

©2006. Д. А.Космодемьянский

СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ МЕХАНИКИ СИЛЬНО НЕОДНОРОДНЫХ СРЕД

В статье рассматриваются спектральные свойства трех усредненных задач механики сильно неоднородных сред: проблемы "двойной пористости", проблемы колебания смеси (микстуры) двух вязких сжимаемых жидкостей и колебания среды, состоящей из упругого каркаса и вязкой жидкости. Изучена структура спектра и исследовано наличие так называемых «спектральных лагун» во всех трех случаях.

Ключевые слова: усреднение, двухмасштабная сходимости, закон Био, комбинированные среды
MSC (2000): 35B27

Введение.

Задачам, связанным с построением так называемых "эффективных" или "усредненных" характеристик сильнонеоднородных сред, посвящено очень большое количество работ как российских, так и зарубежных авторов. Среди множества рассматриваемых моделей неоднородных сред можно выделить модели так называемых "комбинированных сред", представляющих собой смесь из двух фаз с различными механическими свойствами, так, например, каркас из упругого материала и сжимаемая (или несжимаемая) вязкая жидкость. Для построения "эффективных" или "усредненных" моделей часто используется предположение о периодичности структуры включений материала одной фазы в другую. Такое предположение упрощает задачу о построении упомянутых "эффективных" или "усредненных" моделей. Под усредненными моделями понимаются такие краевые задачи для уравнений или систем с постоянными (или относительно медленно меняющимися) "эффективными" характеристиками, что решения краевых задач для исходных двухфазных моделей сходятся (в некотором смысле) к решению соответствующих уравнений для "усредненной" модели, когда период ε рассматриваемой периодической структуры стремится к нулю. При этом в ряде случаев сходимости в классическом смысле (например, в пространстве L_2) может и не быть. Для упомянутой выше задачи о среде "упругий каркас - сжимаемая жидкость" сходимости решений будет сильной только на "упругой" фазе; на "жидкой" фазе сходимости в классическом смысле не будет. В целом, в совокупной области, представляющей собой объединение жидкой и упругой фаз, сходимости будет только слабой. Чтобы определить более точно характер поведения допредельных сред на "жидкой фазе" и установить связь допредельных решений с решением соответствующей задачи для усредненной модели, было введено и активно исследовалось (см., например, [1]) понятие "двухмасштабной сходимости". Это понятие является развитием понятия слабой сходимости. Его отличительной особенностью является то, что двухмасштабный предел последовательности функций есть функция от двух групп переменных: от переменных, меняющихся внутри области, и переменных, меняющихся внутри ячейки периодичности. Такая функция содержит существенно больше информации о поведении допредельной последовательности решений, чем слабый предел; а именно - она говорит о том, как именно "осциллирует" последовательность, а не только каково среднее значение, вокруг которого она "осциллирует".

Другой важной особенностью "усредненной" модели для упомянутой выше среды

"упругий каркас - сжимаемая жидкость" является то обстоятельство, что она не описывается системой дифференциальных уравнений. Искомой "усредненной" модели соответствует интегро-дифференциальная система уравнений, содержащая слагаемые вида свертки неизвестной функции с экспоненциально затухающим ядром свертки, зависящим только от временной переменной. Другой способ описания "усредненной" модели, с успехом примененный в [2], состоит в выводе системы уравнений для двухмасштабного предела исходной последовательности решений, то есть некоторой системы уравнений на функции от "удвоенного" количества независимых переменных. Этот способ получил широкое распространение в последнее время. Однако в ряде случаев представляется более целесообразным в прикладных целях выразить усредненную модель через интегро-дифференциальную систему уравнений для функций от исходного (а не "удвоенного") числа независимых переменных. Кроме того, также представляется целесообразным сформулировать теорему о сходимости решений без использования понятия двухмасштабной сходимости, пользуясь только классическими терминами. При этом, в случае отсутствия сильной сходимости утверждение о сходимости должно быть сформулировано не в терминах слабой сходимости и не в терминах двухмасштабной сходимости, а как утверждение о стремлении к нулю нормы $\|u_\varepsilon(x, t) - u(x, x/\varepsilon, t)\|_{L_2(\Omega)}$, где $u_\varepsilon(x, t)$ - последовательность решений допредельных задач для исходной двухфазной среды, ε - величина периода, $u(x, y, t)$ - функция, которую можно представить явно из решения некоторых вспомогательных краевых задач на ячейке периодичности и через решение интегро-дифференциальной системы для "усредненной" модели, Ω - область, занятая двухфазной средой.

Упомянутые особенности задач для "комбинированных сред" характерны не только для сред, составленных из фаз с существенно различными механическими свойствами, с различной "реологией". Они также имеют место и для сред, составленных из однотипных по "реологическим" свойствам материалов, но с механическими параметрами, существенно различными по величине. Так, ранее была детально исследована так называемая задача о "двойной пористости". Рассматривается задача о распространении (диффузии) жидкости в материале, составленном из двух фаз: хорошо проводящей жидкости и плохо проводящей жидкости. При этом предполагается, что коэффициенты проводимости соотносятся как 1 и ε^2 , где ε - размер периода структуры. В этой задаче также налицо упомянутые выше особенности усредненной модели и утверждений о сходимости последовательности решений исходных задач к решению усредненной задачи. Интересный пример представляет задача о распространении звуковых волн в суспензии (микстуре) из двух сжимаемых слабовязких жидкостей, когда при стремлении ε (периода структуры) к нулю, вязкость обеих жидкостей "вырождается" как ε^2 . В этом случае (см [3]) усредненная модель описывается так называемым "динамическим законом Дарси". Это - система уравнений, которую можно свести к волновому уравнению на усредненное давление с интегро-дифференциальным слагаемым типа свертки по временной переменной вторых производных функции давления с некоторым ядром, представляющим собой сумму экспонент. В [3] изучена сходимость решений исходной системы к решению усредненной системы и даны соответствующие теоремы о сходимости в терминах слабой сходимости. (Сильной сходимости смещений жидкостей и их скоростей тут не будет ни в одной из фаз; давление же будет сходиться сильно на обеих фазах, то есть в совокупной области).

Целью настоящей работы является исследование спектров предельных ("усреднен-

ных") моделей для упомянутых выше случаев. В работе [2] показано, что спектр предельной задачи для проблемы двойной пористости, о которой мы упомянули выше, представляет собой счетное число "серий", сходящихся к концам интервалов на вещественной оси, в которых точек спектра точно не может быть; они называются "лакунами". При этом, как границы лакун, так и точки спектра из различных серий являются нулями или полюсами некоторых мероморфных функций, которые могут быть представлены "явно". Естественно, в таком случае возникают вопросы: 1) сохранится ли подобная картина для "динамического закона Дарси" и "закона Био" (то есть закона, описывающего распространение звуковых волн в среде "упругий каркас - вязкая жидкость"); 2) какое отношение имеет спектр предельной задачи к спектрам допредельных задач, то есть сходятся ли спектры допредельных задач как множества (например, в смысле сходимости множеств по Хаусдорфу) к спектру предельной задачи.

Чтобы исследовать первый из поставленных вопросов, сделаем существенное упрощение в рассматриваемых нами задачах, а именно - будем изучать спектр только одномерных движений, то есть спектр "стоячих волн" в нашей "усредненной" среде, бегущих от одного края "стенки" к другому в перпендикулярном "стенке" направлении со скоростями и смещениями тоже только в перпендикулярном "стенке" направлении. В настоящей работе будет показано, что спектр таких "стоячих волн" для сред, описываемых "динамическим законом Дарси" и "законом Био", будет, вообще говоря, комплексным. На вещественной оси также появятся "лакуны" и серии вещественных точек спектра будут сходить к краям лакун. Однако в этих случаях, в отличие от задачи о "двойной пористости", появятся две комплексные серии точек спектра, уходящие на бесконечность, но так, что вещественные части имеют конечный предел. Здесь, как и для случая "двойной пористости", все точки спектра и края "лакун" могут быть определены как нули и полюса некоторых мероморфных функций, которые могут быть найдены в явном виде. Второй из поставленных выше вопросов о спектре в настоящей работе не рассматривается. Следует отметить, что для случая "двойной пористости" этот вопрос частично решен в [2]. Там доказано, что если области с проводимостью ε^2 в периодической структуре не связаны между собой ("дисперсные включения"), то допредельные спектры сходятся к предельному в смысле сходимости множеств по Хаусдорфу. Для недисперсных включений вопрос до сих пор остается открытым.

Отметим еще, что аналогичные "лакуны" на вещественной оси появляются в задаче о спектре оператора Шредингера в периодической среде. Доказано, что при увеличении контрастности фаз среды, зонный спектр оператора Шредингера стремится по Хаусдорфу к спектру из счетного числа интервалов, разделенных "лакунами", края которых задаются с выражениями, совпадающими с полученными в [2]. Так, на основании описанного выше спектрального анализа можно установить общие черты задач, имеющих столь разную физическую и механическую природу.

Следует также отметить, что большое количество работ посвящено построению приближенных формул для "эффективных" или "усредненных" характеристик материалов вида "упругий каркас-сжимаемая жидкость" или суспензия из двух жидкостей, в которых указанные характеристики выражены через простые геометрические параметры ячейки периодичности рассматриваемой среды (см. [4]). Укажем на работу [5], в которой основные характеристики распространяющейся в среде плоской волны такие, как скорость распространения, декремент затухания и т.д. выражены приближенно через коэффициент пористости среды, так называемый "просвет" и, естественно, через

характеристики исходных материалов: плотность, вязкость жидкости, модуль Юнга. Под "просветом" в заданном направлении распространения понимается доля освещенной площади на плоскости, ортогональной направлению распространения, если пучок света направлен по направлению распространения волны. Кроме того, в [6] приведены экспериментальные данные и описана технология проведения эксперимента по измерению характеристик собственных колебаний образцов из пористого материала, насыщенного вязкой жидкостью. Далее в настоящей работе будут приведены точные формулы для собственных частот и декрементов одномерных колебаний в упругих средах. Тем самым, вполне реальным становится исследование задачи о сравнении результатов расчета собственных колебаний и декрементов затухания с экспериментальными данными.

Перейдем к анализу спектральных свойств упомянутых выше задач.

1. Проблема "двойной пористости".

Пусть B – периодическое с периодом 1 открытое множество в R^d с гладкой границей, Ω – ограниченная область в R^d так же с гладкой границей. Положим $\Omega_s^\varepsilon = \Omega \cap \varepsilon B$, $\Omega_h^\varepsilon = \Omega \setminus \varepsilon B$. Введем также обозначение $Q = [0, 1] \times \dots \times [0, 1]$ (d раз) – единичный куб в R^d .

В случае распространения жидкости в среде, состоящей из двух материалов разной проводимости, (см [2]) проблема построения "усредненной" модели сводится к исследованию асимптотического поведения при $\varepsilon \rightarrow 0$ задачи:

$$\begin{cases} \dot{u}_\varepsilon = \operatorname{div}(a_\varepsilon(x)\nabla u_\varepsilon) & \text{в } \Omega, \\ u_\varepsilon|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_\varepsilon|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где

$$a_\varepsilon = \begin{cases} 1, & x \in \Omega_h^\varepsilon, \\ \varepsilon^2, & x \in \Omega_s^\varepsilon, \end{cases}$$

точка означает производную по переменной t , $\varphi(x) \in C_0^\infty(R^d)$.

Для построения асимптотик введем следующие вспомогательные задачи или "задачи на ячейке периодичности". Решения всех этих задач должны быть 1-периодическими функциями по переменным y_1, \dots, y_d . Рассмотрим спектральную задачу Дирихле:

$$\begin{cases} \Delta\psi_k = -\lambda_k\psi_k \text{ в } B, & \psi_k|_{\partial B} = 0, \\ \|\psi_k\|_{L_2(B \cap Q)} = 1, & k = 1, 2, \dots \end{cases}$$

где $\psi_k(y)$ - периодические функции, $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots$. Кроме того, определим также функции $N^i(y)$ как 1-периодические решения неоднородных задач Неймана (здесь $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_d)$ – внешняя нормаль к ∂B – границе B):

$$\begin{cases} \Delta N^i(y) = 0 & \text{в } Q \setminus B, \\ \frac{\partial N^i}{\partial \nu} = \nu_i, & \text{на } \partial B. \end{cases}$$

Определим также матрицу с постоянными коэффициентами

$$a_{ij} = \left\langle \delta_{ij} + \frac{\partial N^i}{\partial y_j}(y) \right\rangle_{Q \setminus B}$$

и функции

$$d(y, t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \psi_k(y) e^{-\lambda_k t}; \quad D(t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \langle \psi_k(y) \rangle_{B \cap Q} e^{-\lambda_k t}; \quad c_k = \langle \psi_k(y) \rangle_B,$$

где δ_{ij} – символ Кронекера. Здесь мы используем обозначение $\langle f \rangle_\Omega = \int_\Omega f dy$. Нетрудно видеть, что функция $d(y, t)$ является решением следующей краевой задачи в классе 1-периодических по y функций:

$$\begin{cases} \dot{d}(y, t) = \Delta d(y, t), & t \in (0, +\infty), \\ d|_{\partial B} = 0, \quad d|_{t=0} = 1, & y \in B. \end{cases}$$

Тогда усредненная модель, как установлено, например, в [2], примет вид:

$$\begin{cases} \dot{u} = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + D(t) * u & \text{в } \Omega, \\ u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Здесь $(f * g)(t) \equiv \int_0^t f(t - \tau)g(\tau)d\tau$ – обозначение для свертки функций f и g , $D(t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 e^{-\lambda_k t}$. В работе [2] показано, что имеют место сходимости:

$$\|u_\varepsilon(x, t) - u(x, t)\|_{L_2(\Omega_\varepsilon)} \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

и

$$\|u_\varepsilon(x, t) - w(x, x/\varepsilon, t)\|_{L_2(\Omega_\varepsilon)} \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

где $w(x, y, t) = d(y, t) * [\dot{u}(x, t) + f(x, t)]$.

Предположим теперь, что решение $u(x, t)$ задачи (2) зависит только от одной пространственной переменной x_1 , а также $a_{11} = 1$ и $\Omega = [0, 1]$. Кроме того, здесь и далее мы будем предполагать, что ряд для определения функции $D(t)$ состоит из конечного числа экспонент. Это предположение упрощает исследование спектральных свойств рассматриваемых задач. При этом введенное упрощение довольно естественно: при численном анализе решений мы можем иметь дело только с рядами, содержащими конечное число членов.

Тогда задача (2) примет вид

$$\dot{u} = u'' + D(t) * u, \quad u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad \forall t > 0; \quad D(t) = \sum_{i=1}^n M_i e^{m_i t}, \quad m_i = -\lambda_i, \quad M_i = c_k^2. \quad (3)$$

Сделаем в (3) преобразование Лапласа по переменной t . Получим

$$\hat{u}(x, \lambda) \cdot \lambda = \hat{u}''(x, \lambda) + \hat{D}(\lambda) \cdot \hat{u}(x, \lambda) + \varphi(x) \quad \text{в } \Omega, \quad (4)$$

$\hat{u}(0, \lambda) = \hat{u}(1, \lambda) = 0$, где $\hat{u}(x, \lambda)$ и $\hat{D}(\lambda)$ – преобразования Лапласа функций u и D соответственно.

Для изучения спектральных свойств задачи (4) положим $\varphi \equiv 0$ и исследуем спектр σ_1 задачи (4), то есть множество таких $\lambda \in C$, что задача (4) при $\varphi \equiv 0$ имеет отличные от нуля решения. Будем искать функцию $u(x, \lambda)$ в виде ряда

$$u(x, \lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(\lambda) \sin \pi k x \quad (5)$$

Подставим это разложение в (4) при $\varphi \equiv 0$. Так как система функций $\{\sin \pi k x\}$ полна в $L^2[0, 1]$, приравнявая множители при каждом $k = 1, 2, \dots$, получим

$$\lambda \hat{u}_k = -\pi^2 k^2 \hat{u}_k + \hat{D}(\lambda) \cdot \hat{u}_k, \quad k = 1, 2, \dots \quad (6)$$

Очевидно, что спектр σ_1 задачи (4) совпадает с объединением по k решений уравнения (см. фиг. 1):

$$\hat{D}(\lambda) = \lambda + \pi^2 k^2, \quad k = 1, 2, \dots$$

(Через N_i обозначены нули функции $\hat{D}(\lambda)$).

Справедливы следующие утверждения о структуре спектра σ_1 задачи (4) (см. фиг. 2).

ТЕОРЕМА 1.1. *Спектр σ_1 предельного оператора состоит из чисел m_i , $i = 1, 2, \dots$, а также бесконечных серий конечнократных собственных значений, сходящихся справа к точкам m_i .*

ТЕОРЕМА 1.2. *Множество $\Lambda_1 = \{\lambda \in R : \hat{D}(\lambda) < 0\}$ не содержит точек спектра σ_1 . Оно представляет собой объединение некоторого числа интервалов ("лакун"); левым концом каждого из этих интервалов будет соответствующая точка m_i , а правым - нуль функции $\hat{D}(\lambda) = \sum_{i=1}^n \frac{M_i}{\lambda - m_i}$ (см. фиг. 3).*

2. Проблема колебаний суспензии из двух жидкостей в ограниченном сосуде.

Следующая краевая задача моделирует малые колебания смеси (суспензии) из двух жидкостей с плотностями ρ_1, ρ_2 , коэффициентами сжимаемости γ_1, γ_2 и коэффициентами, определяющими вязкость ν_1, ν_2 соответственно. Она имеет вид

$$\begin{cases} \rho^\varepsilon \ddot{u}_i^\varepsilon = -\frac{\partial p^\varepsilon}{\partial x_i} + \varepsilon^2 \nu^\varepsilon(x) \Delta u_i^\varepsilon + f_i(x, t), & (i = 1, 2, 3) \quad \text{в } \Omega, \quad \vec{u}^\varepsilon = (u_1^\varepsilon, u_2^\varepsilon, u_3^\varepsilon) \\ p^\varepsilon(x, t) = -\gamma^\varepsilon \operatorname{div} \vec{u}^\varepsilon, \quad \vec{u}^\varepsilon|_{\partial\Omega} = 0, \quad \vec{u}^\varepsilon|_{t=0} = \dot{\vec{u}}|_{t=0} = 0, \end{cases} \quad (7)$$

$$\rho^\varepsilon(x) = \begin{cases} \rho_1, & x/\varepsilon \in B, \\ \rho_2, & x/\varepsilon \in Q \setminus B, \end{cases} \quad \gamma^\varepsilon(x) = \begin{cases} \gamma_1, & x/\varepsilon \in B, \\ \gamma_2, & x/\varepsilon \in Q \setminus B, \end{cases} \quad \nu^\varepsilon(x) = \begin{cases} \nu_1, & x/\varepsilon \in B, \\ \nu_2, & x/\varepsilon \in Q \setminus B. \end{cases}$$

Далее везде в этом разделе в этом разделе предполагается, что на границе контакта двух жидкостей выполнены естественные условия непрерывности смещений и поверхностных напряжений. Вспомогательные задачи на ячейке периодичности для построения усредненной системы имеют вид (см [3])

$$\begin{cases} \rho(y) \dot{\vec{d}}_i - \nu(y) \Delta_y \vec{d}_i + \vec{\nabla} q = 0, & y \in Q \\ \operatorname{div}_y \vec{d}_i = 0, \quad \vec{d}_i|_{t=0} = \frac{\vec{e}_i}{\rho(y)}, & y \in Q, \end{cases}$$

вектор-функция $\vec{d}_i(y)$, $i = 1, 2, 3$ - 1-периодична, \vec{e}_i - единичный орт в направлении оси Ox_i . Тогда имеет место представление

$$\vec{d}_i(y, t) = \sum_{k=1}^n c_k^i \vec{\psi}_k(y) e^{-\lambda_k t}, \quad c_k^i = \left\langle \left(\frac{\vec{e}_i}{\rho(y)}, \vec{\psi}_k(y) \right) \right\rangle_Q,$$

где $\{\vec{\psi}_k(y)\}$ и $\{\lambda_k\}$ – собственные функции и собственные значения спектральной задачи типа Стокса, состоящей в определении чисел $\{\lambda_k\}$ и вектор-функций $\{\vec{\psi}_k\}$ таких, что задача

$$\begin{cases} \rho(y)\lambda_k\vec{\psi}_k(y) - \nu(y)\Delta_{yy}\vec{\psi}_k(y) + \nabla q = 0, & y \in Q, \\ \operatorname{div}_y\vec{\psi}_k(y) = 0, & \vec{\psi}_k(y) \text{ 1-периодична.} \end{cases}$$

имеет отличные от тождественных решения. Теперь положим $D_{ij}(t) = \left[\langle \vec{d}_i(y, t) \rangle_Q \right]_j$ и обозначим через $\mathcal{D}(t)$ – матрицу из элементов $D_{ij}(t)$, а через $\mathcal{D}(y, t)$ – матрицу с элементами $(\mathcal{D}(y, t))_{ij} = \left[\vec{d}_i(y, t) \right]_j$

В [3] асимптотическими методами найдена усредненная система

$$\begin{cases} \langle \gamma^{-1}(y) \rangle_Q \dot{p} + \operatorname{div}_x \left[\mathcal{D}(t) * (\vec{f}(x, t) - \nabla p) \right] = 0 & \text{в } \Omega, \\ (\mathcal{D}(t) * \nabla p, \vec{v}) = (\mathcal{D}(t) * \vec{f}, \vec{v}) & \text{на } \partial\Omega, \end{cases} \quad (8)$$

и изучен вопрос о сходимости решений задачи (7) к решению задачи (8). Более детальный анализ проведен автором настоящей работы совместно с А. С. Шамаевым, однако, эти результаты находятся в стадии оформления. Так, имеют место сходимости:

$$\|u_\varepsilon(x, t) - u^0(x, x/\varepsilon, t)\|_{L_2(\Omega)} \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

$$\|\varepsilon \nabla_x u_\varepsilon(x, t) - \nabla_y u^0(x, x/\varepsilon, t)\|_{L_2(\Omega)} \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0$$

$$\|p_\varepsilon - p\|_{L_2(\Omega)} \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

где $u^0(x, y, t) \equiv \left(\int_0^t \mathcal{D}(\tau, y) d\tau \right) * (\vec{f}(x, t) - \nabla p)$.

Возьмем предельную задачу (8) и упростим ее, как было сделано ранее при анализе решения задачи о двойной пористости, сокращая количество пространственных переменных до одной. Полученную задачу можно записать в виде:

$$\dot{p} = D * p''; \quad p'(0, t) = p'(1, t) = 0; \quad D(t) = \sum_{i=1}^n M_i e^{m_i t},$$

где $m_i = -\lambda_i$, а $M_i = \left\langle \frac{1}{\gamma(y)} \right\rangle^{-1} \left\langle \frac{\psi_i^{(1)}}{\rho(y)} \right\rangle_Q \left\langle \psi_i^{(1)} \right\rangle_Q$, $\psi_i^{(k)}$ – k -тая компонента вектора $\vec{\psi}_i$.

Заметим, что $M_i \geq 0$ ($i = 1, 2, \dots$). В самом деле,

$$\begin{aligned} M_i &= \left\langle \frac{\psi_i^{(1)}}{\rho(y)} \right\rangle_Q \left\langle \psi_i^{(1)} \right\rangle_Q = \left(\frac{1}{\rho_1} \left\langle \psi_i^{(1)} \right\rangle_{Q \cap B} + \frac{1}{\rho_2} \left\langle \psi_i^{(1)} \right\rangle_{Q \setminus B} \right) \left(\left\langle \psi_i^{(1)} \right\rangle_{Q \cap B} + \left\langle \psi_i^{(1)} \right\rangle_{Q \setminus B} \right) = \\ &= \frac{1}{\rho_1} \left\langle \psi_i^{(1)} \right\rangle_{Q \cap B}^2 + \frac{1}{\rho_2} \left\langle \psi_i^{(1)} \right\rangle_{Q \setminus B}^2 + \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right) \left\langle \psi_i^{(1)} \right\rangle_{Q \cap B} \left\langle \psi_i^{(1)} \right\rangle_{Q \setminus B} \geq \\ &\geq \frac{1}{2\rho_1} \left\langle \psi_i^{(1)} \right\rangle_{Q \cap B}^2 + \frac{1}{2\rho_2} \left\langle \psi_i^{(1)} \right\rangle_{Q \setminus B}^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Прделаем те же действия, что при исследовании задачи (4). После применения преобразования Лапласа, принимая снова λ за спектральный параметр, приходим к уравнению:

$$\hat{D}(\lambda) = -\frac{1}{\pi^2 k^2} \lambda, \quad k = 1, 2, \dots \quad (9)$$

(см. фиг. 4). Здесь, в отличие от случая задачи двойной пористости, появляется мнимая часть точек спектра σ_2 предельного оператора. При $k \rightarrow \infty$ действительные части двух сопряженных собственных значений стремятся к конечному пределу, а мнимые стремятся к бесконечности. Предельными точками серий являются нули функции $\hat{D}(\lambda)$.

Следующие два утверждения о структуре спектра σ_2 – результат простого анализ решений уравнения (9) (см. фиг. 5):

ТЕОРЕМА 2.1. *Спектр σ_2 задачи (9) состоит из бесконечных серий конечнократных собственных значений, стремящихся слева к вещественным нулям функции $\hat{D}(\lambda) = \sum_{i=1}^n \frac{M_i}{\lambda - m_i}$, а также двух серий сопряженных собственных значений, модули которых стремятся к бесконечности, а действительные части стремятся к величине $x_0 = \frac{\sum M_i m_i}{2 \sum M_i} \leq 0$.*

ТЕОРЕМА 2.2. *Множество $\Lambda_2 = \{\lambda \in R : \hat{D}(\lambda) < 0\}$ не содержит точек спектра σ_2 . Оно представляет собой бесконечное число интервалов ("лакун"). Левым концом каждого из этих интервалов будет соответствующий нуль функции $\hat{D}(\lambda)$, а правым – точка m_i (см. фиг. 6).*

ЗАМЕЧАНИЕ. Пусть $\rho_1 = \rho_2 = \rho$. Тогда

$$M_1 = \frac{1}{\rho \langle \gamma^{-1} \rangle_Q}; \quad M_k = 0 \text{ при } k > 1; \quad m_1 = 0,$$

и уравнение (9) примет вид

$$\frac{1}{\lambda \rho \langle \gamma^{-1} \rangle_Q} = -\frac{\lambda}{\pi^2 k^2},$$

откуда

$$\lambda = \pm i \frac{\pi k}{\sqrt{\rho \langle \gamma^{-1} \rangle_Q}}$$

– собственные частоты колебаний струны.

Этот пример говорит о том, что при одинаковой плотности двух жидкостей, входящих в состав смеси, исчезают эффекты "последствия" и диссипации энергии.

3. Малые колебания комбинированной среды, состоящей из вязкой сжимаемой жидкости и упругого каркаса (Закон Био).

Задача о распространении акустических волн в среде, состоящей из двух фаз — упругого материала и вязкой жидкости — рассматривалась в течение последних 50–60 лет многими авторами.

Так, в работе Я. Френкеля, опубликованной в Физическом журнале АН СССР в 1944 году, выведены формулы для средних величин тензора напряжений и давления

в грунте (поруде), который можно представить как упругий каркас с трещинами, заполненными вязкой жидкостью. При этом предполагается, что характерные размеры микронеоднородностей среды малы по сравнению с единицей измерения длины, от которой зависят средние значения компонент тензора напряжений τ_{ij} и давление p .

Указанные формулы имеют вид:

$$\tau_{ij} = 2\mu e_{ij} + \delta_{ij}(\lambda \operatorname{div} u + \alpha M \operatorname{div} w), \quad (10)$$

$$p = -\alpha M \operatorname{div} u - M \operatorname{div} w, \quad (11)$$

где μ, λ, α, M — некоторые постоянные, зависящие от свойств упругого материала и жидкости, $\vec{u} \equiv (u_1, u_2, u_3)$ — вектор-функция, задающая среднее смещение упругого материала ("каркаса" или "скелета"), $\vec{w} \equiv (w_1, w_2, w_3)$ — среднее смещение жидкости по отношению к "каркасу" или "скелету".

В работе [7] с использованием уравнений (10), (11) строится модель распространения акустических волн в комбинированных средах "жидкость — упругий материал". В дальнейшем приводимый нами ниже закон распространения волн в ряде работ используется под названием "закона Био".

Система уравнений из работы [7] имеет вид:

$$\tilde{\rho} \ddot{\vec{u}} + \rho \ddot{\vec{w}} \mu \Delta \vec{u} + \nabla [(\mu + \lambda_c) \operatorname{div} u + \alpha M \operatorname{div} w] + f(x, t) = 0, \quad (12)$$

$$\vec{\nabla} p - \vec{f} - \rho \ddot{\vec{u}} = \mathbf{A} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \dot{\vec{w}}, \quad (13)$$

$$p = -\alpha M \operatorname{div} u - M \operatorname{div} w, \quad (14)$$

где $\tilde{\rho}$ — средняя плотность комбинированной среды "упругость — жидкость", ρ — плотность жидкости, $\mu, \lambda_c, \alpha, M$ — некоторые константы, определяющие упругие свойства вещества и сжимаемость жидкости, $\mathbf{A} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)$ — матричный оператор, каждый элемент которого (а их $3 \times 3 = 9$) представляет собой некоторую функцию от дифференциального оператора $\frac{\partial}{\partial t}$. Конкретный вид этой функции строится автором из эвристических соображений, в зависимости от свойств жидкости и геометрических свойств каналов, заполненных жидкостью.

В книге [3] та же задача исследуется асимптотическими методами. Автор предполагает, что комбинированная среда "жидкость — упругий материал" имеет периодическую структуру, причем период представляет собой малую величину, равную ε . Будем предполагать, что упругий материал ("каркас") и область, занятая жидкостью, являются связными множествами. Приводимую ниже систему дифференциальных уравнений авторы выводят с помощью предельного перехода при $\varepsilon \rightarrow 0$. Она имеет вид:

$$\tilde{\rho} \ddot{u}_i + \rho \ddot{w}_i = \frac{\partial}{\partial x_j} (q_{ijkn} e_{kn}(u) - \alpha_{ij} p) + f_i \quad (i = 1, 2, 3), \quad (15)$$

$$\dot{w}_k = \int_{-\infty}^t g_{ki}(t-s) \left(f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} - \rho \ddot{u}_i \right) ds, \quad (16)$$

$$\left(\frac{\Pi}{\gamma} + \beta\right) p + \operatorname{div} w + \alpha_{ij} e_{ij}(u) = 0, \quad (17)$$

где Π, γ, β — коэффициенты пористости упругой среды, сжимаемости жидкости и сжимаемости упругого материала, $\alpha_{ij} = \delta_{ij}|Q \cap B| - \beta_{ij}$, δ_{ij} — символ Кронекера, $|Q \cap B|$ — объем жидкости в одной ("стандартной") ячейке периодичности Q со стороной 1, β_{ij} — некоторые числа, характеризующие сжимаемость упругого материала при нагружениях периодической ячейки определенным набором силовых полей, приложенных к границе, q_{ijkn} — так называемый "эфффективный" или "усредненный" тензор для пористой упругой среды в отсутствие жидкости, $g_{ki}(s)$ — элементы матричного (размером 3×3) интегрального оператора типа свертки, которые определяются через решение некоторых вспомогательных задач типа динамической задачи Стокса на ячейке периодичности $Q \cap B$, которые мы приведем ниже.

Рассуждения автора приводят к усредненной системе (15)–(17), однако не являются вполне строгими.

В работе [1] приводится вполне строгое доказательство предельного перехода от системы уравнений для двух фаз к упомянутой усредненной системе. В этой работе автор рассматривает случай сжимаемой жидкости. Для проведения строгого доказательства справедливости предельного перехода автор вводит понятие "двухмасштабной сходимости", обобщающей понятие слабой сходимости, и доказывает свойства этой сходимости.

Аналогичному вопросу посвящена статья [8], где с помощью метода т. н. "двухмасштабной" сходимости выводится указанная система для случая несжимаемой жидкости.

Исходная система, описывающая малые колебания системы "упругий каркас – сжимаемая жидкость", имеет следующий вид (см [3]):

$$\begin{cases} \rho^h \ddot{u}_\varepsilon^i - \frac{\partial}{\partial x_j} (a_{ijkh} e_{kh}(\vec{u}_\varepsilon)) = f^i(x, t), & x \in \Omega_\varepsilon^h \\ \rho^s \ddot{u}_\varepsilon^i - \eta \varepsilon^2 \Delta \dot{u}_\varepsilon^i + \frac{\partial p_\varepsilon}{\partial x_i}(x) - 2\mu \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial x_j} (e_{kh}(\vec{u}_\varepsilon)) = f^i(x, t), & x \in \Omega_\varepsilon^s, \\ p^\varepsilon(x, t) = -\gamma \operatorname{div} \vec{u}_\varepsilon, [\vec{u}_\varepsilon]_{S_\varepsilon} = 0, [\sigma_{ij}(\vec{u}_\varepsilon) \nu_j]_{S_\varepsilon} = 0, & S_\varepsilon = Q \cap \varepsilon \partial B, \\ \vec{u}_\varepsilon(x, 0) = \dot{\vec{u}}_\varepsilon(x, 0) = 0, \vec{u}_\varepsilon|_{\partial \Omega} = 0, \end{cases} \quad (18)$$

здесь вектор-функция \vec{u}_ε представляет собой вектор смещения упругой компоненты в упругой фазе и жидкости в жидкой фазе, $e_{ij}(u) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$, $p^\varepsilon(x, t)$ — давление в жидкой фазе, $[f]_S$ — скачок функции f при переходе через поверхность S ,

$$\sigma_{ij} = \begin{cases} -\delta_{ij} p + (\eta \delta_{ij} \delta_{kh} + 2\mu \delta_{ik} \delta_{jh}) e_{kh} \left(\dot{\vec{u}}_\varepsilon \right) & \text{в } \Omega_s^\varepsilon, \\ a_{ijkh} e_{kh} & \text{в } \Omega_h^\varepsilon. \end{cases}$$

Определим вспомогательные задачи на ячейке периодичности, необходимые для построения усредненной системы, [1] ($i = 1, 2, 3$):

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \Psi^i(y) + \lambda \rho^s \vec{d}_i(y) - \mu \Delta_{yy} \vec{d}_i(y) = 0, & y \in B, \\ \operatorname{div} \vec{d}_i = 0, & y \in B, \\ \vec{d}_i|_{\partial B} = 0, \vec{d}_i|_{t=0} = \vec{e}_i. \end{cases} \quad (19)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial y_j} \left(a_{ijkh} e_{kh} \left(\vec{Q}^{pq} \right) \right) = 0, & y \in Q, \\ a_{ijkh} e_{kh} \left(\vec{Q}^{pq} \right) \nu_j = -a_{ipqk} \nu_k, & y \in \partial B, \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial y_j} \left(a_{ijkh} e_{kh} \left(\vec{Q} \right) \right) = 0, & y \in Q \setminus B, \\ a_{ijkh} e_{kh} \left(\vec{Q} \right) \nu_j = \nu_i, & y \in \partial B, \end{cases}$$

и положим

$$q_{ijkh} = \left\langle a_{ijkh} + a_{ijlm} e_{lm} \left(\vec{Q}^{kh} \right) \right\rangle_{Q \setminus B},$$

$$\beta_{pq} = \left\langle \operatorname{div}_y \vec{Q}^{pq} \right\rangle_{Q \setminus B}, \quad \beta = \left\langle \operatorname{div}_y \vec{Q} \right\rangle_{Q \setminus B}, \quad \alpha_{ij} = \delta_{ij} |B| - \beta_{ij}, \quad \gamma = c_0^2 \rho_s,$$

где c_0 - скорость звука в жидкости, $\mathcal{D}(t)$, $\mathcal{D}(y, t)$ - матричные (3×3) функции, коэффициенты которых - гладкие функции переменных y , t и t соответственно:

$$\left(\mathcal{D}(y, t) \right)_{ij} = \left(\vec{d}_i(y, t) \right)_j; \quad \left(\mathcal{D}(t) \right)_{ij} = \int_Q \left(\vec{d}_i(y, t) \right)_j dy$$

а \vec{d}_i , $(i = 1, 2, 3)$ определяются из задачи (19).

Теперь коэффициенты системы (15)–(17) полностью определены. Исключая из этой системы относительное смещение жидкости \vec{w} , получим следующую задачу:

Найти такие функции $\vec{u}(x, t) = (u_1, u_2, u_3)$ и $p(x, t)$, что

$$\begin{aligned} \tilde{\rho} \ddot{u}^k + \rho^s \dot{D}_{ik}(t) * \left(f^i(x, t) - \rho^s \ddot{u}^i(x, t) - \frac{\partial p}{\partial x_i}(x, t) \right) + \\ + \rho^s D_{ik}(0) \left(f^i(x, t) - \rho^s \ddot{u}^i(x, t) - \frac{\partial p}{\partial x_i}(x, t) \right) = \\ = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(q_{ijkh} \frac{\partial u^i}{\partial x_h} - \alpha_{jk} p \right) + f^k(x, t), \end{aligned} \quad (20)$$

$$\left(\frac{\Pi}{\gamma} + \beta \right) p(x, t) + \operatorname{div}_x \left(\int_0^t \mathcal{D}(\tau) d\tau \right) * \left(\vec{f}(x, t) - \rho^s \ddot{\vec{u}}(x, t) - \vec{\nabla} p(x, t) \right) + \alpha_{ij} e_{ij}(u(x, t)) = 0 \quad (21)$$

$$\vec{u}(x, 0) = \dot{\vec{u}}(x, 0) = 0, \quad x \in \Omega; \quad \vec{u}|_{\partial\Omega} = 0. \quad (22)$$

Исследование асимптотического поведения при $\varepsilon \rightarrow 0$ задачи (18) (оно не входит в цели настоящей работы и сообщается здесь для полноты изложения. Указываемые ниже результаты о сходимости получены автором совместно с А. С. Шамаевым и сейчас находятся в стадии оформления) приводит к следующим утверждениям о сходимости решений \vec{u}_ε задачи (18) к решению задачи (20)–(22):

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \| p_\varepsilon(x, t) - p(x, t) \|_{L^2(\Omega_\varepsilon^s)} &= 0, \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \| \vec{u}_\varepsilon(x, t) - \vec{u}(x, t) \|_{L^2(\Omega_\varepsilon^h)} &= 0, \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \| \dot{\vec{u}}_\varepsilon(x, t) - \dot{\vec{u}}(x, t) \|_{L^2(\Omega_\varepsilon^h)} &= 0, \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \| \nabla_x \vec{u}_\varepsilon(x, t) - \nabla_x \vec{u}(x, t) - \nabla_y N^k \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_k} \|_{L^2(\Omega_\varepsilon^h)} &= 0, \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \| \nabla_x \dot{\vec{u}}_\varepsilon(x, t) - \nabla_x \dot{\vec{u}}(x, t) - \nabla_y N^k \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \frac{\partial \dot{\vec{u}}}{\partial x_k} \|_{L^2(\Omega_\varepsilon^h)} &= 0, \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \| \vec{u}_\varepsilon(x, t) - \vec{u}(x, t) - \vec{w} \left(x, \frac{x}{\varepsilon}, t \right) \|_{L^2(\Omega_\varepsilon^s)} &= 0, \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \| \nabla_x \vec{u}_\varepsilon(x, t) - \nabla_x \vec{u}(x, t) - \nabla_x \vec{w} \left(x, \frac{x}{\varepsilon}, t \right) \|_{L^2(\Omega_\varepsilon^s)} &= 0, \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \| \dot{\vec{u}}_\varepsilon(x, t) - \dot{\vec{u}}(x, t) - \dot{\vec{w}} \left(x, \frac{x}{\varepsilon}, t \right) \|_{L^2(\Omega_\varepsilon^s)} &= 0, \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \| \nabla_x \dot{\vec{u}}_\varepsilon(x, t) - \nabla_x \dot{\vec{u}}(x, t) - \nabla_x \dot{\vec{w}} \left(x, \frac{x}{\varepsilon}, t \right) \|_{L^2(\Omega_\varepsilon^s)} &= 0, \end{aligned}$$

где $(N^k(y))_{pq} = (\vec{Q}^{qk})_p$, $\vec{w}(x, y, t) = \int_0^t \mathcal{D}(\tau, y) d\tau * \left(\vec{f}(t, x) - \rho^s \ddot{u}(t, x) - \vec{\nabla} p(t, x) \right)$.

Задача (20)–(22) весьма удобна для изучения прикладных вопросов распространения акустических волн в комбинированной среде "упругий каркас–вязкая сжимаемая жидкость".

Сформулируем и докажем теперь теоремы, аналогичные теоремам 1.1 и 1.2, а также 2.1 и 2.2.

Здесь мы имеем дело уже не с одним уравнением, а с системой, что несколько усложняет исследование. Уменьшив, как и выше, при рассмотрении задач (1) и (9), количество пространственных переменных до одной, получим из (20)–(22) систему уравнений на функции $u(x, t)$, $p(x, t)$

$$\begin{cases} \tilde{\rho} \ddot{u} + \rho_s \dot{D}(t) * (f - p' - \rho_s \ddot{u}) + \rho_s D(0) (f - p' - \rho_s \ddot{u}) = Qu'' - Ap' + f, \\ Bp + d(t) * (f - p' - \rho_s \ddot{u})' + Au' = 0, \end{cases},$$

где

$$D(t) = (\mathcal{D}(t))_{11}; \quad d(t) = \int_{-\infty}^t D(\tau) d\tau \equiv \sum_{k=1}^n \frac{M_k}{m_k} e^{m_k t}; \quad M_k = \left\langle \vec{\Psi}_k^{(1)} \right\rangle_{Q \cap V}^2, \quad m_k = -\lambda_k,$$

с начальными условиями $u(x, 0) = \dot{u}(x, 0) = 0$, $x \in [0, 1]$ и с краевыми условиями $u(0, t) = \dot{u}(0, t) = u(1, t) = \dot{u}(1, t) = p'(0, t) = p'(1, t) = 0$, $t \in (0, +\infty)$.

Для исследования спектральных свойств этой задачи положим $f = 0$. Краевые условия Дирихле на функцию u непосредственно вытекают из условий (22). Условие Неймана на функцию p можно получить из уравнения (16) и условий $u|_{\partial\Omega} = 0$, $\sum_{k=1}^3 \dot{w}_k \cdot \nu_k|_{\partial\Omega} = 0$ (из которых второе – условие "непротекания" жидкости через границу $\partial\Omega$).

Введем обозначение $-p'(x, t) - \rho_s \ddot{u}(x, t) = z(x, t)$. Тогда $z(0, t) = z(1, t) = 0$, $t \in (0, +\infty)$. Продифференцируем второе уравнение по x . Получим

$$Bp' + d(t) * z'' + Au'' = 0.$$

Используя равенство $p' = -z - \rho_s \ddot{u}$, получим

$$-Bz - B\rho_s \ddot{u} + d(t) * z'' + Au'' = 0,$$

тогда система уравнений для функций $u(x, t)$, $z(x, t)$ примет вид

$$\begin{cases} \tilde{\rho} \ddot{u} + \rho_s \dot{D}(t) * z + \rho_s D(0) z = Qu'' + Az + A\rho_s \ddot{u}, \\ -Bz - B\rho_s \ddot{u} + d(t) * z'' + Au'' = 0. \end{cases} \quad (23)$$

Так как краевые условия для функций $u(x, t)$, $z(x, t)$ нулевые, будем искать представления для функций $u(x, t)$, $z(x, t)$, разлагая их в ряд по $\{\sin \pi k x\}$ (полной системе функций в $L^2[0, 1]$):

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) \sin \pi k x,$$

$$z(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} z_k(t) \sin \pi k x.$$

Подставим эти разложения в (23), получим (подразумевая суммирование по k , будем опускать знаки суммирования):

$$\begin{cases} \tilde{\rho} \ddot{u}_k \sin \pi k x + \rho_s \dot{D}(t) * z_k \sin \pi k x + \rho_s D(0) z_k \sin \pi k x = \\ \quad = -\pi^2 k^2 Q u_k \sin \pi k x + A z_k \sin \pi k x + A \rho_s \ddot{u}_k \sin \pi k x, \\ -B z_k \sin \pi k x - B \rho_s \ddot{u}_k \sin \pi k x - \pi^2 k^2 d(t) * z_k \sin \pi k x - A \pi^2 k^2 u_k \sin \pi k x = 0. \end{cases} \quad (24)$$

Приравняем множители при каждом k :

$$\begin{cases} \tilde{\rho} \ddot{u}_k - A \rho_s \ddot{u}_k + \pi^2 k^2 Q u_k = -\rho_s \dot{D}(t) * z_k - \rho_s D(0) z_k + A z_k, \\ -B \rho_s \ddot{u}_k - A \pi^2 k^2 u_k = \pi^2 k^2 d(t) * z_k + B z_k. \end{cases} \quad (25)$$

Сделаем преобразование Лапласа системы (25). Тогда

$$\begin{cases} \lambda^2 (\tilde{\rho} - A \rho_s) \hat{u}_k + \pi^2 k^2 Q \hat{u}_k = -\rho_s \hat{D}(\lambda) \hat{z}_k + A \hat{z}_k, \\ -B \lambda^2 \rho_s \hat{u}_k - A \pi^2 k^2 \hat{u}_k = \pi^2 k^2 \hat{d}(\lambda) \hat{z}_k + B \hat{z}_k, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} (\lambda^2 (\tilde{\rho} - A \rho_s) + \pi^2 k^2 Q) \hat{u}_k = -(\lambda \rho_s \hat{D}(\lambda) - A) \hat{z}_k, \\ (B \lambda^2 \rho_s + A \pi^2 k^2) \hat{u}_k = -(\pi^2 k^2 \hat{d}(\lambda) + B) \hat{z}_k. \end{cases} \quad (26)$$

Будем рассматривать λ в качестве спектрального параметра. Тогда (26) имеет нетривиальное решение при условии

$$(\lambda^2 (\tilde{\rho} - A \rho_s) + \pi^2 k^2 Q) (\pi^2 k^2 \hat{d}(\lambda) + B) - (\lambda \rho_s \hat{D}(\lambda) - A) (B \lambda^2 \rho_s + A \pi^2 k^2) = 0. \quad (27)$$

Уравнение (27) будет предметом нашего изучения. Объединение его корней при всех натуральных k и составляют спектр σ_3 задачи (23).

Заметим сначала, что с помощью соотношения

$$\hat{D}(\lambda) = \lambda \hat{d}(\lambda) - d(0).$$

уравнение (27) можно переписать в виде

$$(\lambda^2 (\tilde{\rho} - A \rho_s) + \pi^2 k^2 Q) (\pi^2 k^2 \hat{d}(\lambda) + B) - (\lambda^2 \rho_s \hat{d}(\lambda) - \lambda \rho_s d(0) - A) (B \lambda^2 \rho_s + A \pi^2 k^2) = 0.$$

Приводя подобные члены, получим

$$\hat{d}(\lambda) (B \rho_s^2 \lambda^4 + (2A \rho_s - \tilde{\rho}) k^2 \lambda^2 - Q k^4) = B \rho_s^2 d(0) \lambda^3 + B \tilde{\rho} \lambda^2 + A \rho_s d(0) k^2 \lambda + (A^2 + BQ) k^2,$$

или

$$\hat{d}(\lambda) = \frac{B \rho_s^2 d(0) \lambda^3 + B \tilde{\rho} \lambda^2 + A \rho_s d(0) k^2 \lambda + (A^2 + BQ) k^2}{B \rho_s^2 \lambda^4 + (2A \rho_s - \tilde{\rho}) k^2 \lambda^2 - Q k^4}. \quad (28)$$

(На фиг. 7 и фиг. 8 изображены графики функций $\hat{d}(\lambda)$ и правой части последнего равенства при различных k).

Имеют место следующие утверждения:

ТЕОРЕМА 3.1. *Спектр σ_3 задачи (23) при $k \rightarrow \infty$ представляет собой объединение двух частей:*

первая часть состоит из серий конечнократных собственных значений, которые имеют в качестве предельных точек вещественные корни уравнения $\hat{d}(\lambda) = 0$ (эти корни не зависят от k , далее мы будем обозначать их через K_i); вторая часть при каждом k состоит из трех корней, модули которых стремятся к бесконечности с ростом k , причем один из корней второй серии действителен и стремится к бесконечности со скоростью $O(k^2)$, два других с ростом k растут как $O(k)$. Если они комплексны, то действительные части стремятся к постоянной x_0 , задаваемой формулой

$$x_0 = 1/2 \cdot \frac{(B\tilde{\rho} - B\rho_s^2 D(0)) d(0)Q - (A^2 + BQ - A\rho_s D(0))(d(0)(A\rho_s - \tilde{\rho}) - A\rho_s D(0))}{(d(0)(A\rho_s - \tilde{\rho}) - A\rho_s D(0))^2}.$$

при этом имеет место сходимость справа (см. фиг. 9).

ЗАМЕЧАНИЕ. Необходимым и достаточным условием комплексности двух корней второй серии, упомянутых в условии Теоремы 3.1 будет соотношение

$$\left(\frac{A^2 + BQ - A\rho_s D(0)}{B\tilde{\rho} - B\rho_s^2 D(0)} - 1 \right) \cdot x_0 > 0.$$

ТЕОРЕМА 3.2. Положим $\Lambda_3 = \{\lambda \in R : \hat{d}(\lambda) > 0\}$. Тогда множество Λ_3 не содержит точек спектра σ_3 . При этом оно представляет собой объединение интервалов ("лакун"). Левым концом каждого из этих интервалов будет точка m_i , а правым – соответствующий нуль функции $\hat{d}(\lambda)$ (см. рис. 3_3).

Доказательство Теорем 3.1 и 3.2.

Исследуем уравнение

$$\hat{d}(\lambda) = \frac{B\rho_s^2 d(0)\lambda^3 + B\tilde{\rho}\lambda^2 + A\rho_s d(0)k^2\lambda + (A^2 + BQ)k^2}{B\rho_s^2\lambda^4 + (2A\rho_s - \tilde{\rho})k^2\lambda^2 - Qk^4}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (29)$$

где

$$\hat{d}(\lambda) = \sum_{i=1}^n \frac{M_i}{m_i(\lambda - m_i)}, \quad \text{и } m_i < m_{i-1}; \quad m_1 < 0,$$

на наличие равномерно ограниченных по k решений. Уравнение (29) удобно представить в виде:

$$\sum_{i=1}^n \frac{M_i}{m_i(\lambda - m_i)} = \frac{B\rho_s^2 d(0)\lambda^3 + B\tilde{\rho}\lambda^2 + A\rho_s d(0)k^2\lambda + (A^2 + BQ)k^2}{B\rho_s^2\lambda^4 + (2A\rho_s - \tilde{\rho})k^2\lambda^2 - Qk^4}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (30)$$

Заметим, что поскольку все M_i положительны, уравнение $\hat{d}(\lambda) = 0$ имеет ровно $n - 1$ вещественных корней. Эти корни будут предельными точками вещественных решений уравнения (30). Более точно, имеет место следующая лемма

ЛЕММА 1. Для любого малого $\delta > 0$ существует такой номер K , что при любом $k > K$, $\lambda_k^{(i)} \in U_\delta(K_i)$, где $\lambda_k^{(i)}$ соответствующим образом занумерованный корень уравнения (30), а $U_\delta(x) - \delta$ -окрестность точки x .

Доказательство Леммы 1. Правая часть при фиксированном k представляет из себя мероморфную функцию от λ с полюсами в точках, где

$$B\rho_s^2\lambda^4 + (2A\rho_s - \tilde{\rho})k^2\lambda^2 - Qk^4 = 0. \quad (31)$$

Уравнение (31) – биквадратное уравнение, причем из определения физических констант известно, что B , ρ_s и Q положительны. Отсюда, действительные корни этого уравнения выражаются по формуле $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{\mu}$, где

$$\mu = \frac{1}{2B\rho_s^2} \left(-(2A\rho_s - \tilde{\rho})k^2 + \sqrt{\frac{1}{4}(2A\rho_s - \tilde{\rho})^2k^4 + 4BQ\rho_s k^4} \right).$$

Преобразуя последнее выражение, получим

$$\mu = \frac{k^2}{2B\rho_s^2} \left(-(2A\rho_s - \tilde{\rho}) + \sqrt{\frac{1}{4}(2A\rho_s - \tilde{\rho})^2 + 4BQ\rho_s} \right)$$

Поэтому

$$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{\mu} = \pm C_1 \cdot k.$$

Теперь устремим k к бесконечности. Нули (31) будут "разъезжаться" к бесконечности со скоростью $O(k)$. Значит при любом фиксированном $\lambda = \lambda_0 \neq \infty$ можно выбрать такой номер $K(\lambda_0)$, что при $k > K(\lambda_0)$ функция в правой части (30) убывает по k квадратично, то есть

$$F(\lambda_0, k) = \frac{B\rho_s^2 d(0)\lambda_0^3 + B\tilde{\rho}\lambda_0^2 + A\rho_s d(0)k^2\lambda_0 + (A^2 + BQ)k^2}{B\rho_s^2\lambda_0^4 + (2A\rho_s - \tilde{\rho})k^2\lambda_0^2 - Qk^4} = O(k^{-2}), \quad k > K(\lambda_0), \quad k \rightarrow \infty.$$

Заметим теперь, что при фиксированном $\lambda \neq m_i$ левая часть уравнения (30) определена и не зависит от k .

Функция правой части (30) при фиксированном $\lambda_0 \in (-\infty, m_1)$ и достаточно больших k определена и монотонно стремится к нулю при $k \rightarrow \infty$ (это очевидно следует из явного выражения для функции $F(\lambda, k)$).

В силу единственности нуля функции $\hat{d}(\lambda)$ на (m_{i+1}, m_i) (это следствие положительности всех M_i) и непрерывности ее на этом интервале, получаем утверждение Леммы 1.

ЛЕММА 2. Пусть $D(0) \neq \frac{\tilde{\rho}}{\rho_s^2}$. Тогда:

- 1) при каждом фиксированном k число корней уравнения (29) будет равно $n + 2$;
- 2) при этом $n - 1$ корней являются вещественными, и для них справедлива Лемма 1.

Доказательство Леммы 2. Чтобы доказать первое из двух утверждений Леммы 2, приведем к общему знаменателю дробь в записи функции $\hat{d}(\lambda)$:

$$\hat{d}(\lambda) = \sum \frac{M_i}{m_i(\lambda - m_i)} = \sum \frac{M_i}{m_i} \cdot \frac{1}{\lambda - m_i} = \frac{A_1\lambda^{n-1} + A_2\lambda^{n-2} + \dots + A_n}{\prod_{i=1}^n (\lambda - m_i)}, \quad (32)$$

где $A_1 = \sum \frac{M_i}{m_i} = d(0) \neq 0$. Подставим его в (30), учитывая, что $A_1 = d(0)$:

$$\frac{d(0)\lambda^{n-1} + A_2\lambda^{n-2} + \dots + A_n}{\prod_{i=1}^n (\lambda - m_i)} = \frac{B\rho_s^2 d(0)\lambda^3 + B\tilde{\rho}\lambda^2 + A\rho_s d(0)k^2\lambda + (A^2 + BQ)k^2}{B\rho_s^2\lambda^4 + (2A\rho_s - \tilde{\rho})k^2\lambda^2 - Qk^4}.$$

Отсюда ($\lambda \neq m_i$, и $k > K(m_n)$):

$$\begin{aligned} & (d(0)\lambda^{n-1} + A_2\lambda^{n-2} + \dots + A_n) (B\rho_s^2\lambda^4 + (2A\rho_s - \tilde{\rho})k^2\lambda^2 - Qk^4) = \\ & = (B\rho_s^2d(0)\lambda^3 + B\tilde{\rho}\lambda^2 + A\rho_sd(0)k^2\lambda + (A^2 + BQ)k^2) \prod_{i=1}^n (\lambda - m_i). \end{aligned} \quad (33)$$

Старшие по λ члены в левой и правой частях данного уравнения совпадают, следовательно, уравнение имеет степень $n + 2$. Коэффициент при старшей степени равен

$$\left(A_2 + d(0) \sum_{i=1}^n m_i \right) B\rho_s^2 - B\tilde{\rho},$$

где $A_2 = - \sum_{i=1}^n \frac{M_i}{m_i} \left(\sum_{j=1, j \neq i}^n m_j \right)$, и после преобразований это условие принимает вид:

$$\sum_{i=1}^n \frac{M_i}{m_i} m_i B\rho_s^2 - B\tilde{\rho} = D(0)B\rho_s^2 - B\tilde{\rho} \neq 0$$

По условию леммы, это выражение не обращается в ноль, поэтому применяя Основную теорему алгебры, получаем, что общее количество корней (с учетом кратности) уравнения (29) равно $n + 2$. Ранее нами было установлено, что $n - 1$ корень этого уравнения при каждом k действителен, что и завершает доказательство Леммы 2.

Тем самым мы выделили первую часть из двух частей спектра σ_3 , упомянутых в условии Теоремы 3.1.

Исследование второй части спектра σ_3 потребует некоторых вычислений. Напомним, что

$$\hat{d}(\lambda) = \sum_{i=1}^n \frac{M_i}{m_i(\lambda - m_i)}, \text{ где } m_i < m_{i-1}, m_1 < 0$$

Зафиксируем k . Заметим теперь, что при $d(0) \neq 0$ можно достаточно хорошо угадать асимптотику функции $\hat{d}(\lambda)$ при $|\lambda| \rightarrow \infty$ (параметр λ здесь комплексный).

Для этого "перевернем" функцию $\hat{d}(\lambda)$:

$$\left(\hat{d}(\lambda) \right)^{-1} = \frac{\prod_{i=1}^n (\lambda - m_i)}{d(0)\lambda^{n-1} + A_2\lambda^{n-2} + \dots + A_n}.$$

Чтобы изучить асимптотику функции $\hat{d}(\lambda)$ вдали от точек m_i , разделим с остатком числитель этой дроби на знаменатель (выделим главную часть):

$$\left(\hat{d}(\lambda) \right)^{-1} = \frac{1}{d(0)} \left(\lambda - \frac{D(0)}{d(0)} + o(\lambda) \right), \quad \lambda \in R \setminus U_\delta(m_i) \quad (34)$$

"Перевернем" равенство (28) и заменим в нем $\hat{d}^{-1}(\lambda)$ полученным представлением, опуская бесконечно малые:

$$\left(\lambda - \frac{D(0)}{d(0)} \right) = d(0) \cdot \frac{B\rho_s^2\lambda^4 + (2A\rho_s - \tilde{\rho})k^2\lambda^2 - Qk^4}{B\rho_s^2d(0)\lambda^3 + B\tilde{\rho}\lambda^2 + A\rho_sd(0)k^2\lambda + (A^2 + BQ)k^2}$$

После преобразований, получим:

$$\begin{aligned} & B\rho_s^2 d(0)\lambda^4 + (2A\rho_s - \tilde{\rho})d(0)k^2\lambda^2 - Qd(0)k^4 = \\ & = (B\rho_s^2 d(0)\lambda^3 + B\tilde{\rho}\lambda^2 + A\rho_s d(0)k^2\lambda + (A^2 + BQ)k^2) \left(\lambda - \frac{D(0)}{d(0)} \right). \end{aligned}$$

Легко видеть, что члены с λ^4 (старшие степени) сокращаются, и после некоторых вычислений уравнение принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} & (B\tilde{\rho} - B\rho_s^2 D(0))\lambda^3 + ((\tilde{\rho} - A\rho_s)d(0)k^2 - A\rho_s D(0)k^2)\lambda^2 + \\ & + ((A^2 + BQ)k^2 - A\rho_s D(0)k^2)\lambda + \left(Qd(0)k^4 - (A^2 + BQ)\frac{D(0)}{d(0)}k^2 \right) = 0. \quad (35) \end{aligned}$$

Корни этого уравнения зависят от k . Численные расчеты показывали, что один из корней "быстро убежал" на бесконечность, а другие два были комплексно сопряженными и также уходили на бесконечность, но с меньшей скоростью. Следующая лемма представляет собой строгую формулировку последнего утверждения: (см. фиг. 4)

ЛЕММА 3. Пусть $D(0) \neq \frac{\tilde{\rho}}{\rho_s^2}$. Тогда:

1. Действительный корень уравнения (35) при $k \rightarrow \infty$ зависит от k , как $O(k^2)$.
2. Два других корня зависят от k как $O(k)$ при $k \rightarrow \infty$. Когда они комплексно сопряженные, действительные их части по мере роста k стремятся к числу x_0 , которое может быть найдено по формуле:

$$x_0 = 1/2 \cdot \frac{(B\tilde{\rho} - B\rho_s^2 D(0))d(0)Q - (A^2 + BQ - A\rho_s D(0))(d(0)(A\rho_s - \tilde{\rho}) - A\rho_s D(0))}{(d(0)(A\rho_s - \tilde{\rho}) - A\rho_s D(0))^2}.$$

Доказательство Леммы 3. Зафиксируем λ и подставим в уравнение (35) $\lambda = \zeta k^2$. Тогда получим при старших степенях

$$(B\tilde{\rho} - B\rho_s^2 D(0))\zeta^3 k^6 + ((\tilde{\rho} - A\rho_s)d(0) - A\rho_s D(0))k^6 \zeta^2 + o(k^5) = 0.$$

Пренебрегая младшими членами, получим уравнение на ζ :

$$\zeta^2 k^6 ((B\tilde{\rho} - B\rho_s^2 D(0))\zeta + ((\tilde{\rho} - A\rho_s)d(0) - A\rho_s D(0))) = 0.$$

Следовательно

$$\zeta = \frac{(A\rho_s - \tilde{\rho})d(0) - A\rho_s D(0)}{B\rho_s^2 D(0) - B\tilde{\rho}},$$

и

$$\lambda \sim \frac{(A\rho_s - \tilde{\rho})d(0) - A\rho_s D(0)}{B\rho_s^2 D(0) - B\tilde{\rho}} k^2$$

есть асимптотика действительного корня уравнения (35) по k^2 . Таким образом, мы доказали первое утверждение Леммы 3.

Для исследования двух других корней уравнения (35) применим метод неопределенных коэффициентов. Предположим, что действительный корень этого уравнения имеет асимптотику вида

$$\frac{(A\rho_s - \tilde{\rho})d(0) - A\rho_s D(0)}{B\rho_s^2 D(0) - B\tilde{\rho}} \cdot k^2 - \theta k^0 - \theta_1 k^{-2}$$

где θ, θ_1 подлежат определению, и разделим многочлен в левой части (35) на

$$\lambda - \frac{(A\rho_s - \tilde{\rho})d(0) - A\rho_s D(0)}{B\rho_s^2 D(0) - B\tilde{\rho}} \cdot k^2 + \theta k^0 + \theta_1 k^{-2} \quad (36)$$

"с остатком". Приравнивая в остатке коэффициенты при старших степенях k к нулю, получим линейное уравнение на θ :

$$Qd(0) + \frac{(A\rho_s - \tilde{\rho})d(0) - A\rho_s D(0)}{B\rho_s^2 D(0) - B\tilde{\rho}} ((A^2 + BQ - A\rho_s D(0) - \theta \cdot (A\rho_s - \tilde{\rho})d(0) - A\rho_s D(0)) = 0,$$

откуда

$$\theta = \frac{(B\tilde{\rho} - B\rho_s^2 D(0))d(0)Q - (A^2 + BQ - A\rho_s D(0))(d(0)(A\rho_s - \tilde{\rho}) - A\rho_s D(0))}{(d(0)(A\rho_s - \tilde{\rho}) - A\rho_s D(0))^2}. \quad (37)$$

Аналогичным образом находится и величина θ_1 .

Частное от деления с остатком (35) на (36) будет многочленом второй степени

$$(B\tilde{\rho} - B\rho_s^2 D(0))\lambda^2 - (B\tilde{\rho} - B\rho_s^2 D(0))(\theta + \theta_1 k^{-2})\lambda + \dots$$

Таким образом, действительный корень (35) может быть представлен в виде

$$\lambda \sim -\frac{(A\rho_s - \tilde{\rho})d(0) - A\rho_s D(0)}{B\rho_s^2 D(0) - B\tilde{\rho}} \cdot k^2 - \theta + o(k^{-2})$$

где θ берется из (37), а два других будут корнями уравнения

$$(B\tilde{\rho} - B\rho_s^2 D(0))\lambda^2 - (B\tilde{\rho} - B\rho_s^2 D(0))(\theta + \theta_1 k^{-2}) \cdot \lambda + (A^2 + BQ - A\rho_s D(0) - (B\tilde{\rho} - B\rho_s^2 D(0)) \cdot \theta)k^2 + O(1) = 0.$$

Сокращая на $B\tilde{\rho} - B\rho_s^2 D(0)$:

$$\lambda^2 - (\theta + \theta_1 k^{-2}) \cdot \lambda + \left(\frac{A^2 + BQ - A\rho_s D(0)}{B\tilde{\rho} - B\rho_s^2 D(0)} - 1 \right) \cdot \theta k^2 + O(1) = 0$$

Корни последнего уравнения находятся по известной формуле:

$$\lambda_{1,2} = 1/2 \cdot \left((\theta + \theta_1 k^{-2}) \pm \sqrt{\theta^2 - 4 \left(\frac{A^2 + BQ - A\rho_s D(0)}{B\tilde{\rho} - B\rho_s^2 D(0)} - 1 \right) \cdot \theta k^2 + O(1)} \right),$$

что доказывает утверждение 2 Леммы 3.

Если выполнено условие

$$\left(\frac{A^2 + BQ - A\rho_s D(0)}{B\tilde{\rho} - B\rho_s^2 D(0)} - 1 \right) \cdot \theta > 0,$$

то при $k \rightarrow \infty$ корни $\lambda_{1,2}$ будут комплексно сопряженными, действительная часть их будет иметь вид

$$\Re(\lambda_{1,2}) = 1/2 \cdot (\theta + \theta_1 k^{-2}),$$

и так как $\theta_1 \equiv const$, при $k \rightarrow \infty$

$$\Re(\lambda_{1,2}) \rightarrow 1/2 \cdot \frac{(B\tilde{\rho} - B\rho_s^2 D(0)) d(0)Q - (A^2 + BQ - A\rho_s D(0))(d(0)(A\rho_s - \tilde{\rho}) - A\rho_s D(0))}{(d(0)(A\rho_s - \tilde{\rho}) - A\rho_s D(0))^2}.$$

Таким образом, здесь картина спектра похожа на случай микстуры (суспензии) двух жидкостей. При $k \rightarrow \infty$ корни $\lambda_{1,2}$ будут "накапливаться" около прямой $\Re(\lambda_{1,2}) = 1/2 \cdot (\theta + \theta_1 k^{-2})$, "убегая" к плюс и минус бесконечности соответственно. Тем самым закончено доказательство Леммы 3, а вместе с ней и Теоремы 3.1.

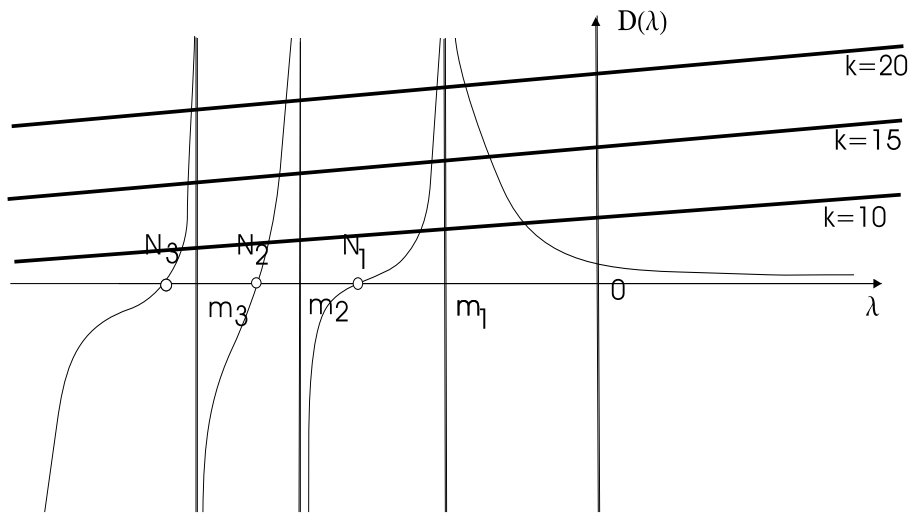
Утверждение Теоремы 3.2 очевидно следует из Леммы 1 и явного вида функций в левой и правой частях уравнения (29).

4. Заключение.

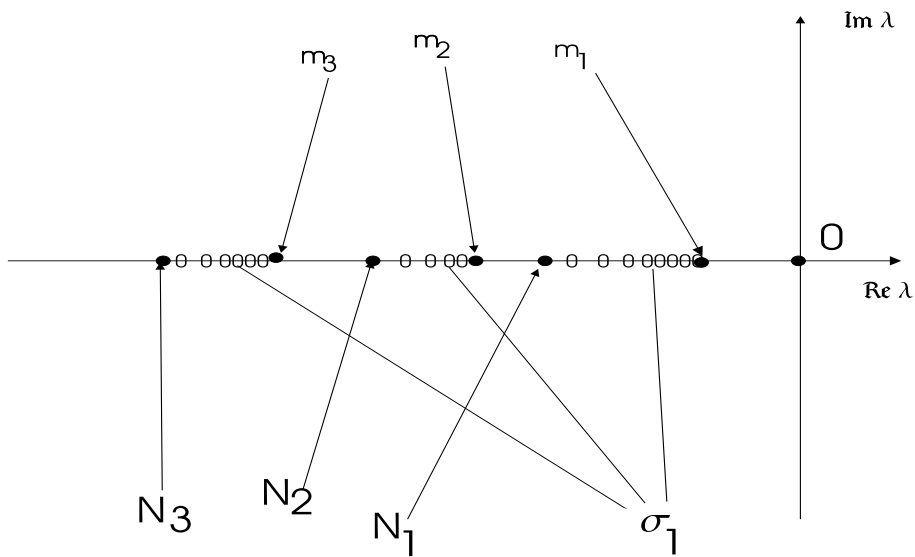
1. В данной работе рассматривается задача анализа спектра только одномерных движений для описанных выше моделей усредненных сред. Вопрос о построении спектров плоских и пространственных движений для моделей, рассмотренных в п.п. 3,4 в настоящей работе, не исследовался. Это – интересная задача, требующая своего решения. Возможно, качественная картина спектров будет аналогична рассмотренным в этой работе случаям спектров одномерных движений. Вероятно также, что может быть построена адекватная данным задачам абстрактная операторная схема.
2. Также интересно провести анализ задачи о декременте затухания акустической волны, проходящей через "стенку" из материалов, эффективные модели которых приведены в данной работе.
3. Как уже отмечено во введении, в настоящей работе не рассматривается вопрос о сходимости как множеств спектров для допредельных моделей к спектрам, отвечающим "эффективным" или "усредненным" моделям. В работе [2] этот вопрос рассмотрен для случая модели "двойной пористости". Обычно довольно просто доказывалось утверждение, состоящее в том, что к каждой точке предельного спектра сходится некоторая последовательность из точек спектра допредельных задач. Доказательство обратного утверждения, состоящего в том, что каждая предельная точка подпоследовательности точек допредельных задач является точкой спектра предельной ("усредненной") модели, вызывает большие затруднения и требует дополнительных предположений. Это также интересная задача, требующая решения.
4. В рамках данной работы рассматриваются модели с периодической структурой. В последнее время рядом авторов были предприняты усилия по "стохастизации" задач усреднения для пористых сред (см [10]). Несомненный интерес представлял бы перенос различных результатов о спектрах на модели случайных сред, аналогичные рассмотренным в п.п. 3,4.

5. В данной работе рассмотрен случай полного заполнения отверстия (или каналов) жидкостью. При моделировании реальных механических систем таких, как грунты, насыщенные жидкостью, необходимо учитывать, что заполнение отверстий или каналов здесь, как правило, не будет полным. Это обстоятельство должно привести к качественным отличиям в распространении волн. Математическое моделирование сред с неполным заполнением отверстий – еще одна интересная задача. Так, значительно большими здесь должны быть тепловые потери, поскольку при движении "каркаса" жидкость в порах будет вовлечена в движение не целиком а только в частях, примыкающих к каркасу, что приведет к большим градиентам скорости.

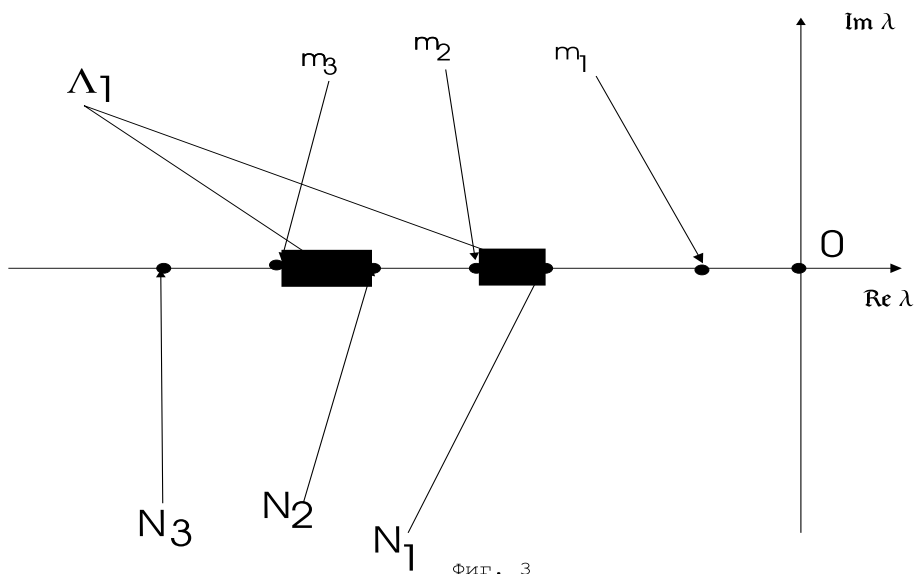
5. Приложение.



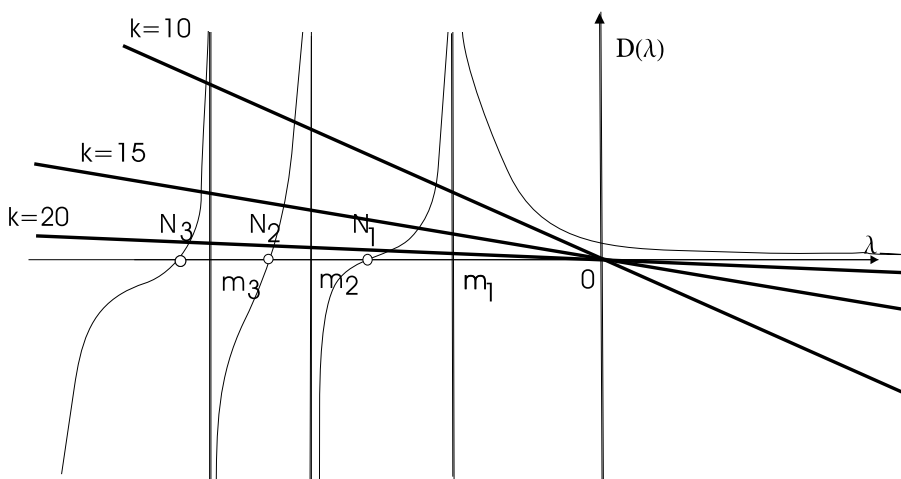
Фиг. 1.



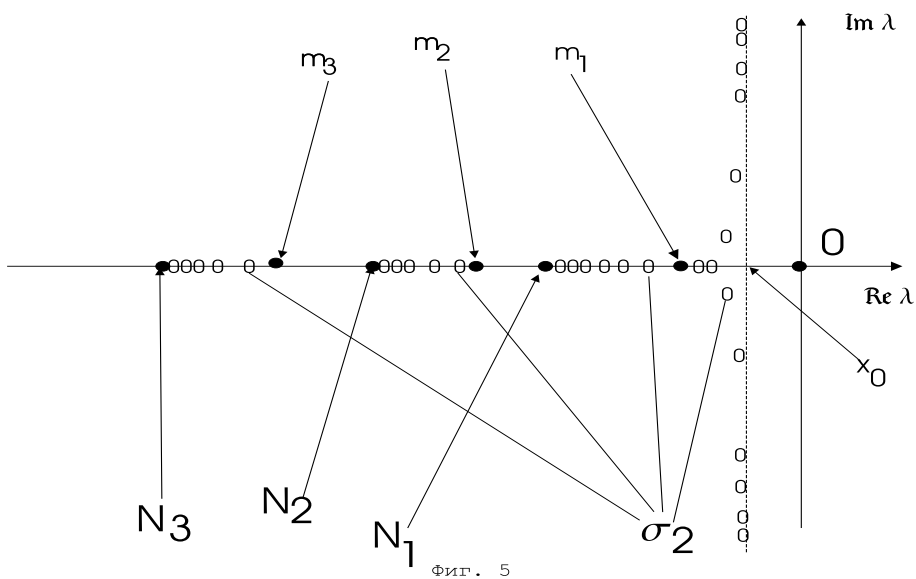
Фиг. 2



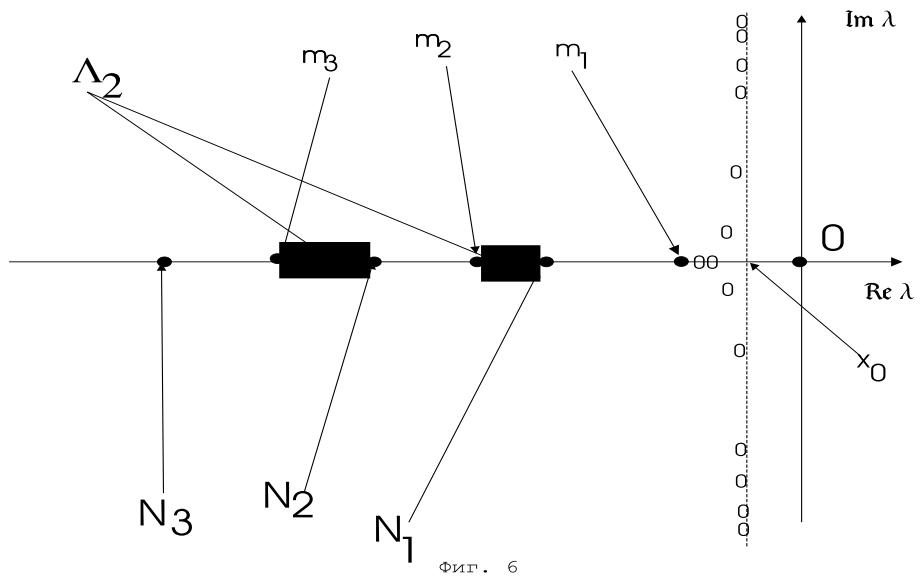
Фиг. 3



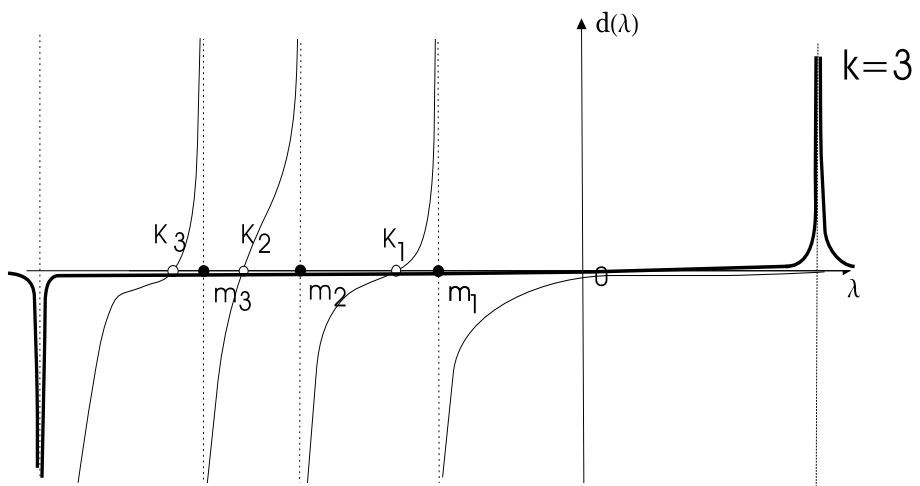
Фиг. 4.



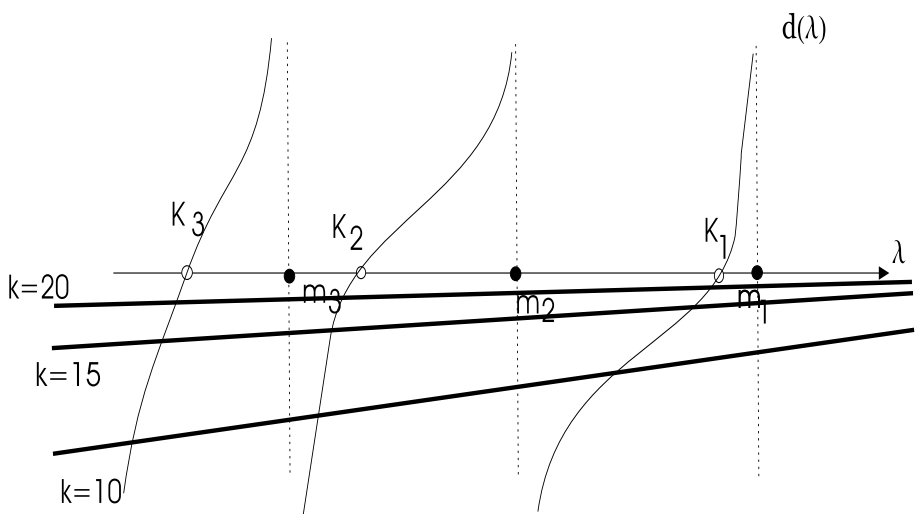
Фиг. 5



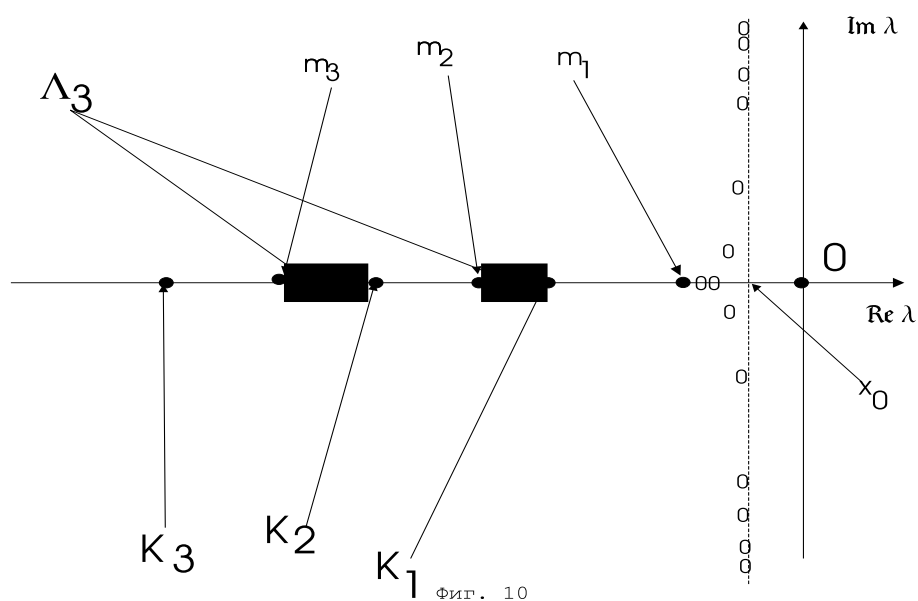
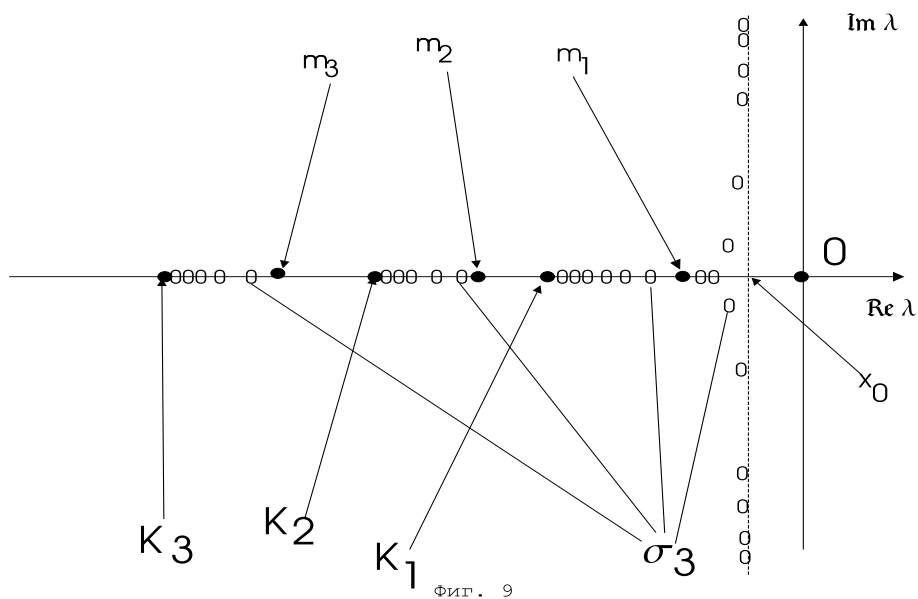
Фиг. 6



Фиг. 7



Фиг. 8.



1. *Nguetseng G.* Asymtotic analysis for a stiff variational problem arising in mechanics // *SIAM J. Math. Anal.* Vol. 21, No. 6, pp. 1396-1414, 1990.
2. *Жиков В. В.* Об одном расширении и применении метода двухмасштабной сходимости // *Математический сборник*, Т. 191, № 7, с. 31-72, 2000.
3. *Санчес-Паленсия Э.* Неоднородные среды и теория колебаний // Москва, "Мир", 1984, 472с.
4. *Нестеров В.С.* Вязко-инерционная дисперсия и затухание звука в суспензии высокой концентрации // *Акустический журнал РАН* т. 5, вып. 3, с. 337-344, Москва, 1956.
5. *Акуленко Л. Д., Нестеров С.В.* Инерционные и диссипативные свойства пористой среды, заполненной вязкой жидкостью // *Изв. РАН МТТ*, №.1, с. 109-120, Москва, 2005.
6. *Акуленко Л. Д., Нестеров С. В.* Исследование инерционных и упругих свойств пропитанных жидкостью гранулированных сред резонансным методом // *Изв. РАН МТТ*, №5, с. 145-156, Москва, 2002.

7. *Biot M.A.* Mechanics of deformation and acoustic propagation in porous media // J. Appl. Phys., 33, pp. 1482-1498, 1962.
8. *Gilbert R.P., Mikelić A.* Homogenizing the acoustic properties of the seabed: Part I // Nonlinear Analysis, 40, pp. 185-212, 2000.
9. *Шамаев А.С., Самарин В. А.* О распространении акустических волн в среде, состоящей из вязкой жидкости и упругого материала // Москва, 2004 (в печати).
10. *Bourgeat A., Piatnitski A.* Approximations of effective coefficients in stochastic homogenization // Ann. Inst. H. Poincaré, Prob. Statistics 40, № 2, 153-165, 2004.

Московский государственный университет им.М.В. Ломоносова,
механико-математический факультет,
Воробьевы горы, 1
119899, Москва, Россия.
yiddish@mail.ru

Получено 15.12.2005