Нелинейные граничные задачи **16**, 107-117 (2006)

©2006. **Е.С. Барановский, В.Г. Звягин**

КОНСТРУКЦИЯ СТЕПЕНИ ОДНОГО КЛАССА МНОГОЗНАЧНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ ОПЕРАТОРОВ, УДОВЛЕТВОРЯЮЩИХ УСЛОВИЮ α

В работе дана конструкция ориентированной степени для аппроксимируемых компактных многозначных возмущений отображений, удовлетворяющих условию α И.В. Скрыпника.

Ключевые слова: степень отображений; отображения, удовлетворяющие условию α, J - мультиотображения, ε - аппроксимации
MSC (2000): 47H11; 47H04; 47J05

Введение.

Необходимость изучения включений с различными классами операторов возникает при изучении различных задач теории дифференциальных уравнений и теории оптимального управления (см. например, [1]). Весьма эффективным средством решения задач такого рода является использование топологических характеристик типа степени для многозначных возмущений различного класса. Для включений с линейными фредгольмовыми операторами ряд подобных топологических инвариантов предложен в работах [4, 7, 9] . Для включений с нелинейными фредгольмовыми операторами соответствующий топологический инвариант предложен в [3]. Теория степени для одного класса многозначных возмущений плотно определенного $(\tilde{S}_+)$- отображения предложена в [10] . Приложения инвариантов подобного типа можно найти в работах [11, 12].

В настоящей работе предполагается конструкция степени для отображений, удовлетворяющих условию α Скрыпника И.В. и аппроксимируемых многозначных отображений компактного типа.

1. Предварительные понятия и вспомогательные факты.

Пусть $\mathbf{X}$ — действительное рефлексивное банахово пространство, $\mathbf{X}^*$ — его сопряженное. Обозначим сильную и слабую сходимости соответственно через $\to$ и $\rightharpoonup$. Для произвольных элементов $x \in \mathbf{X}$ и $h \in \mathbf{X}^*$ через $< h, x >$ обозначим в дальнейшем действие функционала h на элементе x.

Пусть $A\colon \bar{D} \to \mathbf{X}^*$, где D — произвольное ограниченное открытое множество пространства $\mathbf{X}$, а $\bar{D}$ — его замыкание.

Определение 1. Оператор A называется *деминепрерывным на* $\bar{D}$, если для любой последовательности $u_n \in \bar{D}$, сильно сходящейся к $u_0 \in \bar{D}$, имеет место равенство

$$\lim_{n\to\infty} < A(u_n), v > = < A(u_0), v >$$

при всех $v \in \mathbf{X}$.

Напомним, что оператор A называется *ограниченным*, если он переводит любое ограниченное множество из $\bar{D}$ в ограниченное множество из $\mathbf{X}^*$.

Определение 2(см. [8]). Говорят, что оператор $A\colon \bar{D} \to \mathbf{X}^*$ удовлетворяет условию $\underline{\alpha(F)}$, где $F \subset \bar{D}$, если для произвольной последовательности $\{u_n\} \subset F$ из $u_n \rightharpoonup u_0$ и $\overline{\lim}_n < A(u_n), u_n - u_0 > \leqslant 0$ следует $u_n \to u_o$.

Для отображений, удовлетворяющих условиям

а) A — деминепрерывное ограниченное отображение, удовлетворяющее условию $\alpha(\partial D)$;
б) $A(u) \neq 0$, $u \in \partial D$.

И.В. Скрыпником введена топологическая степень $Deg(A, \bar{D}, 0)$ отображения A множества $\bar{D}$ относительно нуля пространства $\mathbf{X}^*$.

Приведем краткую схему построения этой характеристики.

Обозначим $\mathbb{E}(\mathbf{X})$ множество всех конечномерных подпространств $\mathbf{X}$. Пусть $E \in \mathbb{E}(\mathbf{X})$ и $v_1, ..., v_m$ —некоторый базис E. Определим конечномерное отображение

$$A_E(u) = \sum_{i=1}^{m} < A(u), v_i > v_i$$

для $u \in \bar{D}_E$, $D_E = D \bigcap E$.

Лемма 1 (см. [8]). *Пусть для отображения $A\colon \bar{D} \to \mathbf{X}^*$ выполнены условия а), б). Тогда существует подпространство $E_0 \in \mathbb{E}(\mathbf{X})$ такое, что для любого подпространства $E \in \mathbb{E}(\mathbf{X})$, содержащего E_0, выполнены свойства:*
1) уравнение $A_E(u) = 0$ не имеет решений, принадлежащих ∂D_E;
2) $deg(A_E, \bar{D}_E, 0) = deg(A_{E_0}, \bar{D}_{E_0}, 0)$, где $deg(A_{E_0}, \bar{D}_{E_0}, 0)$ — степень конечномерного отображения $A_{E_0}\colon \bar{D}_{E_0} \to E_0$ относительно точки 0.

Определение 3. При выполнении условий а), б) определим степень $Deg(A, \bar{D}, 0)$ равенством:

$$Deg(A, \bar{D}, 0) = deg(A_{E_0}, \bar{D}_{E_0}, 0)$$

Введенная характеристика обладает всеми естественными свойствами степени конечномерных отображений.

Приведем теперь определение и некоторые свойства одного класса многозначных отображений, обозначаемого символом $\mathcal{C}J$. Но сначала напомним некоторые топологические понятия (см. [9, 6]).

Определение 4. Непустое компактное подмножество M метрического пространства Z называется *асферичным (или ∞–близостно связным)*, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется δ, $0 < \delta < \varepsilon$, такое, что для каждого $n = 0, 1, ...$ любое непрерывное отображение $g\colon S^n \to O_\delta(M)$ может быть продолжено до непрерывного отображения $\tilde{g}\colon B^{n+1} \to O_\varepsilon(M)$, где S^n, B^{n+1} — единичные сфера и шар в $\mathbb{R}^{n+1}$; $O_\delta(M)$, $O_\varepsilon(M)$ обозначают соответствующие окрестности множества M.

Пусть $\mathbf{X}$, Z — метрические пространства; $K(Z)$ обозначает совокупность всех непустых компактных подмножеств Z.

Многозначное отображение $\Sigma\colon \mathbf{X} \to K(Z)$ называется *полунепрерывным сверху*, если для каждого открытого множества $V \subset Z$ множество $\Sigma_+^{-1}(V) = \{x \in \mathbf{X}; \Sigma(x) \subset V\}$ открыто в $\mathbf{X}$.

Полунепрерывное сверху многозначное отображение (мультиотображение) $\Sigma\colon \mathbf{X} \to K(Z)$ называется *J–мультиотображением* ($\Sigma \in J(\mathbf{X}, Z)$), если каждое значение $\Sigma(x)$, $x \in \mathbf{X}$, — асферичное множество.

Пусть дано многозначное отображение (мультиотображение) $\Sigma\colon \mathbf{X} \to K(Z)$. Непрерывное отображение $\sigma_\varepsilon\colon \mathbf{X} \to Z$, $\varepsilon > 0$, называется *ε–аппроксимацией* Σ, если для каждого $x \in \mathbf{X}$ существует $x' \in O_\varepsilon(x)$ такое, что $\sigma_\varepsilon(x) \in O_\varepsilon(\Sigma(x'))$. Очевидно, что это эквивалентно тому, что

$$\sigma_\varepsilon(x) \in O_\varepsilon(\Sigma(O_\varepsilon(x))$$

или тому, что

$$\Gamma_{\sigma_\varepsilon} \subset O_\varepsilon(\Gamma_\Sigma),$$

где $\Gamma_{\sigma_\varepsilon}$, Γ_Σ обозначают графики σ_ε и Σ соответственно. При этом метрика в $\mathbf{X} \times Z$ определяется естественным путем как

$$d((x,z),(x',z')) = max\{d_{\mathbf{X}}(x,x'), d_Z(z,z')\}.$$

Совокупность всех ε–аппроксимацией мультиотображения Σ обозначим символом $a(\Sigma,\varepsilon)$.

Просуммируем необходимые нам свойства ε–аппроксимаций в следующем утверждении (см. [6]).

Лемма 2. *Пусть $\Sigma\colon \mathbf{X} \to K(Z)$ полунепрерывное сверху мультиотображение.*
i) Пусть X_1 — компактное множество $\mathbf{X}$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такие, что если $\sigma \in a(\Sigma,\delta)$, то $\sigma|_{X_1} \in a(\Sigma|_{X_1},\varepsilon)$;
ii) Пусть $\mathbf{X}$ — компакт, Z_1 — метрическое пространство и $\varphi\colon Z \to Z_1$ — непрерывное отображение. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что из того, что $\sigma \in a(\Sigma,\delta)$ следует, что $\varphi \circ \sigma \in a(\varphi \circ \Sigma,\varepsilon)$;
iii) Пусть $\mathbf{X}$ — компакт, $\Sigma_*\colon \mathbf{X} \times [0,1] \to K(Z)$ — полунепрерывное сверху мультиотображение. Тогда для каждого $\lambda \in [0,1]$ и любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что из того, что $\sigma_* \in a(\Sigma_*,\delta)$ следует, что $\sigma_*(\cdot,\lambda) \in a(\Sigma_*(\cdot,\lambda),\varepsilon)$;
iv) Пусть Z_1 — метрическое пространство, $\Sigma_1\colon \mathbf{X} \to K(Z_1)$ полунепрерывное сверху мультиотображение. Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такие, что $\sigma \in a(\Sigma,\delta)$ и $\sigma_1 \in a(\Sigma_1,\delta)$ влечет, что $\sigma \times \sigma_1 \in a(\Sigma \times \Sigma_1,\varepsilon)$, где $(\sigma \times \sigma_1)(x) = \sigma(x) \times \sigma_1(x)$, $(\Sigma \times \Sigma_1)(x) = \Sigma(x) \times \Sigma_1(x)$.

Пусть X, X' — метрические пространства, $f\colon X \to X'$ — непрерывное отображение, $G\colon X \to K(X')$ — многозначное отображение. Обозначим символом

$$Coin(f,G) = \{x \in X; f(x) \in G(x)\}$$

множество точек совпадений отображений f и G.

Лемма 3. *Пусть X, Y, Z — метрические пространства, $\varphi\colon Z \to Y$, $f\colon X \to Y$ — непрерывные отображения, $\Sigma\colon X \to K(Z)$ — полунепрерывное сверху мультиотображение. Пусть X_1 — компактное подмножество X такое, что*

$$Coin(f,\varphi \circ \Sigma) \bigcap X_1 = \varnothing.$$

Тогда, если $\varepsilon > 0$ достаточно мало и $\sigma_\varepsilon \in a(\Sigma,\varepsilon)$, то

$$Coin(f,\varphi \circ \sigma_\varepsilon) \bigcap X_1 = \varnothing.$$

Доказательство. Предположим противное, то есть, что существуют последовательности $\{x_n\} \subset X_1$ и $\varepsilon_n \to 0$, $\varepsilon_n > 0$, такие, что

$$f(x_n) = \varphi \circ \sigma_{\varepsilon_n}(x_n) \tag{1}$$

для $\sigma_{\varepsilon_n} \in a(\Sigma, \varepsilon_n)$.

Из леммы 2, i) и ii) следует,что отображения $\varphi \circ \sigma_{\varepsilon_n}|_{X_1}$ определяют последовательность δ_n — аппроксимаций отображения $\varphi \circ \Sigma|_{X_1}$ с $\delta_n \to 0$. Следовательно,

$$(x_n, \varphi \circ \sigma_{\varepsilon_n}(x_n)) \in O_{\delta_n}(\Gamma_{\varphi \circ \Sigma|_{X_1}}).$$

График полунепрерывного сверху отображения $\varphi \circ \Sigma|_{X_1}$ есть компактное множество. Поэтому мы можем предположить без ограничения общности, что

$$(x_n, \varphi \circ \sigma_{\varepsilon_n}(x_n)) \to (x_0, y_0) \in \Gamma_{\varphi \circ \Sigma|_{X_1}} \quad \text{при } n \to \infty,$$

то есть $y_0 \in \varphi \circ \Sigma(x_0)$, переходя к пределу в (1), мы получаем, что $f(x_0) = y_0 \in \varphi \circ \Sigma(x_0)$, то есть $x_0 \in Coin(f, \varphi \circ \Sigma)$. Это противоречие и доказывает лемму.

Определение 5. (см.[2]). Метрическое пространство Y называется *ANR-пространством*, если для всякого замкнутого подмножества B метрического пространства X любое непрерывное отображение $f : B \to Y$ допускает непрерывное продолжение $\tilde{f} : U \to Y$ на некоторую окрестность U множества B в пространстве X.

Лемма 4 (см.[2]). *Конечномерный компакт M является ANR-пространством тогда и только тогда, когда он локально стягиваем.*

Определение 6. Непустое компактное множество S называется R_δ*–множеством*, если его можно представить как пересечение убывающей последовательности стягиваемых компактных подмножеств.

Если Z — ANR–пространство (абсолютный окрестностный ретракт), то примерами асферичных подмножеств могут служить стягиваемые (в частности, выпуклые) подмножества, абсолютные ретракты или R_δ–множества.

Следующее аппроксимационное свойство J–мультиотображений, восходящее к работе А.Д. Мышкиса [6], доказано в статье [9] .

Лемма 5. *Пусть X — компактное ANR– пространство, Z — метрическое пространство, $\Sigma \in J(X, Z)$. Тогда*

i) мультиотображение Σ аппроксимируемо, т.е. для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\sigma_\varepsilon \in a(\Sigma, \varepsilon)$;

ii) для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta_0 > 0$ такое, что для каждого δ $(0 < \delta < \delta_0)$ и для любых двух δ–аппроксимаций σ_δ, $\sigma'_\delta \in a(\Sigma, \delta)$ найдется непрерывное отображение $\sigma_* \colon X \times [0, 1] \to Z$ такое, что

а) $\sigma_*(\cdot, 0) = \sigma_\delta$, $\sigma_*(\cdot, 1) = \sigma'_\delta$;

б) $\sigma_*(\cdot, \lambda) \in a(\Sigma, \varepsilon)$ для каждого $\lambda \in [0, 1]$.

Наконец, символом $CJ(X, X')$, где X' — метрическое пространство, мы будем обозначать совокупность всех мультиотображений $G \colon X \to K(X')$ вида $G = \varphi \circ \Sigma$, где $\Sigma \in J(X, Z)$ для некоторого метрического пространства Z, $\varphi \colon Z \to X'$ — непрерывное отображение.

2. Определение степени компактных CJ-возмущений отображений, удовлетворяющих условию α.

Пусть X – действительное, сепарабельное, рефлексивное банахово пространство. Пусть U – ограниченное, открытое подмножество X такое, что для любого конечномерного подпространства $E \subset X$ множество $\overline{U \cap E}$ локально стягиваемо.

Пусть $A : \bar{U} \to \mathbf{X}^*$, $G : \bar{U} \to K(\mathbf{X}^*)$, где $G = \varphi \circ \Sigma \in CJ(\bar{U}, \mathbf{X}^*)$.

Определение 7. Будем говорить, что $(A, G, \bar{U})$ является *компактной тройкой с оператором класса* α, если выполнены следующие условия:

c1) A – деминепрерывное, ограниченное отображение, удовлетворяющее условию $\alpha(\partial U)$;
c2) $G(\bar{U})$ относительно компактно в X^*;
c3) $Coin(A, G) \cap \partial U = \varnothing$.

Пусть E – конечномерное подпространство X с базисом $v_1, ..., v_m$. Определим $\pi_E : \mathbf{X}^* \to E$ по правилу

$$\pi_E(h) = \sum_{i=1}^{m} < h, v_i > v_i$$

Обозначим через U_E множество $U \cap E$. Рассмотрим отображения

$$A_E : \bar{U}_E \to E, \;\; G_E : \bar{U}_E \to K(E),$$

где $A_E = \pi_E \circ A,\; G_E = \pi \circ G$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть $(A, G, \bar{U})$ компактная тройка. Тогда существует $E_0 \in \mathbb{E}(X)$ такое, что для любого $E \supset E_0$, $E \in \mathbb{E}(X)$ верно:*

$$Coin(A_E, G_E) \cap \partial U_E = \varnothing.$$

Доказательство. Установим вначале существование подпространства $E_0 \in \mathbb{E}(X)$ такого, что при $E \supset E_0$, $E \in \mathbb{E}(x)$ множество $Z^E_{E_0} = \{x \in \partial U_E$, для которых существует $g \in G(x)$ такое, что $< A(x) - g, x > \leq 0$ и $< A(x) - g, v >= 0$ для любого $v \in E_0\}$ пусто. Предположим противное, т.е. что для любого $E \in \mathbb{E}(X)$ существует $E_1 \in \mathbb{E}(X)$, $E_1 \supset E$ такое, что $Z^{E_1}_E \neq \varnothing$.

Обозначим

$$T_E = \bigcup_{E' \supset E} Z^{E'}_E, \;\; E' \in \mathbb{E}(X)$$

и пусть $\bar{T}^{(\text{сл.})}_E$ – слабое замыкание T_E. Тогда система множеств $\{\bar{T}^{(\text{сл.})}_E,\; E \in \mathbb{E}(X)\}$ центрирована. Действительно, возьмем произвольную конечную подсистему: $T^{(\text{сл.})}_{E_1}, ...,$ $T^{(\text{сл.})}_{E_p}$. Рассмотрим линейную оболочку $\mathcal{L}(E_1, ..., E_p) \in \mathbb{E}(X)$. По нашему предположению существует $\tilde{E} \in \mathbb{E}(X)$ такое, что $Z^{\tilde{E}}_{\mathcal{L}(E_1,...,E_p)} \neq \varnothing$. Заметим, что $Z^{\tilde{E}}_{\mathcal{L}(E_1,...,E_p)} \subset Z^{\tilde{E}}_{E_j},\; j = 1, ..., p$. Поэтому $\varnothing \neq Z^{\tilde{E}}_{\mathcal{L}(E_1,...,E_p)} \subset Z^{\tilde{E}}_{E_j} \subset T_{E_j} \subset \bar{T}^{(\text{сл.})}_{E_j},\; j = 1, ..., p$. Отсюда

$$\bigcap_{j=1}^{p} \bar{T}^{(\text{сл.})}_{E_j} \neq \varnothing,$$

что и означает центрированность исходной системы множеств.

С учетом этого факта и рефлексивности пространства X получим существование некоторого $u_0 \in \bigcap\limits_{E \in \mathbb{E}(X)} \bar{T}_E^{(\text{сл.})}$.

Покажем, что $u_0 \in \partial U$ и $A(u_0) \in G(u_0)$. Возьмем $E \in \mathbb{E}(X)$ такое, что $u_0 \in E$. По построению $u_0 \in \bar{T}_E^{(\text{сл.})}$. Поэтому существует последовательность $\{u_n\}$, где $u_n \in Z_E^{E_n}$, $E_n \supset E$, $u_n \rightharpoonup u_0$, $u_n \in \partial U_{E_n}$ и

$$< A(u_n) - g_n, u_n > \leq 0, \tag{2}$$

$$< A(u_n) - g_n, u_0 > = 0, \quad < A(u_n) - g_n, w > = 0, \tag{3}$$

где $g_n \in G(u_n)$ и w – произвольный элемент E. Так как $g_n \in G(u_n) \subset G(\bar{U})$и $G(\bar{U})$ относительно компактно, то без ограничения общности будем считать, что $g_n \to g_0$.

Заметим, что имеет место представление

$$< A(u_n), u_n - u_0 >=< A(u_n) - g_n, u_n - u_0 > + < g_n - g_0, u_n - u_0 > + < g_0, u_n - u_0 > \tag{4}$$

Очевидно, что второе и третье слагаемые в правой части (4) сходятся к нулю. Кроме того, из (2) (3) следует, что $< A(u_n) - g_n, u_n - u_0 >\leq 0$.

Покажем теперь, что $\overline{\lim}_n < A(u_n), u_n - u_0 >\leq 0$. В силу ограниченности оператора A последовательность $< A(u_n), u_n - u_0 >$ ограничена. Возьмем произвольную сходящуюся подпоследовательность $< A(u_{n_k}), u_{n_k} - u_0 >$. Из представления (4) и замечаний после него следует, что $< A(u_{n_k}) - g_{n_k}, u_{n_k} - u_0 >$ сходится и $\lim_k < A(u_{n_k}) - g_{n_k}, u_{n_k} - u_0 >\leq 0$, а значит $\lim_k < A(u_{n_k}), u_{n_k} - u_0 >\leq 0$. Поэтому по определению верхнего предела мы имеем:

$$\overline{\lim_n} < A(u_n), u_n - u_0 >\leq 0. \tag{5}$$

Так как оператор A удовлетворяет условию $\alpha(\partial U)$, $u_n \in \partial U_{E_n} \subset \partial U$, $u_n \rightharpoonup u_0$ и выполнено условие (5), то мы получим $u_n \to u_0$ и $u_0 \in \partial U$.

Из условий $u_n \to u_0, g_n \in G(u_n), g_n \to g_0$ и полунепрерывности сверху G мы получим (см.[1]), что $g_0 \in G(u_0)$

Теперь перейдем к пределу при $n \to \infty$ в равенстве (3), получим $< A(u_0) - g_0, w >= 0$ для любого $w \in E$.

Таким образом для произвольного $E \in \mathbb{E}(X)$ такого, что $u_0 \in E$ можно найти $g_0 \in G(u_0)$ такое, что $< A(u_0) - g_0, w >= 0$ для любого $w \in E$.

Так как X – сепарабельно, то существует Q – счетное всюду плотное в X подмножество. Пусть оно имеет вид $Q = \{x_1, x_2, ..., x_k, ...\}$. Рассмотрим

$$F_1 = \mathcal{L}(u_0, x_1),\ F_2 = \mathcal{L}(u_0, x_1, x_2), ..., F_k = \mathcal{L}(u_0, x_1, ..., x_k), ...$$

Как указывалось выше для F_k можно выбрать $g_k \in G(u_0)$ так, что $< A(u_0) - g_k, w >= 0$. для любого $w \in F_k$.

Кроме того, без ограничения общности можно считать, что $g_k \to g^* \in G(u_0)$ (т.к. $G(u_0)$ – компакт). Покажем, что $< A(u_0) - g^*, x >= 0$. для любого $x \in X$. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Пусть C – некоторая константа такая, что $\|A(u_0)\| < C$, $\|g_k\| < C$ для любого k=1, 2, ...

Так как Q – всюду плотно в X, то для любого $x \in X$ существует $x_m \in Q$ такое, что $\|x - x_m\| < \varepsilon/4C$.

Возьмем $k \in \mathbb{N}$ настолько большим, что $| < g_k - g^*, x > | < \varepsilon/4$ и $k \geq m$ (это можно сделать, т.к. $g_k \to g^*$ и x принадлежит ограниченной области).

Заметим, что $x_m \in F_m \subset F_k$. По построению g_k имеем $< A(u_0) - g_k, x_m >= 0$.

Рассмотрим

$$| < A(u_0) - g^*, x > | \; \leq \; | < A(u_0) - g_k, x_m > | + | < A(u_0) - g_k, x - x_m > | +$$

$$+ | < g_k - g^*, x > | \leq \|A(u_0)\| \cdot \|x - x_m\| + \|g_k\| \cdot \|x - x_m\| + | < g_k - g^*, x > | \leq$$

$$\leq C \cdot (\varepsilon/4C) + C \cdot (\varepsilon/4C) + \varepsilon/4 = 3\varepsilon/4 < \varepsilon$$

В силу такой оценки имеем: $< A(u_0) - g^*, x >= 0$ для любого $x \in X$, а значит $A(u_0) = g^* \in G(u_0)$.

Вспоминая, что $u_0 \in \partial U$ получим: $u_0 \in Coin(A, G) \cap \partial U$. А это противоречит условиям теоремы. Таким образом доказано существование пространства $E_0 \in \mathbb{E}(X)$ такого, что при $E \supset E_0, E \in \mathbb{E}(X)$, пусто множество $Z^E_{E_0}$.

Теперь докажем утверждение теоремы. Покажем, что выбранное нами $E_0 \in \mathbb{E}(X)$ удовлетворяет условиям теоремы. Предположим противное. Тогда существует такое $E_1 \supset E_0, E_1 \in \mathbb{E}(X)$, что

$$Coin(A_{E_1}, G_{E_1}) \cap \partial U_{E_1} \neq \varnothing. \tag{6}$$

Пусть u_1 принадлежит пересечению из (6). Тогда существует $g_1 \in G(u_1)$:

$$A_{E_1}(u_1) = \pi_{E_1}(g_1) \tag{7}$$

Выберем базис в E_1 в виде $v_1, ..., v_m, v_{m+1}, ..., v_{m_1}$, где $v_1, ..., v_m$ – базис в E_0. Тогда равенство (7) эквивалентно записи:

$$< A(u_1) - g_1, v_i >= 0, \;\; i = 1, ..., m_1. \tag{8}$$

Наша ближайшая цель – доказать, что $u_1 \in Z^{E_1}_{E_0}$. Это даст противоречие с тем, что $Z^{E_1}_{E_0} = \varnothing$.

Так как $u_1 \in E_1$, то имеет место представление $u_1 = \sum_{i=1}^{m_1} \xi_i v_i$. Вычислим $< A(u_1) - g_1, u_1 >$.

$< A(u_1) - g_1, u_1 >=< A(u_1) - g_1, \sum\limits_{i=1}^{m_1} \xi_i v_i >= \sum\limits_{i=1}^{m_1} \xi_i < A(u_1) - g_1, v_i >= 0.$

Аналогично $< A(u_1) - g_1, v >= 0$ для любого $v \in E_0$. Таким образом $u_1 \in Z^{E_1}_{E_0} = \varnothing$. Мы получили противоречие. Теорема доказана.

Теперь мы будем вводить определение степени совпадений для компактной тройки $(A, G, \bar{U})$. Для этого надо заметить следующее.

Мы предполагаем, что $\bar{U}_{E_0} = \overline{U \cap E_0}$ локально стягиваемо. Кроме того, $\bar{U}_{E_0}$ — конечномерный компакт, а значит по Лемме 4 $\bar{U}_{E_0}$ является ANR–пространством. Используя Лемму 5, можно утверждать, что $\Sigma|_{\bar{U}_{E_0}}$ аппроксимируемо, т.е. для любого $\varepsilon > 0$ существует $\sigma_\varepsilon \in a(\Sigma|_{\bar{U}_{E_0}}, \varepsilon)$.

Заметим, что по Теореме 1 $Coin(A_{E_0}, G_{E_0}) \cap \partial U_{E_0} = \varnothing$. Применив Лемму 3 к нашему случаю, получим, что при достаточно малом $\varepsilon > 0$:

$$(A_{E_0} - \pi_{E_0} \circ \varphi \circ \sigma_\varepsilon)(x) \neq 0$$

для любого $x \in \partial U_{E_0}$, где $\sigma_\varepsilon \in a(\Sigma|_{\bar U_{E_0}}, \varepsilon)$. Поэтому можно дать следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. *Степень совпадений для компактной тройки* $(A, G, \bar U)$ определяется равенством:

$$Deg(A, G, \bar U) = deg(A_{E_0} - \pi_{E_0} \circ \varphi \circ \sigma_\varepsilon, \bar U_{E_0}, 0),$$

где E_0, σ_ε выбраны как это указывалось ранее.

Обоснование корректности степени совпадений проведем в два этапа.

I. Независимость степени совпадений от выбора ε–аппроксимаций.

Нам потребуется показать, что при достаточно малом $\varepsilon > 0$ для любых двух ε–аппроксимаций $\sigma_\varepsilon, \sigma'_\varepsilon \in a(\Sigma|_{\bar U_{E_0}}, \varepsilon)$ соответствующие степени равны:

$$deg(A_{E_0} - \pi_{E_0} \circ \varphi \circ \sigma_\varepsilon, \bar U_{E_0}, 0)) = deg(A_{E_0} - \pi_{E_0} \circ \varphi \circ \sigma'_\varepsilon, \bar U_{E_0}, 0) \tag{9}$$

Для этого докажем вспомогательную лемму.

ЛЕММА 6. *Существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что для любого $x \in \partial U_{E_0}$ верно:*

$$A_{E_0}(x) \notin \pi_{E_0} \circ \varphi \circ (O_{\varepsilon_0}(\Sigma(x))),$$

где $O_{\varepsilon_0}(\Sigma(x))$ — ε_0–раздутие множества $\Sigma(x)$.

Доказательство. Предположим противное. Тогда существует монотонно убывающая последовательность $\varepsilon_n \to 0$, $x_n \in \partial U_{E_0}$, $x_n \to x_0 \in \partial U_{E_0}$ такие, что

$$A_{E_0}(x_n) \in \pi_{E_0} \circ \varphi(O_{\varepsilon_n}(\Sigma(x_n))).$$

Это означает, что существует $y_n \in O_{\varepsilon_n}(\Sigma(x_n))$:

$$A_{E_0}(x_n) = \pi_{E_0}\varphi(y_n) \tag{10}$$

По определению ε_n–раздутия найдется $y'_n \in \Sigma(x_n) \subset \Sigma(\partial U_{E_0})$ такое, что $||y'_n - y_n|| < \varepsilon_n$. Так как Σ — полунепрерывно сверху и ∂U_{E_0} — компакт, то $\Sigma(\partial U_{E_0})$ — компакт (см. [1]). Поэтому без ограничения общности будем считать, что y'_n сходится к некоторому элементу $y_0 \in \Sigma(x_0)$. С учетом оценки $||y'_n - y_n|| < \varepsilon_n$ можно утверждать также, что $y_n \to y_0$. Поэтому:

$$A_{E_0}(x_0) = \lim_n A_{E_0}(x_n) =^{(9)}= \lim_n \pi_{E_0} \circ \varphi(y_n) = \pi_{E_0} \circ \varphi(y_0) \in \pi_{E_0} \circ \varphi \circ \Sigma(x_0) = G_{E_0}(x_0),$$

а значит $x_0 \in Coin(A_{E_0}, G_{E_0}) \bigcap \partial U_{E_0}$, что противоречит Теореме 1. Лемма доказана.

По указанному в Лемме 6 ε_0 выберем (см. Лемма 5) δ_0 так, что для любых двух ε–аппроксимаций $\sigma_\varepsilon, \sigma'_\varepsilon \in a(\Sigma|_{\bar U_{E_0}}, \varepsilon)$, $0 < \varepsilon < \delta_0$ найдется непрерывное отображение $\tilde\sigma : \bar U_{E_0} \times [0, 1] \to Z$ такое, что
(i) $\tilde\sigma(\cdot, 0) = \sigma_\varepsilon$, $\tilde\sigma(\cdot, 1) = \sigma'_\varepsilon$
(ii) $\tilde\sigma(\cdot, \lambda) = a(\Sigma|_{\bar U_{E_0}}, \varepsilon_0)$ для любого $\lambda \in [0, 1]$.

Рассмотрим $H\colon \bar U_{E_0} \times [0, 1] \to E_0$, $H(x, t) = A_{E_0}(x) - \pi_{E_0} \circ \varphi \circ \tilde\sigma(x, t)$. Заметим, что $H(x, 0) = A_{E_0}(x) - \pi_{E_0} \circ \varphi \circ \sigma_\varepsilon(x)$, $H(x, 1) = A_{E_0}(x) - \pi_{E_0} \circ \varphi \circ \sigma'_\varepsilon(x)$ и, кроме того, из Леммы 6 и свойства (ii) следует, что $H(x, t) \neq 0$ для любых $x \in \partial U_{E_0}$, $t \in [0, 1]$.

Таким образом H является гомотопией между $A_{E_0}(x) - \pi_{E_0} \circ \varphi \circ \sigma_\varepsilon$ и $A_{E_0}(x) - \pi_{E_0} \circ \varphi \circ \sigma'_\varepsilon$, а значит по свойствам конечномерной степени верно равенство (9).

II. Независимость степени совпадений от выбора подпространства E_0.

Зафиксируем некоторое $E \in E(x)$, $E \supset E_0$. Пусть базис E имеет вид $v_1, \dots, v_m$, $w_1, \dots, w_k$, где $v_1, \dots, v_m$ базис в E_0.

Наша задача — доказать, что

$$deg(A_{E_0} - \pi_{E_0} \circ \varphi \circ \sigma_\varepsilon, \bar{U}_{E_0}, 0) = deg(A_E - \pi_E \circ \varphi \circ \sigma_\varepsilon, \bar{U}_E, 0), \tag{11}$$

где $\sigma_\varepsilon \in a(\Sigma|_{\bar{U}_E}, \varepsilon)$.

Для доказательства нам потребуется лемма Лере–Шаудера (см. [5]):

Лемма 7. *Пусть непрерывное отображение $g\colon \bar{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ таково, что $g_n(x_1, \dots, x_n) \equiv x_n$ при $(x_1, \dots, x_n) \in \Omega$. Предположим, что $g(x) \neq 0$ при $x \in \partial\Omega$ и $\Omega' = \Omega \bigcap \{x : x_n = 0\}$ непусто. Тогда*

$$deg(g, \bar{\Omega}, 0) = deg(g', \bar{\Omega}', 0),$$

где $g'\colon \bar{\Omega}' \to \mathbb{R}^{n-1}$ определено равенством

$$g'(x_1, \dots, x_{n-1}) = (g_1(x_1, \dots, x_{n-1}, 0), \dots, g_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}, 0)).$$

Рассмотрим отображения:

$$(A_{E_0} - \pi_{E_0} \circ \varphi \circ \sigma_\varepsilon)(x) = \sum_{i=1}^{m} < A(x) - \varphi \circ \sigma_\varepsilon(x), v_i > v_i$$

$$(A_E - \pi_E \circ \varphi \circ \sigma_\varepsilon)(x) = \sum_{i=1}^{m} < A(x) - \varphi \circ \sigma_\varepsilon(x), v_i > v_i + \sum_{i=1}^{k} < A(x) - \varphi \circ \sigma_\varepsilon(x), w_i > w_i$$

$$R_E(x) = \sum_{i=1}^{m} < A(x) - \varphi \circ \sigma_\varepsilon(x), v_i > v_i + \sum_{i=1}^{k} < p_i, x > w_i,$$

где $\sigma_\varepsilon \in a(\Sigma|_{\bar{U}_E}, \varepsilon)$, p_i — некоторый элемент X^*, удовлетворяющий условиям: $< p_i, w_j >= \delta_{ij}$ при $j = 1, \dots, k$, $< p_i, v_j >= 0$ при $j = 1, \dots, m$, δ_{ij} — символ Кронекера.

Из определения отображения R_E и леммы Лере–Шаудера вытекает, что

$$deg(A_{E_0} - \pi_{E_0} \circ \varphi \circ \sigma_\varepsilon, \bar{U}_{E_0}, 0) = deg(R_E, \bar{U}_E, 0) \tag{12}$$

Теперь покажем, что

$$deg(A_E - \pi_E \circ \varphi \circ \sigma_\varepsilon, \bar{U}_E, 0) = deg(R_E, \bar{U}_E, 0) \tag{13}$$

Для этого мы докажем вспомогательное утверждение.

Лемма 8. Существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что для любой $\sigma_\varepsilon \in a(\Sigma|_{\bar{U}_E}, \varepsilon)$, $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, любого $x \in \partial U_E$ и любого $t \in [0, 1]$ верно:

$$t(A_E(x) - \pi_E \circ \varphi \circ \sigma_\varepsilon(x)) + (1 - t)R_E(x) \neq 0.$$

Доказательство. Предположим противное. Тогда существуют $\varepsilon_n \to 0$, $t_n \in [0,1]$, $x_n \in \partial U_E$ такие, что

$$t_n(A_E(x_n) - \pi_E \circ \varphi \circ \sigma_{\varepsilon_n}(x_n)) + (1-t_n)R_E(x_n) = 0 \tag{14}$$

Равенство (13) эквивалентно следующим двум:

$$< A(x_n) - \varphi \circ \sigma_{\varepsilon_n}(x_n), v_i >= 0, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{15}$$

$$t_n < A(x_n) - \varphi \circ \sigma_{\varepsilon_n}(x_n), w_i > +(1-t_n) < p_i, x_n >= 0, \quad i = 1, \ldots, k. \tag{16}$$

Без ограничения общности можно считать, что $x_n \to x_0 \in \partial U_E$, $t_n \to t_0 \in [0,1]$. Кроме того, найдется $y_n \in \Sigma(x_n)$ такое, что $\|y_n - \sigma_{\varepsilon_n}(x_n)\| < \varepsilon_n$. Заметим, что $y_n \in \Sigma(x_n) \subset \Sigma(\partial U_E)$ — компактное множество (т.к. Σ — полунепрерывно сверху и ∂U_E — компакт, см. [1]). Поэтому будем полагать, что $y_n \to y_0 \in \Sigma(x_0)$. С учетом оценки $\|y_n - \sigma_{\varepsilon_n}(x_n)\| < \varepsilon_n$ мы имеем $\sigma_{\varepsilon_n}(x_n) \to y_0 \in \Sigma(x_0)$ при $n \to \infty$.

Переходя к пределу при $n \to \infty$ в равенствах (15), (16), получим

$$< A(x_0) - \varphi(y_0), v_i >= 0, \quad i = 1, \ldots, m \tag{15'}$$

$$t_0 < A(x_0) - \varphi(y_0), w_i > +(1-t_0) < p_i, x_0 >= 0, \quad i = 1, \ldots, k, \tag{16'}$$

где $\varphi(y_0) \in G(x_0)$.

Так как $x_0 \in E$, то имеет место представление $x_0 = \sum\limits_{i=1}^{m} a_i v_i + \sum\limits_{j=1}^{k} b_j w_j$, где $a_i, b_j \in \mathbb{R}$.

Ясно, что $t_0 \neq 0$.

Вычислим теперь $< A(x_0) - \varphi(y_0), x_0 >$.

$$< A(x_0) - \varphi(y_0), x_0 >=< A(x_0) - \varphi(y_0), \sum_{i=1}^{m} a_i v_i > + < A(x_0) - \varphi(y_0), \sum_{j=1}^{k} b_j w_j >=^{(15')}$$

$$= \sum_{j=1}^{k} b_j < A(x_0) - \varphi(y_0), w_j >=^{(16')} = -\frac{(1-t_0)}{t_0} \sum_{j=1}^{k} b_j < p_j, x_0 > .$$

Заметим, что по построению p_j

$$< p_j, x_0 >=< p_j, \sum_{i=1}^{m} a_i v_i > + < p_j, \sum_{i=1}^{k} b_i w_i >= \sum_{i=1}^{m} a_i < p_j, v_i > + \sum_{i=1}^{k} b_i < p_j, w_i >= b_j.$$

Таким образом мы получили, что $< A(x_0) - \varphi(y_0), x_0 >= -\frac{(1-t_0)}{t_0} \sum\limits_{j=1}^{k} b_j^2 \leq 0$.

Кроме того легко заметить, что $< A(x_0) - \varphi(y_0), v >= 0$ для любого $v \in E_0$.

Из последних двух соотношений вытекает, что $x_0 \in Z_{E_0}^E$. С другой стороны, в ходе доказательства теоремы 1 мы установили, что $Z_{E_0}^E = \varnothing$. Это противоречие и доказывает Лемму 8.

Из Леммы 8 непосредственно следует, что $A_E - \pi_E \circ \varphi \circ \sigma_\varepsilon$ и R_E можно соединить линейной гомотопией и поэтому справедливость равенства (13) доказана.

Таким образом, равенства (12), (13) дают требуемое равенство (11). Корректность конструкции доказана.

1. *Борисович Ю.Г., Гельман Б.Д., Мышкис А.Д., Обуховский В.В.* Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений. Москва: КомКнига. 2005., 216 с.
2. *Борсук К.* Теория ретрактов. Изд-во Мир. 1971.
3. *Дзекка П., Звягин В.Г., Обуховский В.В.* Об ориентированном индексе совпадений для нелинейных фредгольмовых включений // Доклады РАН, 2006, том 406, n.4.
4. *Корнев С.В., Обуховский В.В.* Тр. Матем. ф-та Воронеж. ун-т (новая серия). 2004. Вып. 8. с.56-74.
5. *Лере Ж. Шаудер Ю.* Топология и функциональные уравнения. // УМН. – 1946. –Т. 1, n.3–4. – с.71–95.
6. *Мышкис А.Д.* Матем. сборник. 1954. Т. 34. №3. С. 525-540.
7. *Gabor D., Kryszevski W.* Topol. Methods Nonlinear Anal. 2000. V.15 n.1. p.43-59.
8. *Скрыпник И.В.* Методы исследования нелинейных эллиптических граничных задач. – М.: Наука, 1990.
9. *Gorniewicz L.* Topological Fixed Point Theory of Multivalued Mappings. Dordrecht–Boston–London: Kluwer Academic Publishers, 1999.
10. *Kartsatos A. G., Skrypnik I. V.* A new topological degree theory for densely defined quasibounded $(\tilde{S}_+)$–perturbations of multivalued maximal monotone operators in reflexive Banach spaces // Abstract and Applied Analysis, vol. 2005, n.2, p.121-158.
11. *Pruszko T.* Bull. Acad. Polon. Sci. Math. 1979. V. 27. №11-12. p.895-902.
12. *Tarafdar E., Teo S.K.* J. Austal. Math. Soc. Ser. A. 1979. A. 1979. V.28. n.2.

Воронежский государственный университет
Университетская пл., 1, Воронеж, Россия
zvg@main.vsu.ru

Получено 15.12.2005