©2006. **А.Т. Кошелев, М.А.Нарбут**

ПЛОСКИЕ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ УПРОЧНЯЮЩЕЙСЯ СРЕДЫ

В плоском случае получены условия существования и единственности обобщенных решений в напряжениях и деформациях для задачи теории упругой среды с упрочнением.

Keywords and phrases: нелинейные краевые задачи, итерационный процесс, упругость, упрочнение, обобщенные решения, тензор напряжений, тензор деформаций
MSC (2000): 35D10, 74B20

Рассмотрим цилиндрическую область T с осью x_3 и поперечным сечением $\Omega = \{(x_1, x_2)\}$. Систему уравнений равновесия упругой среды запишем в виде

$$L_j(\mathbf{u}) + \rho f_j \equiv D_i \sigma_{ij} + \rho f_j = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3), \tag{1}$$

где f_j $(j = 1, 2, 3)$ — заданные массовые силы и $\rho = \text{const}$ — плотность среды. Предположим также, что на боковой поверхности цилиндра $\partial\Omega$ выполняется краевое условие

$$\mathbf{u}\Big|_{\partial\Omega} = 0, \tag{2}$$

где $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ — вектор смещений. Если цилиндр конечен вдоль оси $Ox_3 \equiv Oz$, так что $0 < z < h$, введем аналогичные условия на торцах цилиндра:

$$\mathbf{u}\Big|_{z=0} = \mathbf{u}\Big|_{z=h} = 0, \tag{3}$$

Определяющие соотношения упрочняющейся упругой среды запишем в виде

$$\sigma_{ij} = a_{ij}(x, \varepsilon_{kl}), \tag{4}$$

где $x = (x_1, x_2, x_3)$ и $\varepsilon_{kl} = (D_k u_l + D_l u_k)/2$. Будем предполагать, что функции $a_{ij}(x, p)$ непрерывно дифференцируемы по p при почти всех x, матрица

$$A = \left\{ \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} \right\} \quad (i, j, k, l = 1, 2, 3) \tag{5}$$

симметрична и ее собственные числа λ_i удовлетворяют неравенствам

$$\sup \lambda_i = \Lambda_0 < +\infty, \quad \inf \lambda_i = \lambda_0 > 0. \tag{6}$$

Из условий (6), в частности, следует, что

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} \xi_i^{(k)} \xi_j^{(l)} \geqslant \mu_0 |\xi_i|^2, \quad \left| \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} \right| \leqslant \nu_0, \tag{7}$$

где μ_0, ν_0 — положительные постоянные, $\xi_i = (\xi_i^{(1)}, \xi_i^{(2)}, \xi_i^{(3)}), i = 1, 2, 3$ — произвольный набор векторов из R^3.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 03-01-00053)

Рассмотрим итерационный процесс упругих решений [1]

$$\Delta \mathbf{u}^{(n+1)} + \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{u}^{(n+1)} = \Delta \mathbf{u}^{(n)} + \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{u}^{(n)} - \varepsilon \left(\mathbf{L}(\mathbf{u}^{(n)}) + \rho \mathbf{f}\right) \tag{8}$$

с краевыми условиями (2) и (3).

В монографии [1] (стр.165) доказано, что если $f \in L_2(T), \varepsilon = 2(\Lambda_0 + \lambda_0)^{-1}$, то процесс (8) сходится в $\overset{(1)}{\mathrm{W}}_2(T)$ к решению задачи (1)-(3) как геометрическая прогрессия со знаменателем $(\Lambda_0 - \lambda_0)(\Lambda_0 + \lambda_0)^{-1}$, начиная с любого $\mathbf{u}^{(0)} \in \overset{(1)}{\mathrm{W}}_2(T)$. Таким образом, обеспечивается существование и единственность обобщенного (слабого) решения пространственной задачи (1)-(3).

Обратимся теперь к задаче о плоском напряженном состоянии, т.е. будем считать, что во всех точках рассматриваемой цилиндрической области T выполняются условия

$$\sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{33} = 0, \tag{9}$$

при этом краевое условие (3) исключается из рассмотрения. Предположим далее, что $f_3 = 0$, а компоненты f_1 и f_2 зависят только от x_1, x_2. В этом случае третье уравнение из (1) удовлетворяется тождественно, а два первых уравнения записываются в виде

$$\left\{ \begin{array}{l} D_1\sigma_{11} + D_2\sigma_{12} + \rho f_1 = 0, \\ D_1\sigma_{12} + D_2\sigma_{22} + \rho f_2 = 0. \end{array} \right. \tag{10}$$

В случае однородной изотропной упругой среды соотношения (4), как известно, принимают вид

$$\sigma_{ij} = \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}, \tag{11}$$

где λ и μ— постоянные Ламе. В этом случае из (9) и (11) следует, что

$$\varepsilon_{13} = 0, \quad \varepsilon_{23} = 0, \quad \varepsilon_{33} = -\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) \tag{12}$$

и

$$\sigma_{ij} = \lambda^*(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22})\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} \quad (i, j = 1, 2), \tag{13}$$

$$\lambda^* = \frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu}.$$

Допустим, что величины $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{12}$, а значит и напряжения $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}$ не зависят от x_3. Тогда (10) после подстановки выражений (13) сводится к двумерной системе уравнений Ламе (с постоянными λ^* и μ), для которой имеют место теоремы существования и единствености решения в классе $\overset{(1)}{\mathrm{W}}_2(\Omega)$[1]. Как и в случае пространственной задачи, сходится итерационный процесс (8). Однако полученное таким образом решение двумерной задачи не будет, вообще говоря, удовлетворять условиям совместности Сен-Венана [2]. Не составляет большого труда убедиться в том, что эти условия будут выполняться только в случае, когда ε_{33} из (12) является линейной функцией координат x_1, x_2. Стало быть, наше допущение о независимости деформаций и напряжений в цилиндрической области T от координаты x_3 в случае плоского напряженного состояния выполняется лишь для весьма ограниченного класса задач. Именно по этой причине в теории упругости вводится понятие об обобщенном плоском напряженном состоянии [3], с достаточной для приложений точностью характеризующем напряженно-деформированное состояние тонких пластин под действием сил, лежащих в их плоскости. При этом зависимость от координаты x_3 устраняется усреднением по толщине пластины.

Обратимся теперь к нелинейной задаче теории упругости для упрочняющихся сред. Введем интенсивности деформаций

$$e_0 = \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{\sum_{j<l}\left[(D_j u_j - D_l u_l)^2 + \frac{3}{2}(D_j u_l + D_l u_j)^2\right]} \tag{14}$$

и напряжений

$$\sigma_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\sum_{j<l}\left[(\sigma_{jj} - \sigma_{ll})^2 + 6\sigma_{jl}^2\right]}. \tag{15}$$

Следуя постулатам деформационной теории пластичности [4], предположим, что

$$\sigma_0 = \Phi(e_0) \equiv 3\mu(1 - \omega(e_0))e_0, \tag{16}$$

причем непрерывно-дифференцируемая функция ω удовлетворяет неравенствам

$$\inf(1 - \omega - \omega' e_0) > 0, \quad \omega \geqslant 0, \quad \omega' \geqslant 0. \tag{17}$$

Определяющие соотношения нелинейной теории представим в виде

$$\sigma_{ij} = (\lambda + \frac{2}{3}\mu\omega)(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})\delta_{ij} + 2\mu(1 - \omega)\varepsilon_{ij}. \tag{18}$$

Если выполняются условия (9), то выполняются равенства

$$\varepsilon_{13} = 0, \quad \varepsilon_{23} = 0, \tag{19}$$

выражение (14) сводится к формуле

$$e_0 = \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22})^2 + (\varepsilon_{11} - \varepsilon_{33})^2 + (\varepsilon_{22} - \varepsilon_{33})^2 + 6\varepsilon_{12}^2}, \tag{20}$$

а из соотношений (18) следует равенство

$$\varepsilon_{33} = -\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) - \frac{2\mu\omega}{3(\lambda + 2\mu)}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} - 2\varepsilon_{33}) \tag{21}$$

Обозначим правую часть равенства (21) через Ω_3. Тогда

$$\frac{\partial\Omega_3}{\partial\varepsilon_{33}} = -\frac{2\mu}{3(\lambda + 2\mu)}\left[\omega'\frac{\partial e_0}{\partial\varepsilon_{33}}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} - 2\varepsilon_{33}) - 2\omega\right] =$$

$$= \frac{2\mu}{3(\lambda + 2\mu)}\left[\frac{\sqrt{2}}{3}\omega'\frac{(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} - 2\varepsilon_{33})^2}{\sqrt{(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22})^2 + (\varepsilon_{11} - \varepsilon_{33})^2 + (\varepsilon_{22} - \varepsilon_{33})^2 + 6\varepsilon_{12}^2}} + 2\omega\right] =$$

С учетом формулы (20) имеем выражение

$$\frac{\partial\Omega_3}{\partial\varepsilon_{33}} = \frac{4\mu}{3(\lambda+2\mu)}\left[\frac{1}{9}\omega'\frac{(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}-2\varepsilon_{33})^2}{e_0}+\omega\right].$$

Теперь можно воспользоваться элементарным неравенством

$$|\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}-2\varepsilon_{33}| \leqslant \sqrt{2}\sqrt{(\varepsilon_{11}-\varepsilon_{33})^2+(\varepsilon_{22}-\varepsilon_{33})^2} \leqslant 3e_0,$$

чтобы получить оценку производной

$$\left|\frac{\partial\Omega_3}{\partial\varepsilon_{33}}\right| \leqslant \frac{4\mu}{3(\lambda+2\mu)}[\omega' e_0+\omega] \leqslant \frac{2}{3}[\omega' e_0+\omega] < 1.$$

Отсюда следует, что уравнение (21) имеет единственное решение $\varepsilon_{33} = \zeta(\varepsilon_{11},\varepsilon_{22},\varepsilon_{12})$. Дифференцируя (21) по $\varepsilon_{ij}(i,j=1,2)$, получим

$$\frac{\partial\varepsilon_{33}}{\partial\varepsilon_{ij}} = -\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\delta_{ij} + O(\max\{\sup\omega,\sup\omega'\}) \quad (i,j=1,2).$$

Для напряжений $\sigma_{11},\sigma_{22},\sigma_{12}$ имеем

$$\sigma_{ij} = \lambda^*(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22})\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} + \varphi_{ij}(\varepsilon_{11},\varepsilon_{22},\varepsilon_{12}) \quad (i,j=1,2), \tag{22}$$

где функции φ_{ij} и их производные имеют порядок

$$\varkappa = O(\max\{\sup\omega,\sup\omega'\}). \tag{23}$$

Матрица (5) при $i,j,k,l = 1,2$ имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} \lambda^*+2\mu & 0 & \lambda^* \\ 0 & 2\mu & 0 \\ \lambda^* & 0 & \lambda^*+2\mu \end{pmatrix} + B,$$

где все элементы симметричной матрицы B имеют порядок (23). Собственные числа матрицы A имеют вид $2(\lambda^*+\mu)$ и 2μ, так что согласно (6) $\Lambda_0 = 2(\lambda^*+\mu), \lambda_0 = 2\mu$. Если порядок (23) достаточно мал, то на основании леммы (4.3.1) из [1] задача (11) с краевыми условиями (2) и определяющими соотношениями нелинейной теории упругости (22) имеет единственное решение в $\mathrm{W}_2^{(1)}(\Omega)$, к которому будет сходится итерационный процесс (8) при $\varepsilon = 2(\Lambda_0+\lambda_0)^{-1}$ как геометрическая прогрессия со знаменателем $(\Lambda_0-\lambda_0)(\Lambda_0+\lambda_0)^{-1}$.

В случае плоской деформации предполагается, что поле перемещений $\mathbf{u}(x_1,x_2)$ и массовые силы $\mathbf{f}(x_1,x_2)$ не зависят от x_3 и $u_3 = f_3 = 0$. Поэтому

$$\varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = \varepsilon_{33} = 0, \tag{24}$$

а $\varepsilon_{11},\varepsilon_{22},\varepsilon_{12}$ не зависят от x_3. Выражение (20) для интенсивности деформаций принимает вид

$$e_0 = \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{(\varepsilon_{11}-\varepsilon_{22})^2+\varepsilon_{11}^2+\varepsilon_{22}^2+6\varepsilon_{12}^2} = \frac{2}{3}\sqrt{\varepsilon_{11}^2+\varepsilon_{22}^2-\varepsilon_{11}\varepsilon_{22}+3\varepsilon_{12}^2}. \tag{25}$$

Определяющие соотношения (18) упрочняющейся упругой среды с учетом (24) дают

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= (\lambda+2\mu)\varepsilon_{11}+\lambda\varepsilon_{22}-\tfrac{2}{3}\mu\omega(2\varepsilon_{11}-\varepsilon_{22}),\\ \sigma_{22} &= (\lambda+2\mu)\varepsilon_{22}+\lambda\varepsilon_{11}-\tfrac{2}{3}\mu\omega(2\varepsilon_{22}-\varepsilon_{11}),\\ \sigma_{12} &= 2\mu(1-\omega)\varepsilon_{12},\end{aligned} \tag{26}$$

а уравнения равновесия по-прежнему имеют вид (10). Для существования слабого решения задачи (10), (26), (2) достаточно, чтобы были выполнены условия (4.2.3) и (4.2.4) из [1]. В случае пространственной задачи эти условия выполняются при ограничениях (17). В частности, параметр a из неравенства (4.2.3) можно принять равным

$$a=\frac{\mu}{2}\left(1-\sup_{e_0}(\omega+\omega' e_0)\right).$$

Для существования слабого решения задачи о плоской деформации упрочняющегося тела достаточно показать, что выполняется неравенство

$$\sum\overline{\frac{\partial\sigma_{ik}}{\partial\varepsilon_{jl}}}\varepsilon_{ik}\varepsilon_{jl}\geqslant a_2(\varepsilon_{11}^2+\varepsilon_{22}^2+\varepsilon_{12}^2)\quad (i,j,k,l=1,2), \tag{27}$$

где $a_2>0$, а черта над производными означает, что они вычисляются при некоторых промежуточных значениях аргумента [1].

Вычисляя требуемые производные из соотношений (26) и учитывая, что в соответствии с (25)

$$\frac{\partial e_0}{\partial\varepsilon_{11}}=\frac{2(2\varepsilon_{11}-\varepsilon_{22})}{9e_0},\quad \frac{\partial e_0}{\partial\varepsilon_{22}}=\frac{2(2\varepsilon_{22}-\varepsilon_{11})}{9e_0},\quad \frac{\partial e_0}{\partial\varepsilon_{12}}=\frac{4\varepsilon_{12}}{3e_0},$$

придем к выражению

$$\begin{gathered}\sum\overline{\frac{\partial\sigma_{ik}}{\partial\varepsilon_{jl}}}\varepsilon_{ik}\varepsilon_{jl}=\lambda(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22})^2+2\mu(\varepsilon_{11}^2+\varepsilon_{22}^2+\varepsilon_{12}^2)-\\ -\frac{4}{3}\mu\frac{\bar\omega'}{\overline{e}_0}\left[\frac{1}{9}(2\overline{\varepsilon}_{11}-\overline{\varepsilon}_{22})^2\varepsilon_{11}^2+\frac{1}{9}(2\overline{\varepsilon}_{22}-\overline{\varepsilon}_{11})^2\varepsilon_{22}^2+\right.\\ +\frac{2}{9}(2\overline{\varepsilon}_{11}-\overline{\varepsilon}_{22})(2\overline{\varepsilon}_{22}-\overline{\varepsilon}_{11})\varepsilon_{11}\varepsilon_{22}+\\ \left.+(2\overline{\varepsilon}_{11}-\overline{\varepsilon}_{22})\overline{\varepsilon}_{12}\varepsilon_{11}\varepsilon_{12}+(2\overline{\varepsilon}_{22}-\overline{\varepsilon}_{11})\overline{\varepsilon}_{12}\varepsilon_{22}\varepsilon_{12}+2\overline{\varepsilon}_{12}^2\varepsilon_{12}^2\right]-\\ -\frac{2}{3}\mu\overline{\omega}(2\varepsilon_{11}^2+2\varepsilon_{22}^2+3\varepsilon_{12}^2-2\varepsilon_{11}\varepsilon_{22})\end{gathered}$$

Вводя обозначения

$$\zeta_{11}=\frac{2\overline{\varepsilon}_{11}-\overline{\varepsilon}_{22}}{3\overline{e}_0}\varepsilon_{11},\quad \zeta_{22}=\frac{2\overline{\varepsilon}_{22}-\overline{\varepsilon}_{11}}{3\overline{e}_0}\varepsilon_{22},\quad \zeta_{12}=\frac{\overline{\varepsilon}_{12}}{\overline{e}_0}\varepsilon_{12}.$$

для квадратичной формы из (27) можем записать выражение

$$\sum\overline{\frac{\partial\sigma_{ik}}{\partial\varepsilon_{jl}}}\varepsilon_{ik}\varepsilon_{jl}=\lambda(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22})^2+2\mu(\varepsilon_{11}^2+\varepsilon_{22}^2+\varepsilon_{12}^2)-\frac{4}{3}\mu\overline{\omega' e_3}\left(\zeta_{11}^2+3\zeta_{11}\zeta_{12}+2\zeta_{11}\zeta_{22}+\right.$$

$$+3\zeta_{22}\zeta_{12}+\zeta_{22}^2+2\zeta_{12}^2\big)--\frac{4}{3}\mu\overline{\omega}\left(\varepsilon_{11}^2+\varepsilon_{22}^2-\varepsilon_{11}\varepsilon_{22}+\frac{3}{2}\varepsilon_{12}^2\right).$$

Собственные числа матрицы, отвечающей квадратичной форме переменных ζ, равны $0, 2\pm 3/\sqrt{2}$. Собственные числа формы по ε равны $3/2, 3/2, 1/2$. В результате получаем оценку

$$\sum\overline{\frac{\partial\sigma_{ik}}{\partial\varepsilon_{jl}}}\varepsilon_{ik}\varepsilon_{jl}\geqslant$$
$$\geqslant 2\mu(\varepsilon_{11}^2+\varepsilon_{22}^2+\varepsilon_{12}^2)-\tfrac{4}{3}\mu\overline{\omega' e_0}\left(2+\tfrac{3}{\sqrt{2}}\right)(\zeta_{11}^2+\zeta_{22}^2+\zeta_{12}^2)-2\mu\overline{\omega}\left(\varepsilon_{11}^2+\varepsilon_{22}^2+\varepsilon_{12}^2\right).$$

Заметим, что

$$|\zeta_{11}|\leqslant\frac{|2\overline{\varepsilon}_{11}-\overline{\varepsilon}_{22}|}{3\overline{e}_0}|\varepsilon_{11}|,\quad |\zeta_{22}|\leqslant\frac{|2\overline{\varepsilon}_{22}-\overline{\varepsilon}_{11}|}{3\overline{e}_0}|\varepsilon_{22}|,\quad |\zeta_{12}|=\frac{|\overline{\varepsilon}_{12}|}{\overline{e}_0}|\varepsilon_{12}|.$$

Поскольку

$$|2\overline{\varepsilon}_{11}-\overline{\varepsilon}_{22}|^2=(\overline{\varepsilon}_{11}-\overline{\varepsilon}_{22}+\overline{\varepsilon}_{11})^2\leqslant 2\left[(\overline{\varepsilon}_{11}-\overline{\varepsilon}_{22})^2+\overline{\varepsilon}_{11}^2+\overline{\varepsilon}_{22}^2+6\overline{\varepsilon}_{12}^2\right]\leqslant$$
$$\leqslant 2\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2\left[\frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{(\overline{\varepsilon}_{11}-\overline{\varepsilon}_{22})^2+\overline{\varepsilon}_{11}^2+\overline{\varepsilon}_{22}^2+6\overline{\varepsilon}_{12}^2}\right]^2=9\overline{e}_0^2$$

и аналогично

$$|2\overline{\varepsilon}_{22}-\overline{\varepsilon}_{11}|^2\leqslant 9\overline{e}_0^2,$$
$$|\overline{\varepsilon}_{12}|\leqslant\frac{1}{\sqrt{6}}\frac{3}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{(\overline{\varepsilon}_{11}-\overline{\varepsilon}_{22})^2+\overline{\varepsilon}_{11}^2+\overline{\varepsilon}_{22}^2+6\overline{\varepsilon}_{12}^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\overline{e}_0,$$

то

$$|2\overline{\varepsilon}_{22}-\overline{\varepsilon}_{11}|\leqslant 3\overline{e}_0,\quad |2\overline{\varepsilon}_{11}-\overline{\varepsilon}_{22}|\leqslant 3\overline{e}_0,$$
$$|\zeta_{11}|\leqslant|\varepsilon_{11}|,\quad |\zeta_{22}|\leqslant|\varepsilon_{22}|,\quad |\zeta_{12}|\leqslant\frac{\sqrt{3}}{2}|\varepsilon_{12}|.$$

Таким образом,

$$\sum\overline{\frac{\partial\sigma_{ik}}{\partial\varepsilon_{jl}}}\varepsilon_{ik}\varepsilon_{jl}\geqslant 2\mu(\varepsilon_{11}^2+\varepsilon_{22}^2+\varepsilon_{12}^2)-\left[4\mu\overline{\omega' e_0}\left(2+\frac{3}{\sqrt{2}}\right)+2\mu\overline{\omega}\right](\varepsilon_{11}^2+\varepsilon_{22}^2+\varepsilon_{12}^2),$$

и для существования решения задачи о плоской деформации цилиндрической области T достаточно [1], чтобы выполнялось неравенство

$$2\left(2+\frac{3}{\sqrt{2}}\right)\omega' e_0+\omega<1-\delta$$

с некоторой постоянной $\delta>0$.

1. *Кошелев А.И., Челкак С.И.* Регулярность решений некоторых краевых задач для квазилинейных эллиптических и параболических систем. — СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2000. — 356 с.
2. *Мусхелишвили Н.И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. — М.: Наука, 1966. —708 с.
3. *Ляв А.* Математическая теория упругости.— М.; Л.: ОГИЗ, 1935.— 674 с.
4. *Ильюшин А.А.* Пластичность. М.; Л.: ОГИЗ, 1948. — 376 с.

Санкт-Петербургский государственый университет, Россия
`akosh@AK13603.spb.edu`,
`narbut@MN7503.spb.edu`
Received 18.11.2005