l}{4}}, \quad j \leq [l]. \tag{9}$$

Пусть G ограниченная область на плоскости с гладкой границей. Нам потребуются пространства $C^{\beta}\big([0,T]; C^l(G)\big)$ и соответствующие им полунормы вида

$$\langle v\rangle_{x,t}^{(\alpha,\beta)} = \sup_{\substack{x',\,x'' \in G\\ t_1,\,t_2 \in [0,T]}} \frac{|v(x',t_1) - v(x',t_2) - (v(x'',t_1) - v(x'',t_2))|}{|x'-x''|^{\alpha}|t_1-t_2|^{\beta}}.$$

Поскольку

$$|v(x',t_1) - v(x',t_2) - (v(x'',t_1) - v(x'',t_2))| =$$

$$= \left|\int_{x''}^{x'}(v_x(x,t_1) - v_x(x,t_2))dx\right|^{\alpha} |v(x',t_1) - v(x',t_2) - (v(x'',t_1) - v(x'',t_2))|^{1-\alpha} \leq$$

$$\leq C|x'-x''|^{\alpha}\left(\langle v_x\rangle_t^{(\frac{\alpha}{4})}|t_1-t_2|^{\frac{\alpha}{4}}\right)^{\alpha}\left|2\langle v\rangle_t^{(\frac{1+\alpha}{4})}|t_1-t_2|^{\frac{1+\alpha}{4}}\right|^{1-\alpha},$$

имеем

$$\langle v\rangle_{x,t}^{(\alpha,\frac{1}{4})} \leq C\langle v\rangle^{(1+\alpha)}.$$

Аналогично

$$\langle v\rangle_{x,t}^{(\alpha,\frac{1}{2})} \leq C\langle v\rangle^{(2+\alpha)},$$

а в общем случае

$$\langle v\rangle_{x,t}^{(l,\frac{n}{4})} \leq C\langle v\rangle^{(l+n)}, \quad n = 1, 2, .. \tag{10}$$

3. Основной результат.

Будем следовать рассуждениям работы [4]. Пусть $\mathcal{M}$ - гладкая кривая, ω_0- длина дуги кривой $\mathcal{M}$, а сама кривая $\mathcal{M}$ задана параметрически:

$$x = r_0(\omega), \quad r_0(\omega) = (r_0^1(\omega), r_0^2(\omega)),\ \omega \in [0,\omega_0],$$

где ω- переменная длина дуги кривой. Полагаем, что $r_0^i \in C^{\infty}[0,\omega_0]$, $i = 1, 2$. Единичную внешнюю нормаль к M в точке $x = r_0(\omega)$ обозначим через $n_0(\omega)$.

Для достаточно малого значения параметра L в окрестности $N_L = \{x : \operatorname{dist}(x, \mathcal{M}) < L\}$ кривой $\mathcal{M}$ можем ввести криволинейные координаты (ω, d) по правилу $x(\omega,d) = r_0(\omega) + d\,n_0(\omega)$. Теперь свободная граница Γ_t представима в виде

$$x = r(\omega,t) \equiv r_0(\omega) + \rho(\omega,t)\,n_0(\omega),\ \text{ или } d(x) = \rho(\omega(x),t) \tag{11}$$

для некоторой функции $\rho(\omega,t)$. В частности, $\Gamma_0 = \{d = \rho_0(\omega)\}$. Предполагаем, что

$$\rho_0 \in C^{5+\alpha}(R),\ (\text{с учетом периодичности}),\ \alpha \in (0,1), \tag{12}$$

причем

$$\|\rho_0\|_{C^{2+\alpha}} \le \delta, \quad 0 < \delta < L/8. \tag{13}$$

Основным результатом данной работы является

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* (12), (13), *тогда при достаточно малом значении* T *существует* $(\sigma_{11}(x,t), \sigma_{12}(x,t), \sigma_{22}(x,t), \rho(\omega,t))$ - единственное решение задачи (4)-(8) *причем* $\rho \in C^{4+\alpha, \frac{4+\alpha}{4}}(R_T)$.

Замечание 1. В формулировке Теоремы 1 не указываются гладкостные свойства компонент тензора напряжений, во-первых для краткости, а во-вторых т.к. их регулярность напрямую зависит от регулярности границы Γ_t.

4. Задача (4)-(6) в в случае заданной области Ω_t.

Как известно ([6]), вторая краевая задача разрешима только при специальных условиях согласования, которые в данном случае имеют вид:

$$\begin{gathered}\int\limits_{\Gamma_t} g^i\, ds = 0, \quad i = 1,2;\\ \int\limits_{\Gamma_t} \left(x_2 g^1 - x_1 g^2\right)\, ds = 0.\end{gathered} \tag{14}$$

Поскольку необходимо потребовать выполнение условий (14) для всех t, можем считать, например, что

1) можно выбрать некоторую область G такую, что $\overline{\Omega_t} \subseteq G$ для всех $t \in [0,T]$;

2) поверхностная нагрузка g имеет вид

$$g^i = \sum_{i,j=1} q_{ij} n^j, \quad i = 1,2;$$

где $q_{ij}(x,t)$ - некоторые функции, заданные при $x \in G$, $t \in [0,T]$, причем

$$\sum_{j=1}^{2} \frac{\partial q_{ij}}{\partial x_j} = 0, \qquad i = 1,2.$$

В этом случае выполнение условий (14) следует непосредственно из формулы Гаусса-Остроградского. Заметим, также, что если $q_{ij} = q_{ij}(t)$ (не зависят от пространственных переменных), то, в силу единственности решения второй краевой задачи, $\sigma_{ij} = q_{ij}(t)$, $i,j = 1,2$. Так что $w_{ss} = 0$ и движение свободной границы Γ_t (см. (8)) определяется только функцией средней кривизны k и начальным условием (7).

Далее в этом пункте Γ_t - некоторая фиксированная кривая, поэтому для краткости будем использовать обозначения Γ, Ω.

Обозначим так же

$$\sigma = (\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{22})$$

$$\|\sigma, W_p^{l+2}(\Omega)\| \equiv \|\sigma_{11}, W_p^{l+2}(\Omega)\| + \|\sigma_{12}, W_p^{l+2}(\Omega)\| + \|\sigma_{22}, W_p^{l+2}(\Omega)\|,$$

$$\|g, W_p^{l+2-1/p}(\Gamma)\| \equiv \|g_1, W_p^{l+2-1/p}(\Gamma)\| + \|g_2, W_p^{l+2-1/p}(\Gamma)\|.$$

Будем исходить из следующего результата (см. Теорему 3 работы [6]):

Теорема 2. *Пусть* $\Gamma \in C^{l+3}$, g^1, $g^2 \in W_p^{l+2-1/p}(\Gamma)$, *где* $p \geq 1$, $l = -1, 0, ..$ *и выполнены условия* (14). *Тогда существует единственное решение* $\sigma \in \left(W_p^{l+2}(\Omega)\right)^3$ *задачи* (4)-(6) *и имеет место оценка*

$$\|\sigma, W_p^{l+2}(\Omega)\| \leq C(\Gamma, \Omega)\|g, W_p^{l+2-1/p}(\Gamma)\|. \tag{15}$$

Поскольку задача (4)-(6) является эллиптической в смысле Дуглиса-Ниренберга ([6]) далее можно применить рассуждения работы [7]. Обозначим $V_{p,l} = \left(W_p^{l+2}(\Omega)\right)^3$, $H_{p,l} = W_p^{l+1}(\Omega) \times W_p^{l+1}(\Omega) \times W_p^{l}(\Omega) \times W_p^{l+2-1/p}(\Gamma) \times W_p^{l+2-1/p}(\Gamma)$. Запишем задачу (4)-(6) в операторном виде $A\sigma = g$, где $A : V_{p,l} \to H_{p,l}$. Из результатов работы [6] следует, что размерность пространства нулей оператора A в $V_{p,l}$ равна нулю, а дефектное число этого оператора в пространстве $H_{p,l}$ равно трем, т.к. функции g^1, g^2 должны удовлетворять трем условиям (14). Аналогично [7] можно утверждать, что дефект и размерность оператора сохранят свои значения, если мы будем рассматривать данную задачу в гельдеровских пространствах. Таким образом справедлива так же следующая теорема (см. Теоремы 2.1, 2.8, 2.13 работы [7]).

Теорема 3. *Пусть* $l > 0$ *- нецелое число и* $\Gamma \in C^{l+3}$. *Если* g^1, $g^2 \in C^{l+2}(\Gamma)$ *и выполнены условия (14), то задача* (4)-(6) *имеет единственное решение* σ, *такое, что* $\sigma \in \left(C^{l+2}(\Omega)\right)^3$ *и*

$$\|\sigma, C^{l+2}(\Omega)\| \leq C(\Gamma, \Omega)\|g, C^{l+2}(\Gamma)\|. \tag{16}$$

Здесь

$$\|\sigma, C^{l+2}(\Omega)\| \equiv \|\sigma_{11}, C^{l+2}(\Omega)\| + \|\sigma_{12}, C^{l+2}(\Omega)\| + \|\sigma_{22}, C^{l+2}(\Omega)\|,$$

$$\|g, C^{l+2}(\Gamma)\| \equiv \|g^1, C^{l+2}(\Gamma)\| + \|g^2, C^{l+2}(\Gamma)\|.$$

Замечание 2. Запишем систему (4)-(5) в виде

$$L\sigma = 0,$$

где

$$L = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \Delta & 0 & \Delta \end{pmatrix}, \quad L = \{l^{ik}\}, \ i, k = 1, 3.$$

Пусть $\gamma_1 = \gamma_2 = -1$, $\gamma_3 = 0$, $t_1 = t_2 = t_3 = 2$, тогда, как видим, порядок оператора l^{ik} не превосходит $\gamma_i + t_k$.

Граничное условие запишем в виде

$$B\sigma = g, \quad B = \begin{pmatrix} n^1 & n^2 & 0 \\ 0 & n^1 & n^2 \end{pmatrix}, \quad B = \{b^{ik}\}, \ i = 1, 2; \ k = 1, 2, 3.$$

Положим $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = -2$, и тогда порядок оператора b^{ik} не превышает $\beta_i + t_k$.

Пусть $f = (f^1, f^2, f^3)$ - некоторый заданный вектор. Значения параметров γ_i, t_i, β_i необходимы для формулировки следующей теоремы. (см. Теорему 2.1 работы [7])

Теорема 4. *Пусть l- нецелое положительное число, граница Γ области Ω принадлежит классу C^{l+3}, коэффициенты операторов l^{ik} классам $C^{l-\gamma_i}(\Omega)$ и операторов b^{ik} классам $C^{l-\beta_i}(\Gamma)$. Тогда всякое решение задачи*

$$L\sigma = f,\ x \in \Omega, \qquad B\sigma = g,\ \ x \in \Gamma,$$

с $\sigma \in C^{l+2}(\Omega)$ удовлетворяет неравенству

$$\|\sigma, C^{l+2}(\Omega)\| \le C(\Gamma, \Omega)\left(\sum_{i=1}^{3} \|f^i, C^{l-\gamma_i}(\Omega)\| + \|g, C^{l+2}(\Gamma)\| + \sum_{i,j=1}^{2} \|\sigma_{ij}, C(\Omega)\|\right).$$

5. Сведение (4)-(6) к задаче в фиксированной области.

Пусть $\chi \in C^\infty(R)$ при условии, что

$$\chi(d) = \begin{cases} 1,\ \text{при } |d| \le \frac{1}{2}, \\ \\ 0 \text{ при } d \ge 1. \end{cases} \qquad -3 \le d\chi'(d) \le 0.$$

Для произвольной функции

$$\rho \in C^{4+\alpha, \frac{4+\alpha}{4}}(R_T), \quad \sup_{R_T} |\rho| \le 2\delta, \tag{17}$$

введем отображение $y = e_\rho(x,t)$ следующим образом

$$e_\rho(x,t) = x - \chi\left(\frac{d(x)}{L}\right)\rho(\omega(x), t) n(\omega(x)). \tag{18}$$

Заметим, что если $x \notin N_L$, то $e_\rho(x,t) = x$, если же $x \in N_L$,то

$$x = r_0(\omega(x)) + d(x) n_0(\omega(x))$$

и

$$e_\rho(x,t) = r_0(\omega(x)) + \left(d(x) - \chi\left(\frac{d(x)}{L}\right)\right) n_0(\omega(x)).$$

Следуя работе [3], можно доказать, что, при выполнении условий (12)-(17), e_ρ- невырожденное преобразование, которое взаимно однозначно отображает Ω_t на Ω_0 и Γ_t на Γ_0.

Введем новые неизвестные функции

$$s_{ij}(y,t) = \sigma_{ij}(e_\rho^{[-1]}(y,t), t),$$

$$v(y,t) = w(e_\rho^{[-1]}(y,t), t), \qquad i,j = 1,2.$$

Перепишем исходную задачу (4)-(8) в переменных (y_1, y_2, t).

Обозначим

$$a_\rho^{ij}(y,t) = \frac{\partial}{\partial x_i} e_\rho^j(x,t)\big|_{x=e_\rho^{[-1]}(y,t)},$$

$$b_\rho^j(y,t) = \Delta e_\rho^j(x,t)\big|_{x=e_\rho^{[-1]}(y,t)}.$$

Если под $n(x,t)$ понимать нормаль к кривой Γ_t, то в переменных (y_1, y_2, t) получим

$$n(x,t) = \frac{A_\rho(y,t) n_0(\omega(y))}{|A_\rho(y,t) n_0(\omega(y))|}, \quad x = e_\rho(y,t).$$

где A_ρ- матрица с компонентами $\{a_\rho^{ij}(y,t)\}$. В дальнейшем примем обозначение

$$l_\rho(y,t) = |A_\rho(y,t) n_0(\omega(y))|^{-1}.$$

Таким образом соотношения (4)-(6) приобретают вид

$$\sum_{j,k=1}^{2} a_\rho^{kj}(y,t) \frac{\partial s_{ij}}{\partial y_j} = 0, \quad x \in \Omega_0, \ i = 1, 2, \tag{19}$$

$$-\sum_{i=1}^{2} \sum_{k,j=1}^{2} a_\rho^{ik}(y,t) a_\rho^{ij}(y,t) \frac{\partial^2 (s_{11}+s_{22})}{\partial y_k \partial y_j} - \sum_{j=1}^{2} b_\rho^j \frac{\partial (s_{11}+s_{22})}{\partial y_j} = 0, \qquad x \in \Omega_0, \tag{20}$$

$$l_\rho(y,t) \sum_{j,k=1}^{2} a_\rho^{jk}(y,t) n_0^k s_{ij} = g_i, \qquad i = 1, 2, \qquad x \in \Gamma_0. \tag{21}$$

6. Оценки решения задачи (19)-(21).

Обозначим через $s_\rho = (s_{11}, s_{12}, s_{22})$ решение задачи (19)-(21) при заданной функции ρ.

План дальнейших рассуждений состоит в следующем. Сначала необходимо выяснить какова регулярность коэффициентов a_ρ^{jk}, b_ρ^j, l_ρ и правой части g_ρ, а также их зависимость от функции ρ, т.е. оценить,например, разности вида $(l_{\rho_1} - l_{\rho_2})$. Затем, используя оценки пункта 2, получить оценки самого решения в гельдеровских нормах не только по переменным y_1, y_2, но и по времени t. На заключительном этапе выводятся оценки разности $(s_{\rho_1} - s_{\rho_2})$.

Необходимо рассмотреть два варианта 1) $\rho \in C^{4+\alpha, \frac{4+\alpha}{4}}(R_T)$; 2) $\rho \in C^{5+\alpha, \frac{5+\alpha}{4}}(R_T)$. Остановимся более подробно на первом случае.

Пусть для некоторого $r_1 > 0$

$$\|\rho, C^{4+\alpha, \frac{4+\alpha}{4}}(R_T)\| \le r_1. \tag{22}$$

Следуя работам [3], [8], можно доказать, что

$$\begin{gathered} \sup_{j,k} \sup_{[0,T]} \|a_\rho^{jk}(\cdot,t), C^{2+\alpha}(\Omega_0)\| + \sup_{j} \sup_{[0,T]} \|b_\rho^j(\cdot,t), C^{1+\alpha}(\Omega_0)\| + \\ + \sup_{[0,T]} \|l_\rho(\cdot,t), C^{3+\alpha}(\Gamma_0)\| + \sup_{j} \sup_{[0,T]} \|g_\rho^j(\cdot,t), C^{3+\alpha}(\Gamma_0)\| \le C_1\left(r_1, T\right). \end{gathered} \tag{23}$$

В силу невырожденности замены (18), можно убедиться в том, что система (19)-(21) будет эллиптической в смысле А.Даглиса-Л.Ниренберга, а граничные условия удовлетворяют условию дополнительности. Применяя аналог Теоремы 4, приходим к следующей оценке:

$$\|s_\rho, C^{3+\alpha}(\Omega_0)\| \le C_2\left(C_1, r_1, T\right)\|g_\rho, C^{3+\alpha}(\Gamma_0)\|.$$

Запишем систему (19)-(21) в виде

$$\mathcal{L}_\rho s_\rho = 0, \quad x \in \Omega_0,\ t \in [0,T], \qquad \mathcal{B}_\rho s_\rho = g_\rho, \quad x \in \Gamma_0,\ t \in [0,T]. \tag{24}$$

Гладкость функций s_{ij} по времени получим следующим образом. Рассматривая систему (24) при различных значениях времени $t = t'$, $t = t''$, получим

$$\mathcal{L}_{\rho(\cdot,t')}\left(s_\rho(\cdot,t') - s_\rho(\cdot,t'')\right) = \left(\mathcal{L}_{\rho(\cdot,t'')} - \mathcal{L}_{\rho(\cdot,t')}\right) s_\rho(\cdot,t''), \quad x \in \Omega_0,$$

$$\mathcal{B}_{\rho(\cdot,t')}\left(s(\cdot,t') - s(\cdot,t'')\right) = \left(\mathcal{B}_{\rho(\cdot,t'')} - \mathcal{B}_{\rho(\cdot,t')}\right) s(\cdot,t'') + g_{\rho(\cdot,t')} - g_{\rho(\cdot,t'')}, \quad x \in \Gamma_0.$$

Снова применяя аналог Теоремы 4 и используя гладкость коэффициентов задачи, получим

$$\|s_\rho(\cdot,t') - s_\rho(\cdot,t''), C^{2+\alpha}(\Omega)\| \le$$

$$\le C_3(C_1, C_2, r_1, T)\cdot$$

$$\cdot\Big(\|\sup_{j,k}\|a_\rho^{jk}(\cdot,t') - a_\rho^{jk}(\cdot,t''), C^{1+\alpha}(\Omega_0)\| + \sup_j\|b_\rho^j(\cdot,t') - b_\rho^j(\cdot,t''), C^{\alpha}(\Omega_0)\| +$$

$$+\|l_\rho(\cdot,t') - l_\rho(\cdot,t''), C^{2+\alpha}(\Gamma_0)\| + \|g_\rho(\cdot,t') - g_\rho(\cdot,t''), C^{2+\alpha}(\Gamma_0)\|\right).$$

Используя зависимость коэффициентов уравнения от функции ρ, а также применяя неравенство (10) при $n = 1$, получим, например, что

$$\|a_\rho^{jk}(\cdot,t') - a_\rho^{jk}(\cdot,t''), C^{1+\alpha}(\Omega_0)\| \le$$

$$\le C\|\rho(\cdot,t') - \rho(\cdot,t''), C^{2+\alpha}(R)\| \le C|t' - t''|^{\frac{1}{4}}\|\rho, C^{3+\alpha,\frac{3+\alpha}{4}}(R_T)\|,$$

$$\|l_\rho(\cdot,t') - l_\rho(\cdot,t''), C^{2+\alpha}(\Gamma_0)\| \le$$

$$\le C\|\rho(\cdot,t') - \rho(\cdot,t''), C^{3+\alpha}(R)\| \le C|t' - t''|^{\frac{1}{4}}\|\rho, C^{4+\alpha,\frac{4+\alpha}{4}}(R_T)\|.$$

Следовательно (см. (10))

$$\|s_\rho, C^{\frac{1}{4}}\left([0,T]; C^{2+\alpha}(\Omega_0)\right)\| \le C_4\left(C_1, C_2, C_3, r_1, T\right). \tag{25}$$

Если же $\rho \in C^{5+\alpha,\frac{5+\alpha}{4}}(R_T)$, то можно доказать, что

$$\|s_\rho, C^{\frac{1}{2}}\left([0,T]; C^{2+\alpha}(\Omega_0)\right)\| \le C_5\left(T, \|\rho, C^{5+\alpha,\frac{5+\alpha}{4}}(R_T)\|\right). \tag{26}$$

Пусть s_{ρ_1}, s_{ρ_2} - решения системы, соответствующие функциям ρ_1, ρ_2. Для разности $s = s_{\rho_1} - s_{\rho_2}$ получим

$$\mathcal{L}_{\rho_1} s = (\mathcal{L}_{\rho_1} - \mathcal{L}_{\rho_2})\, s_{\rho_2}, \quad x \in \Omega_0,$$

$$\mathcal{B}_{\rho_1} s = (\mathcal{B}_{\rho_1} - \mathcal{B}_{\rho_2})\, s_{\rho_2} + (g_{\rho_1} - g_{\rho_2}), \quad x \in \Gamma_0.$$

Снова, поскольку, к примеру,

$$\sup_{[0,T]} \|l_{\rho_1}(\cdot,t) - l_{\rho_2}(\cdot,t), C^{2+\alpha}(\Gamma_0)\| \leq C\|\rho_1 - \rho_2, C^{4+\alpha,\frac{4+\alpha}{4}}(R_T)\|,$$

$$\|l_{\rho_1}(\cdot,t') - l_{\rho_2}(\cdot,t''), C^{2+\alpha}(\Gamma_0)\| \leq C|t' - t''|^{\frac{1}{4}}\|\rho_1 - \rho_2, C^{4+\alpha,\frac{4+\alpha}{4}}(R_T)\|,$$

имеем

$$\|s_{\rho_1} - s_{\rho_2}, C^{\frac{1}{4}}\left([0,T]; C^{2+\alpha}(\Omega_0)\right)\| \leq C_6(C_1,..,C_4,r_1,T)\|\rho_1 - \rho_2, C^{4+\alpha,\frac{4+\alpha}{4}}(R_T)\|. \quad (27)$$

Замечание 3. Следует подчеркнуть, что постоянные C_1, ...C_6 остаются ограниченными при $r_1 \to 0$, $T \to 0$, а значит на зависимость данных постоянных от r_1, T можно явно не указывать, полагая, что, к примеру, $r_1 + T \leq 1$.

7. Доказательство Теоремы 1.

Единичные векторы касательной $\tau_0(\omega)$, нормали $n_0(\omega)$ и кривизна $k_0(\omega)$ кривой в точке $x = r_0(\omega)$ удовлетворяют соотношениям

$$\tau_0(\omega) = r_{0,\omega}(\omega), \quad \tau_{0,\omega}(\omega) = -k^0(\omega)n_0(\omega), \quad n_{0,\omega}(\omega) = k_0(\omega)\tau_0(\omega). \quad (28)$$

Используя параметрическое представление (11) кривой Γ_t, можем записать единичный вектор касательной $\tau(\omega,t)$ в виде

$$\tau = \frac{r_\omega}{|r_\omega|},$$

где

$$r_\omega = r_{0,\omega} + \rho_\omega n_0 + \rho n_{0,\omega} = (1 + \rho k_0)\tau_0 + \rho_\omega n_0,$$

$$|r_\omega| = \sqrt{(1 + \rho k_0)^2 + \rho_\omega^2},$$

а единичный вектор нормали $n(\omega,t)$ в виде

$$n = \frac{-\rho_\omega \tau_0 + (1 + \rho k_0)n_0}{J}, \quad J = |r_\omega|.$$

Теперь мы можем вычислить скорость кривой Γ_t в точке $(x,t) \in \Gamma_t$ в направлении нормали n и ее кривизну k по формулам

$$V_n = -r_t(\omega,t) \cdot n(\omega,t),$$

$$k = -r_{\omega\omega}(\omega,t) \cdot n(\omega,t)/|r_\omega(\omega,t)|^2, \qquad \omega = \omega(x).$$

Отсюда

$$V_n = -\tfrac{1+\rho k_0}{J}\rho_t;$$

$$k = \tfrac{1}{J^3}\left\{-(1+\rho k_0)\rho_{\omega\omega} + (2\rho_\omega k_0 + \rho k_{0,\omega})\rho_\omega + k_0(1+\rho k_0)^2\right\}.$$

Если s переменная длина дуги кривой Γ_t, то $\frac{\partial}{\partial s} = \frac{1}{J}\frac{\partial}{\partial \omega}$. Уравнение для движущейся границы можно записать в виде:

$$\rho_t + \mathcal{A}\left(\omega, \mathcal{R}^{(4)}\right) = \mathcal{F}\left(\omega, \mathcal{R}^{(2)}, W^{(2)}\right),$$

где

$$\mathcal{R}^{(k)} = \Big(\rho(\omega,t), .., \rho_\omega^{(k)}(\omega,t)\Big), \quad k = 0,..,4;$$

$$W^{(2)} = \left(w_{y_1}, w_{y_2}, w_{y_1y_1}, w_{y_1y_2}, w_{y_2y_2}\right).$$

Ниже под w_{y_1}, ... $w_{y_2y_2}$ будем подразумевать граничные значения данных функций на Γ_0 и считать, что, например, $w_{y_2y_2} = w_{y_2y_2}(\omega,t)$.

Замечание 4. Необходимо отметить, что в выражение для оператора $\mathcal{A}$ входят производные $r_0(\omega)$ вплоть до пятого порядка (учитывая зависимость от k_0), а в правой части $\mathcal{F}$ содержатся производные $r_0(\omega)$ до четвертого порядка включительно.

Используя результаты Теоремы 1.4 работы [5], можно определить функцию $h \in C^{5+\alpha,\frac{5+\alpha}{4}}(R_T)$ из условий

$$h(\omega,0) = \rho_0(\omega),$$

$$h_t(\omega,0) = \mathcal{F}\left(\omega, \mathcal{R}_0{}^{(2)}, W_{\rho_0}^{(2)}\right) - \mathcal{A}\left(\omega, \mathcal{R}_0^{(4)}\right).$$

Представим функцию ρ в виде $\rho(\omega,t) = h(\omega,t) + \phi(\omega,t)$. Запишем исходную задачу для новой неизвестной функции $\phi \in C_0^{4+\alpha,\frac{4+\alpha}{4}}(R_T)$ в виде удобном для линеаризации:

$$\begin{aligned}
&\phi_t + \sum_{i=0}^{4}\mathcal{A}_{H_i}\left(\omega, H^{(4)}\right)\phi_\omega^{(i)} = \\
&\quad = \left\{\mathcal{F}\left(\omega, H^{(2)}, W_H^{(2)}\right) - \left(h_t + \mathcal{A}\left(\omega, H^{(4)}\right)\right)\right\} \\
&\quad + \left\{\mathcal{F}\left(\omega, H^{(2)} + \Phi^{(2)}, W_{H+\Phi}^{(2)}\right) - \mathcal{F}\left(\omega, H^{(2)}, W_H^{(2)}\right)\right\} - \qquad (29)\\
&\quad - \sum_{i,j=0}^{4}\int_0^1 dz\int_0^z \mathcal{A}_{H_iH_j}\left(\omega, H^{(4)} + \tau\Phi^{(4)}\right) d\tau\,\phi_\omega^{(i)}\phi_\omega^{(j)} \equiv \\
&\quad \equiv F_1 + F_2 + F_3.
\end{aligned}$$

Представим последнее соотношение следующим образом $A\phi = F(\phi)$.

Введем множество

$$X_{r,T} = \{\phi \in C_0^{4+\alpha,\frac{4+\alpha}{4}}(R_T) : \|\phi, C^{4+\alpha,\frac{4+\alpha}{4}}(R_T)\| \le r\}$$

и докажем, что при достаточно малых значениях r, T, оператор $A^{-1}F$ является сжимающим оператором, отображающим множество X_r в себя.

Поскольку $\frac{1+\alpha}{4} < \frac{1}{2}$, из (26) следует, что w_{h,y_1}, ... ,$w_{h,y_2y_2} \in C^{1+\alpha,\frac{1+\alpha}{4}}(R_T)$ и $F_1 \in C_0^{1+\alpha,\frac{1+\alpha}{4}}(R_T)$. Неравенства (9), (26) дают оценку

$$\|F_1; C^{\alpha,\frac{\alpha}{4}}(R_T)\| \le T^{\frac{1}{4}}\|F_1; C^{1+\alpha,\frac{1+\alpha}{4}}(R_T)\| \le T^{\frac{1}{4}}C(\|H; C^{5+\alpha,\frac{5+\alpha}{4}}(R_T)\|). \tag{30}$$

Записывая F_2 в виде

$$F_2 = \mathcal{F}\left(\omega, H^{(2)} + \Phi^{(2)}, W^{(2)}_{H+\Phi} - W^{(2)}_H\right) + \left(\mathcal{F}\left(\omega, H^{(2)} + \Phi^{(2)}, W^{(2)}_H\right) - \mathcal{F}\left(\omega, H^{(2)}, W^{(2)}_H\right)\right),$$

получим (см. (10), (25))

$$\|F_2; C^{\alpha,\frac{\alpha}{4}}(R_T)\| \le C\left(T^{\frac{1}{4}} + T^{\frac{1-\alpha}{4}}\right). \tag{31}$$

Поскольку последнее слагаемое F_3 содержит только слагаемые второго порядка относительно функции ϕ и ее производных, имеем

$$\|F_3; C^{\alpha,\frac{\alpha}{4}}(R_T)\| \le Cr^2. \tag{32}$$

Собирая вместе оценки (30)-(32) и применяя результаты работы [5] о разрешимости краевой задачи для линейного параболического уравнения, получим

$$\|A^{-1}F(\phi), C^{4+\alpha,\frac{4+\alpha}{4}}(R_T)\| \le C\left(T^{\frac{1}{4}} + T^{\frac{1-\alpha}{4}} + r^2\right). \tag{33}$$

Далее на основании оценки (27) выводим неравенство

$$\|A^{-1}F(\phi_1) - A^{-1}F(\phi_2), C^{4+\alpha,\frac{4+\alpha}{4}}(R_T)\| \le C\left(T^{\frac{1-\alpha}{4}} + T^{\frac{1-\alpha}{4}}r^2\right)\|\phi_1 - \phi_2, C^{4+\alpha,\frac{4+\alpha}{4}}(R_T)\|. \tag{34}$$

При наличии оценок (33), (34), стандартная процедура (см. работу [8]) позволяет доказать существование неподвижной точки оператора $A^{-1}F$.

1. *Kirill D.J, Davis S.H., Miksis M.J., Voorhees P.W.* Morphological instability of a whisker // Proc. R. Soc. Lond. v.455, 1999, pp. 3825-3844.
2. *Базалий Б.В.* Задача Стефана для уравнения Лапласа с учетом кривизны свободной границы // Укр. мат. журнал, т.49, 1997, с.1299-1315.
3. *Cheng X., Hong J., Yi F.* Existence, uniqueness of classical solutions of the Mullins-Sekerka problem // Commun. in Partial Differential Equations, v.21, 1996, pp.1705-1727.
4. *Cheng X.* The Hele-Shaw problem and area-preserving curve-shortening motions // Arch. Rat. Mech. Anal.- v.123.-1999.- pp.117-151.
5. *Солонников В.А.* О краевых задачах для линейных параболических систем дифференциальных уравнений общего вида // Труды МИАН им. В.А.Стеклова, т.83, 1965, с.3-163.
6. *Назаров С.А.., Шойхет Б.А.* Об эллиптичности плоской задачи теории упругости в напряжениях // Известия вузов, Математика, 1988, т.1, с.57-66.
7. *Солонников В.А.* Об общих краевых задачах для систем, эллиптических в смысле А. Даглиса- Л. Ниренберга. II // Труды МИАН им. В.А.Стеклова.- т.92.- 1966.- с.233-297.
8. *Базалий Б.В., Дегтярев С.П.* О классической разрешимости многомерной задачи Стефана при конвективном движении вязкой несжимаемой жидкости // Математический сборник, т.132, 1987, с.3-19.

Институт прикладной математики и механики НАН Украины
ул. Розы Люксембург, 74
83114, Донецк, Украина

Получено 20.12.2005