Український математичний вісник
Том 1 **(2004)**, № 3, 402 – 444

Об уравнении течения тонких плёнок с нелинейной конвекцией в многомерных областях

А. Е. Шишков, Р. М. Таранец

Аннотация. Изучается глобальная разрешимость задачи Коши для многомерного уравнения тонких плёнок с нелинейным конвективным переносом. Предварительно строится неотрицательное локальное обобщённое "сильное" решение задачи Неймана в ограниченной области, как предел последовательности решений соответствующих регуляризованных граничных задач. Устанавливается конечность скорости распространения носителей произвольных "сильных" решений задачи Неймана. Используя это свойство, строится неотрицательное глобальное "сильное" решение задачи Коши с произвольной финитной начальной функцией при оптимальных условиях на параметры нелинейности уравнения.

2000 MSC. 35K65, 35K35, 35Q35, 35G25, 35B45.

Ключевые слова и фразы. Уравнение тонких плёнок, конвекция, задача Неймана, задача Коши, регуляризованная граничная задача, энтропийная и энергетическая априорные оценки, распространение носителя.

1. Введение и формулировка основных результатов

В настоящей работе изучается вырождающееся параболическое уравнение четвёртого порядка

$$u_t + \operatorname{div}\left(|u|^n \nabla\Delta u - |u|^m \nabla u\right) = \overrightarrow{\chi} \cdot \nabla b(u),\ (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^N, \qquad (1.1)$$

где $u = u(t,x), n > 0, m \in \mathbb{R}^1, b(z) \in W^1_{1,loc}(\mathbb{R}^1), \overrightarrow{\chi} \in \mathbb{R}^N$. Уравнение (1.1) является характерным представителем широкого класса нелинейных уравнений структуры:

$$u_t + \operatorname{div}\left(f(u)\nabla\Delta u + \nabla A(u)\right) = g(t,x,u,\nabla u), \qquad (1.2)$$

Статья поступила в редакцию 4.03.2004
Второй автор частично поддержан проектом НИР "Дослідження задач з вільними межами для квазілінійних параболічних рівнянь та вивчення асимптотичної поведінки розв'язків задач Діріхле на власні значення в областях складної структури" НАН Украины.

возникающих при моделировании различных процессов в теории упругих деформаций, динамике жидкостей и бинарных смесей [2, 6, 8, 9, 16, 18]. Например, уравнение (1.1) с $b(u) = 0$ описывает эволюцию жидкой плёнки, распространяющейся по твёрдой поверхности под действием сил поверхностного натяжения, вязкости и (при $m = n$) гравитации. Отметим, что при $m < 0$ член второго порядка в (1.1) соответствует межмолекулярным Ван-дер-Ваальсовым силам, а при $m > 0$ $(m \neq n)$ — внутренним диффузионным силам. Член четвёртого порядка в (1.1) описывает влияние капиллярных сил поверхностного натяжения. Показатель $n > 0$ характеризует поведение жидкости на линии её контакта с твёрдой поверхностью. Так, например, случай $n = 3$ соответствует контакту без проскальзывания, а $n \in (0, 3)$ соответствует движению жидкости с частичным проскальзыванием. Случай $n = m = 1$ описывает изменение размера области, занятой жидкостью в полупространственной ячейке Hele-Shaw в вязком режиме [23]. Случай $n = 1,\ m = 0$ соответствует главному члену при $u \to 0$ в уравнении Cahn-Hilliard для бинарных смесей с логарифмической свободной энергией:

$$u_t + \operatorname{div}\left[u(1-u)\nabla\left\{\Delta u - \ln\tfrac{u}{1-u}\right\}\right] = 0.$$

Конвективное слагаемого в (1.1) описывает действие различных потенциалов, например, гравитации на наклонной плоскости ($\overrightarrow{\chi} b(u) = (u^n, 0, 0)$), поверхностного натяжения, обусловленного изменениями температурных режимов ($\overrightarrow{\chi} b(u) = (-u^{n-1}, 0, 0)$) [6, 7, 10] и т. п.

Математическое исследование вырождающихся уравнений четвёртого порядка типа тонких плёнок было начато в работе F. Bernis и A. Friedman [5], в которой, в частности, построено неотрицательное обобщённое решение задачи Неймана с произвольной неотрицательной начальной функцией для одномерного уравнения:

$$u_t + \operatorname{div}(|u|^n \nabla\Delta u) = 0. \tag{1.3}$$

В дальнейшем были построены неотрицательные обобщённые решения краевых задач для многомерного уравнения (1.3), описан ряд зависящих от параметров n, N качественных свойств построенных решений (например, свойства конечности скорости и временной задержки распространения носителей решений, сжатия носителя и т. д.) [1, 3, 4, 11, 13, 19, 20]. В работе [18] построены неотрицательные решения задачи Неймана для (1.2) с $g = g(t, x, u)$, имеющей не более чем линейный рост по u, $|A'| \leqslant const < \infty$ и $f(u)$, имеющей степенной рост в окрестности $\{u = 0\}$. В случае $g = g(t, x, u) \sim |u|^{\lambda-1}u$ $(\lambda > 0)$, $A'(u) = -|u|^m$ и $f(u) = |u|^n$ уравнение (1.2) изучалось в [25, 26].

В работе [14] для многомерного уравнения (1.1) с $b(u)=0$ построены неотрицательные обобщённые решения, найдены условия на параметры n,m, гарантирующие конечность и бесконечность скорости распространения возмущений, а также точная асимптотика движения носителя решения.

В [6, 7, 10] исследовалась устойчивость решений типа бегущей волны для одномерного уравнения (1.1) при $n=m=3$, $\chi=1$ и $b(u)=u^3-u^2$. В [17] для одномерного уравнения (1.1) без диффузионного слагаемого при $n\in(0,3)$, $\lambda>\max\left\{\frac{3}{4}n-1,\frac{1}{8}\right\}$, $b(u)$ из (1.6) построено неотрицательное локальное обобщённое решение, а при дополнительном условии $\lambda<\frac{9}{2}$ — неотрицательное глобальное обобщённое решение задачи Коши. Там же доказано свойство конечности скорости распространения носителя и найдена её оценка сверху при больших и малых временах.

Основными результатами данной работы являются построение при $N\leqslant 3$, $m>0$, $\frac{1}{8}<n<2$ неотрицательного глобального "сильного" (энтропийного) обобщённого решения задачи Коши:

$$
(C)\begin{cases}
u_t+\operatorname{div}(u^n\nabla\Delta u-u^m\nabla u)=\overrightarrow{\chi}\cdot\nabla b(u),\ (t,x)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^N, & (1.4)\\
u(0,x)=u_0(x)\in H^1(\mathbb{R}^N),\ u_0\geqslant 0,\ \operatorname{supp}u_0-\text{компакт}, & (1.5)\\
|b'(z)|\leqslant c\,|z|^{\lambda-1}\ \forall\, z\in\mathbb{R}^1, b(0)=0,\lambda>0,c>0, & (1.6)
\end{cases}
$$

и доказательство конечности скорости распространения носителя этого решения. В последующей публикации будет приведено описание эволюции носителя решения при больших и малых временах, установлены в определённом смысле точные оценки сверху правого и левого (по отношению к направлению вектора конвекции) фронтов носителя решения.

Замечание 1.1. Метод изучения задачи (C) не связан с модельностью формы уравнения (1.4) и легко может быть адаптирован к уравнениям более общей структуры, в частности, на случай более общего конвективного переноса $b=b(t,x,u)$, не обладающего периодической структурой по пространственной переменной x.

Наряду с задачей (C) в работе рассматривается также задача Неймана для уравнения (1.4):

$$
(N)\begin{cases}
u_t+\operatorname{div}\left(u^n\nabla\Delta u-u^m\nabla u\right)=\overrightarrow{\chi}\cdot\nabla b(u)\ \text{в}\ Q_T=(0,T)\times\Omega, & (1.7)\\
\nabla u\cdot\vec{n}=\nabla\Delta u\cdot\vec{n}=0\ \text{на}\ (0,T)\times\partial\Omega, & (1.8)\\
u(0,x)=u_0(x)\ \text{в}\ \Omega, & (1.9)
\end{cases}
$$

где $b(z)$ из (1.6), Ω — произвольная ограниченная связная область в $\mathbb{R}^N$ ($N\leqslant 3$) с границей $\partial\Omega$ класса $C^{1,1}$, $\vec{n}=\vec{n}(x)$ — единичный вектор внешней нормали к $\partial\Omega$ в точке x.

1.1. Условные обозначения и основные предположения

Множества, вектора и вспомогательные функции: $Q_{t_1}^{t_2} = (t_1, t_2) \times \Omega$, $B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^N : |x - x_0| < r\}$; для $N \times N$ – матрицы A и векторов $a, b \in \mathbb{R}^N$ определим $\langle a, A, b\rangle := \sum\limits_{i,j=1}^{N} a_i A_{ij} b_j$, $a \cdot b := \sum\limits_{i=1}^{N} a_i b_i$; χ_A — характеристическая функция множества A; для произвольной измеримой функции $v(t, x)$ определим множество положительности

$$\mathrm{P} := \mathrm{P}(v) = \{v > 0\} = \{(t, x) \in Dom(v) : v(t, x) > 0\}; \tag{1.10}$$

через $\overline{\overline{o}}_\delta(1)$ будем обозначать величины $f(\delta)$, которые удовлетворяют условию $\lim\limits_{\delta \to 0} |f(\delta)| = 0$;

$$\mathcal{M}_\gamma(z) := \begin{cases} z^{\frac{\gamma+1}{2}}, \text{ если } \gamma \neq -1, \\ \ln z, \text{ если } \gamma = -1. \end{cases} \tag{1.11}$$

Обозначения функциональных пространств:
$C^k(\Omega)$ — пространство k-раз непрерывно-дифференцируемых в области Ω функций, $C_c^k(\Omega) := \{v \in C^k(\Omega) : \operatorname{supp} v \subset \Omega\}$,
$L^p(\Omega)$ — банахово пространство функций, измеримых в Ω и суммируемых по Лебегу со степенью $p \geqslant 1$,
$L^{p-}(\Omega) := \{v \in L^1(\Omega) : v \in L^{p-\varepsilon}(\Omega)$ для произвольного $0 < \varepsilon < p-1\}$,
$W_p^k(\Omega) := \{v : D^\alpha v \in L^p(\Omega) \, \forall |\alpha| \leqslant k\}$ — пространство Соболева, $H^k(\Omega) := W_2^k(\Omega)$, $H_*^2(\Omega) := \{v \in H^2(\Omega) : \nabla v \cdot \vec{n} = 0$ п. в. на $\partial\Omega\}$,
X^* — пространство сопряжённое к банахову пространству X,
$\langle w, v\rangle_{X^*, X} = \langle w, v\rangle$ — спаривание элементов пространств X^* и X,
$L^p(0, T; X)$ — пространство (классов) функций $v(t, .)$ измеримых по Лебегу, принимающих значения из X и таких, что функция $\|v(t, .)\|_X^p$ интегрируема на $(0, T)$,
$X_{loc}(\Omega)$ — пространство функций, принадлежащих пространству $X(\Omega')$ для произвольной ограниченной подобласти $\Omega' : \overline{\Omega'} \subset \Omega$,
$X \Subset Y$ — пространство X компактно вкладывается в пространство Y.

Операторы: $\operatorname{div} \overrightarrow{F} := \sum\limits_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i} F_i(x)$ — дивергенция векторного поля $\overrightarrow{F}$, $D^2 v$ — тензор вторых производных скалярной функции $v \in H^2(\Omega)$, $D\overrightarrow{F} := \nabla \bullet \overrightarrow{F}$ — тензорное произведение вектора ∇ на векторное поле $\overrightarrow{F}$.

Меры: $\mathfrak{L}^N$ — N-мерная мера Лебега, $\mathcal{H}^{N-1}$ — $(N-1)$-мерная мера Хаусдорфа.

Виды постоянных: C, C_i $(c,\ c_i)$ — положительные постоянные, зависящие от всех известных параметров задачи (N) (не зависящие от начальной функции u_0 и области Ω); $C(\Omega)$, $C_i(\Omega)$ ($c(u_0)$, $c_i(u_0)$) — положительные постоянные, зависящие от известных параметров задачи (N), а также от области Ω (от u_0) и не зависящие от u_0 (от Ω); d, d_i — положительные постоянные, не зависящие ни от параметров задачи (N), ни от u_0, ни от Ω.

Интегрирование: в ситуациях, где из контекста понятно, по какой области проводится интегрирование, соответствующие дифференциалы будем опускать.

Введём множество $\Delta_{n,\lambda} := \left(\max\left\{\frac{1}{2} - n, -\lambda\right\}, \min\left\{\frac{n+1}{3}, 2 - n\right\}\right) \setminus \{0, -1\}$ и обозначим:

$$\tilde{\Delta}_{n,\lambda} := \Delta_{n,\lambda} \text{ при } N < 3,\ \tilde{\Delta}_{n,\lambda} := \Delta_{n,\lambda} \cap (-2, +\infty) \text{ при } N = 3. \tag{1.12}$$

В качестве начальных функций в задаче (N) будем допускать такие функции $u_0(x)$, что

$$0 \leqslant u_0(x) \in H^1(\Omega) \cap \left\{ v : \int\limits_{\Omega} |v|^{\alpha+1} < \infty \right\} \cap \left\{ v : \int\limits_{\Omega} \Psi_0(v) < \infty \right\} \tag{1.13}$$

для определённых $\alpha \in \tilde{\Delta}_{n,\lambda}$. Здесь функция

$$\Psi_0(z) := \begin{cases} \frac{z^{m-n+2}}{(m-n+1)(m-n+2)} + \frac{R^{m-n+1}}{m-n+2} - \frac{R^{m-n+1}}{m-n+1} z, m - n + 2 \neq 0, 1, \\ -\ln z + z - 1,\ m - n + 2 = 0, \\ z \ln z - z + 1,\ m - n + 2 = 1, \end{cases} \tag{1.14}$$

где $R = 0$, если $m - n + 1 > 0$ и $R = 1$, если $m - n + 1 < 0$.

1.2. Формулировка основных результатов

Сначала устанавливается разрешимость задачи (N).

Определение 1.1. *Пусть $m > -1$, $n > 0$, $\lambda > 0$. Следуя концепции обобщённого решения из* [13, 14], *будем называть неотрицательную функцию $u(t, x) \in L^\infty(0, T;\ H^1(\Omega))$ решением задачи (N), если*

(i) $\nabla b(u) \in L^2(0, T; (W_q^1(\Omega))^*)$ $\left(q = \frac{q'}{q'-1}\right)$ для любого $q' \in \Delta_1 := \left(1, \frac{4N}{2N+n(N-2)}\right)$ ($\Delta_1 := \{2\}$, если $N = 1$) и существует вектор-функция $\overrightarrow{J} \in L^2(0, T; L^{q'}(\Omega; \mathbb{R}^N))$ $\forall\, q' \in \Delta_1$ такая, что $u_t = -\operatorname{div} \overrightarrow{J} + \overrightarrow{\chi} \cdot \nabla b(u)$ в $L^2(0, T; (W_q^1(\Omega))^*)$;

(ii) $\chi_{\mathrm{P}} u^{n-2} |\nabla u|^3$, $\chi_{\mathrm{P}} u^{n-1} |\nabla u|^2$, $u^n |\nabla u|$, u^{m+1} и $b(u)$ принадлежат пространству $L^1(0, T; L^1(\Omega))$, где $P := P(u)$ из (1.10);

(iii) $u(t,x)$ удовлетворяет граничным условиям (1.8) и является решением уравнения (1.7) в следующем смысле:

$$\int\limits_0^T \langle u_t(t), \zeta(t)\rangle\, dt - \int\limits_0^T \langle \overrightarrow{\chi} \cdot \nabla b(u), \zeta\rangle\, dt = \tfrac{n(n-1)}{2} \iint\limits_{\mathrm{P}} u^{n-2} |\nabla u|^2 \nabla u\, \nabla\zeta +$$
$$+ \tfrac{n}{2} \iint\limits_{\mathrm{P}} u^{n-1} |\nabla u|^2 \Delta\zeta + n \iint\limits_{\mathrm{P}} u^{n-1} \left\langle \nabla u, D^2\zeta, \nabla u \right\rangle +$$
$$+ \iint\limits_{Q_T} u^n \nabla u \nabla \Delta\zeta + \tfrac{1}{m+1} \iint\limits_{Q_T} u^{m+1} \Delta\zeta =: \mathcal{U}^{(T)}(u,\zeta) \quad (1.15)$$

$\forall\, \zeta \in C^3(\overline{Q}_T)\colon \nabla\zeta \cdot \vec{n} = 0$ на $(0,T)\times\partial\Omega$;

(iv) $u(t,x)$ удовлетворяет начальному условию (1.9) в том смысле, что $u(t,.) \underset{t\to 0}{\Rightarrow} u_0(.)$ в $L^2(\Omega)$.

Теорема 1.1. *Пусть $N \leqslant 3$ и параметры n, m, λ удовлетворяют соотношениям:*

$$\begin{aligned} &m > -1,\ n > \tfrac{1}{8},\ \lambda > \max\left\{\tfrac{1}{8}, \tfrac{3n-1}{7}, n-2, n-m-1\right\};\\ &n < 4 \text{ и } \lambda < \min\left\{\tfrac{4n+7}{3}, 4\right\},\ \text{если } N = 3. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Пусть параметр $\alpha \in \tilde{\Delta}_{n,\lambda}$ ($\tilde{\Delta}_{n,\lambda}$ из (1.12)) удовлетворяет также соотношениям:

$$\lambda > \max\left\{\tfrac{3(\alpha+n)-1}{4}, (n-m-1)_+\right\},\ \lambda < \alpha + n + 2 \text{ при } N = 3 \quad (1.17)$$

(легко убедиться, что для любых n, m, λ из (1.16) множество таких α не пусто), и пусть начальная функция $u_0 \geqslant 0$ удовлетворяет условию (1.13) с этим α. Тогда существует решение $u(t,x)$ задачи (N) в области $[0,T_{loc}] \times \Omega$ ($T_{loc} > 0$ зависит от известных параметров задачи (N)), которое обладает следующими свойствами:

(i) $\Psi_0(u) \in L^\infty(0,T_{loc}; L^1(\Omega))$ и $u(t,x) > 0$ п. в. в Ω для почти всех $t \in [0,T_{loc}]$, если $m - n + 2 \leqslant 0$;

(ii) если $\alpha + m + 1 > 0$, то $\mathcal{M}_{\alpha+m}(u) \in L^2(0,T_{loc}; H^1(\Omega))$, где $\mathcal{M}_\gamma(z)$ из (1.11);

(iii) если $\alpha + m + 1 \leqslant 0$, то $\mathcal{M}_{\alpha+m}(u(t,x)) \in L^2_{loc}(\Omega)$ и $u(t,x) > 0$ п. в. в Ω для почти всех $t \in (0,T_{loc})$, а также $\nabla\mathcal{M}_{\alpha+m}(u) = u^{\frac{\alpha+m-1}{2}}\nabla u \in L^2(Q_{T_{loc}})$, причём $L^2_{loc}(\Omega)$ можно заменить на $L^2(\Omega)$, если область Ω — выпуклая;

(iv) $u^{m+1} \in L^1(0,T_{loc}; W^1_1(\Omega))$, если $m > 0$, $u^{\frac{\alpha+n+1}{4}} \in L^4(0,T_{loc}; W^1_4(\Omega))$, $u^{\frac{\alpha+n+1}{2}} \in L^2(0,T_{loc}; H^2(\Omega))$, $u^{\lambda+\alpha} \in L^1(Q_{T_{loc}})$ (очевидно, из (1.16) и (1.12) следует, что $\lambda + \alpha > 0$);

(v) существуют положительные постоянные c_1, $C_2(\Omega)$ такие, что для п. в. $T \leqslant T_{loc}$ имеет место неравенство:

$$c_1^{-1}\iint\limits_{Q_T}\Big\{\big|D^2 u^{\frac{\alpha+n+1}{2}}\big|^2+\big|\nabla u^{\frac{\alpha+n+1}{4}}\big|^4+\big|\nabla\mathcal{M}_{\alpha+m}(u)\big|^2\Big\}+$$
$$+\tfrac{1}{\alpha(\alpha+1)}\int\limits_{\Omega}u^{\alpha+1}(T,x)\,dx\leqslant\tfrac{1}{\alpha(\alpha+1)}\int\limits_{\Omega}u_0^{\alpha+1}(x)dx+$$
$$+\int\limits_0^T\int\limits_{\partial\Omega}\overrightarrow{\chi}\cdot\vec{n}\,\mathcal{B}^{(\alpha)}(u)+C_2(\Omega)\iint\limits_{Q_T}u^{\alpha+n+1},\quad(1.18)$$

где $\mathcal{M}_\gamma(z)$ из (1.11), $\mathcal{B}^{(\alpha)}(z):=\frac{1}{\alpha}\int\limits_0^z b'(\tau)\tau^\alpha\,d\tau$, $C_2(\Omega)=0$, *если область Ω — выпуклая;*

(vi) для п. в. $0\leqslant t_1<t_2\leqslant T_{loc}$ справедлив следующий локальный вариант неравенства (1.18)*:*

$$\tfrac{1}{\alpha(\alpha+1)}\int\limits_{\Omega}\zeta^4u^{\alpha+1}(t_2,x)\,dx-\tfrac{1}{\alpha(\alpha+1)}\iint\limits_{Q_{t_1}^{t_2}}(\zeta^4)_t u^{\alpha+1}+$$
$$+c_3^{-1}\iint\limits_{Q_{t_1}^{t_2}}\zeta^4\left\{\big|\nabla u^{\frac{\alpha+m+1}{2}}\big|^2+\big|\nabla u^{\frac{\alpha+n+1}{4}}\big|^4+\big|D^2u^{\frac{\alpha+n+1}{2}}\big|^2\right\}\leqslant$$
$$\tfrac{1}{\alpha(\alpha+1)}\int\limits_{\Omega}\zeta^4u^{\alpha+1}(t_1,x)dx+c_3\int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{\{\zeta(t)>0\}}u^{\alpha+m+1}(\zeta^2\,|\nabla\zeta|^2+\zeta^3\,|\Delta\zeta|)+$$
$$+c_3\int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{\{\zeta(t)>0\}}u^{\alpha+n+1}(|\nabla\zeta|^4+\zeta^2\,|\Delta\zeta|^2)-\int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{\{\zeta(t)>0\}}\overrightarrow{\chi}\mathcal{B}^{(\alpha)}(u)\nabla\zeta^4,\tag{1.19}$$

если $\alpha\in\tilde{\Delta}_{n,\lambda}\cap(-(m+1),+\infty)$, где $\zeta\in C^2(\overline{Q}_{t_1}^{t_2})$ — произвольная неотрицательная срезающая функция такая, что $\operatorname{supp}\zeta\subset[t_1,t_2]\times\Omega$, *причём $t_1=0$ и $\zeta_t(t,x)\leqslant 0$, если $\alpha+1<0$;*

(vii) для почти всех $0\leqslant t_1<t_2\leqslant T_{loc}$ ($t_1=0$, если $m-n+2\leqslant 0$) справедливо неравенство:

$$\tilde{\mathcal{E}}_\Omega(u(t_2))\leqslant\tilde{\mathcal{E}}_\Omega(u(t_1))+\int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{\partial\Omega}\overrightarrow{\chi}\cdot\vec{n}\,\tilde{\Psi}_0(u)-\iint\limits_{\mathrm{P}}\overrightarrow{\chi}\,b'(u)\nabla u\Delta u,\quad(1.20)$$

где $\tilde{\mathcal{E}}_\Omega(u(t)) := \int\limits_\Omega [\frac{1}{2}|\nabla u|^2 + \Psi_0(u)]dx, \tilde{\Psi}_0(z) := \int\limits_0^z b'(\tau)\Psi_0'(\tau)d\tau$, $\Psi_0(z)$ *из* (1.14), $P := P(u)$ *из* (1.10).

Замечание 1.2. Если $n < 3$ и $0 < m - n + 2$ ($\leqslant 6$ при $N = 3$), то $\tilde{\Delta}_{n,\lambda} \cap (-1, +\infty) \neq \emptyset$ и произвольная неотрицательная функция $u_0(x) \in H^1(\Omega)$ является допустимой в теореме 1.1. Если же $n \geqslant 3$ или $m-n+2 \leqslant 0$, то условие (1.13) приводит к требованию интегрируемости $u_0(x)$ в некоторой отрицательной степени, для чего необходимо, в частности, чтобы $\mathrm{mes}\{\Omega \backslash \mathrm{supp}\, u_0\} = 0$.

Следствие 1.1. *Пусть* $\frac{1}{8} < n < 2$, $m - n + 1 > 0$ *и*

$$\max\bigl\{1, \tfrac{3n}{4}, n - m + \tfrac{1}{2} + \bigl(\tfrac{1-2n}{4}\bigr)_+\bigr\} < \lambda\bigl(< \min\bigl\{\tfrac{4n+7}{3}, 4\bigr\},\ N = 3\bigr). \tag{1.21}$$

Тогда $u(t,x) \equiv 0$ *является единственным решением в смысле определения* 1.1 *задачи* (N) *с* $u_0(x) = 0$.

Доказательство следствия 1.1 приводится в приложении A.

При дополнительных ограничениях на параметры нелинейности уравнения (1.7) устанавливается свойство конечности скорости распространения носителя решения, построенного в теореме 1.1.

Теорема 1.2. *Пусть* $N \in \{1, 2, 3\}$ *и*

$$\begin{gathered} m > 0,\ \tfrac{1}{8} < n < 2;\ 1 < \lambda < \mu + 1 + \max\{n + \mu, m\} \ \text{при } N < 3, \\ 1 < \lambda < \min\bigl\{\tfrac{4n+7}{3}, 4\bigr\} \ \text{при } N = 3;\ \mu := \tfrac{2}{N}\min\bigl\{\tfrac{n+4}{3}, 3 - n\bigr\} \end{gathered} \tag{1.22}$$

(в этих предположениях интервал $\tilde{\Delta}_{n,\lambda} \cap (0, +\infty)$*, как несложно проверить, не пуст), и* $0 \leqslant u_0(x)$ *— произвольная функция из* $H^1(\Omega) \cap L^{m-n+2}(\Omega)$ *такая, что* $\mathrm{supp}\, u_0(x) \subset B(0, \tilde{R}_0)$*, где* $\tilde{R}_0 > 0, R_0 > 0 : B(0, \tilde{R}_0 + 3R_0) \Subset \Omega$*. Тогда существуют возрастающая функция* $\Gamma(t) \in C[0, T_{loc}]$*,* $\Gamma(0) = 0$ *и* $\tilde{T} := \tilde{T}(R_0) > 0$*, такие, что решение* $u(t,x)$*, построенное в теореме* 1.1*, представимо в виде* $u(t,x) = u_1(t,x) + u_2(t,x)$*, где* u_1 *— решение задачи* (N) *с указанной выше начальной функцией* $u_0(x)$*, а* u_2 *— решение однородной (с* $u_0(x) \equiv 0$*) задачи* (N)*, причём:*

$$\begin{gathered} \mathrm{supp}\, u_1(t, .) \subset B(0, \tilde{R}_0 + C\,\Gamma(t)) \Subset B(0, \tilde{R}_0 + R_0)\ \forall\, t \leqslant T_1, \\ \mathrm{supp}\, u_2(t, .) \Subset \Omega \backslash B(0, \tilde{R}_0 + 2R_0)\ \forall\, t \leqslant T_1 := \min\{\tilde{T}, T_{loc}\}, \end{gathered}$$

где T_{loc} *из теоремы* 1.1*. Кроме того, если параметры* λ*,* m*,* n *дополнительно удовлетворяют условиям* (1.21)*, то* $u_2(t,x) \equiv 0$*.*

Теоремы 1.1 и 1.2 позволяют построить глобальное решение задачи Коши (C).

Определение 1.2. *Пусть* $N \leqslant 3,\ m > -1,\ n > 0,\ \lambda > 0$. *Будем называть неотрицательную функцию* $u(t,x) \in L^{\infty}_{loc}(\mathbb{R}^+; H^1_{loc}(\mathbb{R}^N))$ *решением задачи* (C), *если*

(i) $\chi_{\mathrm{P}} u^{n-2}|\nabla u|^3,\ \chi_{\mathrm{P}} u^{n-1}|\nabla u|^2,\ u^n|\nabla u|,\ u^{m+1}$ *и* $b(u)$ *принадлежат пространству* $L^1_{loc}([0,\infty); L^1_{loc}(\mathbb{R}^N))$, *где* $P = P(u)$ *из* (1.10);

(ii) для любой функции $\zeta \in C^3_c([0,\infty) \times \mathbb{R}^N)$ *имеет место равенство:*

$$-\int\limits_0^{\infty}\int\limits_{\mathbb{R}^N} u\zeta_t - \int\limits_{\mathbb{R}^N} u_0\zeta(0,x) + \int\limits_0^{\infty}\int\limits_{\mathbb{R}^N} \overrightarrow{\chi} \cdot \nabla\zeta\, b(u) = \mathcal{U}^{(\infty)}(u,\zeta),$$

где $\mathcal{U}^{(T)}(u,\zeta)$ *из* (1.15).

Теорема 1.3. *Пусть* $N \in \{1,2,3\},\ m > 0,\ \frac{1}{8} < n < 2$,

$$\begin{aligned} &\max\left\{1, \tfrac{3n-1}{4}\right\} < \lambda < \tfrac{5N+8}{4N} + \min\left\{n, \tfrac{5}{4}\right\}, \ \text{если } N < 3, \\ &\max\left\{1, \tfrac{3n-1}{4}\right\} < \lambda < 2 + \min\left\{n, \tfrac{5}{4}\right\}, \ \text{если } N = 3, \end{aligned} \tag{1.23}$$

и $u_0(x) \in H^1(\mathbb{R}^N) \cap L^{m-n+2}(\mathbb{R}^N)$ — *неотрицательная функция с* $\operatorname{supp} u_0 \subset B(0,R_0), R_0 < +\infty$. *Тогда существует глобальное решение* $u(t,x)$ *задачи* (C) *такое, что*

(i) $\operatorname{supp} u(t,.)$ *компактен* $\forall\, t > 0$ *и существует возрастающая функция* $\Gamma(t) \in C[0,+\infty), \Gamma(0) = 0$ *такая, что* $\operatorname{supp} u(t,.) \subset B(0, R_0 + c(u_0)\Gamma(t))\ \forall\, t > 0$;

(ii) для произвольного $\alpha \in \tilde{\Delta}_{n,\lambda} \cap (0,+\infty)$, *дополнительно удовлетворяющего условиям:*

$$\begin{aligned} &\max\left\{\tfrac{3(\alpha+n)-1}{4}, 1\right\} < \lambda \leqslant \tfrac{N+2}{N} + \tfrac{3(\alpha+n)}{4} \ \text{при } N < 3, \\ &\max\left\{\tfrac{3(\alpha+n)-1}{4}, 1\right\} < \lambda \leqslant \tfrac{3(\alpha+n)+7}{4} \ \text{при } N = 3 \end{aligned} \tag{1.24}$$

(*легко проверить, что в предположениях данной теоремы множество таких* α *не пусто*), *имеют место включения:*

$$\begin{aligned} &u^{m-n+2} \in L^{\infty}_{loc}([0,\infty); L^1(\mathbb{R}^N)), u^{\frac{\alpha+n+1}{4}} \in L^4_{loc}([0,\infty); W^1_4(\mathbb{R}^N)), \\ &u^{\frac{\alpha+n+1}{2}} \in L^2_{loc}([0,\infty); H^2(\mathbb{R}^N)), u^{\frac{\alpha+m+1}{2}} \in L^2_{loc}([0,\infty); H^1(\mathbb{R}^N)); \end{aligned}$$

(iii) для почти всех $0 \leqslant t_1 < t_2$ *справедливо неравенство* (1.19) *с* $\Omega = \mathbb{R}^N$ *и произвольной неотрицательной функцией* $\zeta \in C^2([t_1,t_2] \times \mathbb{R}^N)$;

(iv) $u(t,.) \underset{t\to 0}{\rightrightarrows} u_0(.)$ *в* $L^2(\mathbb{R}^N)$.

Замечание 1.3. В случае $N = 1$, следуя методике из [3, 5], можно построить обобщённое решение $u(t,x) \in C([0,\infty)\times\mathbb{R}^1)\cap L^\infty(\mathbb{R}^+; H^1(\mathbb{R}^1))$ задачи (C) с компактным $\operatorname{supp} u(t,.)$ $\forall\, t \geqslant 0$ при $m > 0,\ 0 < n < 2$ и $\max\left\{1, \frac{3n-1}{4}\right\} < \lambda < \frac{9}{2}$ такое, что $u \in C^{4,1}(\mathrm{P})$, $u^{\frac{n}{2}}(u_{xxx} - u^{m-n}u_x) \in L^2(\mathrm{P})$, $\mathcal{B}(u) := \int\limits_0^u b'(\tau)\,d\tau \in L^1(\mathbb{R}^+; L^1(\mathbb{R}^1))$ и

$$\int\limits_0^\infty \int\limits_{\mathbb{R}^1} u\zeta_t + \iint\limits_{\mathrm{P}} u^n(u_{xxx} - u^{m-n}u_x)\zeta_x - \int\limits_0^\infty \int\limits_{\mathbb{R}^1} \mathcal{B}(u)\zeta_x = 0,$$

где $\mathrm{P} = \mathrm{P}(u)$ из (1.10), $\zeta \in C_c^1((0,\infty)\times\mathbb{R}^1)$ — произвольная срезающая функция. Кроме того, используя предложенный в [17] подход, связанный с периодическими аппроксимациями, можно построить обобщённое решение задачи (C) при $m > -1,\ n \in (0,2)$, $\lambda \in (\max\{\frac{3n}{4} - 1, \frac{1}{8}\}, \frac{9}{2})$ без предположения о финитности начальной функции.

2. Доказательство теоремы 1.1: априорные оценки

2.1. Регуляризованная задача Неймана

Для произвольных $\delta > 0, \sigma > 0, \varepsilon > 0$ и $\gamma > 0$ введём функции:

$$m_\gamma(z) := m_{\delta\sigma}(z) + \gamma := \frac{|z|^{n+s}}{|z|^s + \delta|z|^n + \sigma|z|^{n+s}} + \gamma > 0,$$
$$b'_{\delta\sigma}(z) := \frac{b'(z)}{1 + \delta(\,|z|^{\lambda-1} + |z|^{\lambda-s-1}) + \sigma(\,|z|^{\lambda-1} + |z|^{\lambda+\beta-1})},$$
$$\Psi''_\varepsilon(z) := \frac{|z|^{m-n}}{1 + \varepsilon|z|^{m-n}},\ u_{0\delta\sigma}(x) := u_0(x) + \delta^{\theta_1} + \sigma^{\theta_2},$$

где
$$0 < \theta_1 < \frac{2}{2s-3},\ \theta_2 > 0,\ \beta > \max\{2, m-n+1\}, \tag{2.1}$$
$$s > \max\{n, 4\},\ \text{если } N < 3 \text{ и } s > \max\{n, 8\},\ \text{если } N = 3. \tag{2.2}$$

Рассмотрим четырёхпараметрическое семейство граничных задач Неймана:

$$(N_{\gamma\varepsilon\delta\sigma})\ \begin{cases} u_t + \operatorname{div}\left\{m_\gamma(u)\left[\nabla\Delta u - \Psi''_\varepsilon(u)\nabla u\right]\right\} = \overrightarrow{\chi}\cdot b'_{\delta\sigma}(u)\nabla u \text{ в } Q_T, \\ \nabla u \cdot \vec{n} = \nabla\Delta u \cdot \vec{n} = 0 \text{ на } (0,T)\times\partial\Omega, \\ u(0,x) = u_{0\delta\sigma}(x) \text{ в } \Omega. \end{cases}$$

Для произвольных значений параметров $\gamma > 0,\ \varepsilon > 0,\ \delta > 0,\ \sigma > 0$ аналогично [16, 18] методом Фаэдо-Галёркина строится глобальное регулярное решение $u_{\gamma\varepsilon\delta\sigma}$ регуляризованной задачи $(N_{\gamma\varepsilon\delta\sigma})$, которое, естественно, не обладает свойством неотрицательности. Использование методики, предложенной в [16, 18], позволяет также осуществить предельный переход по $\gamma \to 0$ и получить глобальное решение $u_{\varepsilon\delta\sigma}$ задачи $(N_{\varepsilon\delta\sigma})$ (являющейся задачей $(N_{\gamma\varepsilon\delta\sigma})$ с $\gamma = 0$), которое в силу условий (2.1), (2.2) на параметры регуляризаций $s,\ \beta$ является строго положительным для почти всех $t \geqslant 0$. В теореме A.1 (из приложения A) сформулировано следствие предельного перехода по $\varepsilon \to 0$, которое состоит в построении глобального неотрицательного решения $u_{\delta\sigma}(t,x)$ задачи $(N_{\delta\sigma})$ (частный случай задачи $(N_{\varepsilon\delta\sigma})$ с $\varepsilon = 0$). Доказательство этой теоремы проводится по схеме, предложенной в [14], и нами не приводится. Основная часть доказательства теоремы 1.1 состоит теперь в переходе к пределу по $\delta \to 0,\ \sigma \to 0$. Осуществление этого перехода связано с получением новых, не зависящих от $\delta > 0,\ \sigma > 0$, априорных оценок решений $u_{\delta\sigma}$.

2.2. Основная локальная априорная оценка $u_{\delta\sigma}$ равномерная относительно δ и σ

Начнём с двух простых неравенств:

$$\iint\limits_{Q_T} u^\nu \leqslant \hat\gamma B_0 + c(\hat\gamma)\int\limits_0^T\Bigl(\int\limits_\Omega u^6\Bigr)^{\frac{\nu+3(\alpha+n+1)}{3(\alpha+n-\nu+9)}} + c_1\int\limits_0^T\Bigl(\int\limits_\Omega u^6\Bigr)^{\frac{\nu}{6}} \leqslant \hat\gamma B_0 +$$
$$+ c(\hat\gamma)R_1(h_1) + c_1 R_1(\tfrac{\nu}{2}) \quad \forall\,\hat\gamma > 0,\ B_0 := \iint\limits_{Q_T}\bigl|\nabla u^{\frac{\alpha+n+1}{4}}\bigr|^4, \tag{2.3}$$

где $R_1(s) := \int\limits_0^T \|u\|^{2s}_{H^1(\Omega)}dt,\ h_1 = \frac{\nu+3(\alpha+n+1)}{\alpha+n-\nu+9}$ и $6 < \nu < \alpha+n+9,\ N = 3$;

$$\iint\limits_{Q_T} u^\nu \leqslant \hat\gamma B_0 + c(\hat\gamma)R_2(h_2) + c_1 R_2(\tfrac{\nu}{m-n+2}) \quad \forall\,\hat\gamma > 0,\ B_0 \text{ из (2.3)}, \tag{2.4}$$

где $R_2(s) := \int\limits_0^T \|u\|^{s(m-n+2)}_{L^{m-n+2}(\Omega)}dt,\ h_2 = \frac{\nu+3(\alpha+n+1)}{3(\alpha+n+1-\nu)+4(m-n+2)}$ и $1 < m-n+2 < \nu < \alpha+n+1+\frac{4}{3}(m-n+2),\ N = 3$. Эти неравенства получаются применением интерполяционного неравенства Ниренберга-Гальярдо (лемма B.5) к функции $v = u^{\frac{\alpha+n+1}{4}}$ при $a = \frac{4\nu}{\alpha+n+1},\ d = 4,\ b = \frac{24}{\alpha+n+1}$ в случае (2.3) и при $a = \frac{4\nu}{\alpha+n+1},\ d = 4,\ b = \frac{4(m-n+2)}{\alpha+n+1}$ в случае (2.4), последующим интегрированием по времени и использованием неравенства Юнга.

Теперь обращаемся к неравенствам (A.2), (A.4) из теоремы A.1. Оценим последовательно слагаемые в правой части этих неравенств (отметим, что все дальнейшие вычисления будут проводиться для

$N=3$; в случае $N<3$ необходимые оценки правых частей вытекают непосредственно из вложений $H^1(\Omega)\subset L^\infty(\Omega)$, если $N=1$, $H^1(\Omega)\subset L^q(\Omega)\ \forall q<\infty$, если $N=2$). Применяя неравенство Коши, получаем:

$$B_1 := \iint\limits_{Q_T} m_{\delta\sigma}(u_{\delta\sigma})\big|\nabla u_{\delta\sigma}\big|^2 \leqslant c\iint\limits_{Q_T} u_{\delta\sigma}^{\frac{n-\alpha+3}{2}}|\nabla u_{\delta\sigma}^{\frac{\alpha+n+1}{4}}|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \gamma B_0 + c(\gamma)B_1^{(1)} \quad \forall\,\gamma>0,\ B_1^{(1)} := \iint\limits_{Q_T} u_{\delta\sigma}^{n-\alpha+3},\ B_0 \text{ из (2.3)}. \qquad (2.5)$$

В случае $0<n-\alpha+3\leqslant 6$ слагаемое $B_1^{(1)}$ оценивается по вложению $H^1(\Omega)\subset L^q(\Omega)\ \forall\,q\leqslant 6$: $B_1^{(1)}\leqslant C(\Omega)R_1(\frac{n-\alpha+3}{2})$, а в случае $0<n-\alpha+3\leqslant m-n+2$, $m-n+1>0$ по вложению $L^{m-n+2}(\Omega)\subset L^q(\Omega)\ \forall\,q\leqslant m-n+2$: $B_1^{(1)}\leqslant C(\Omega)R_2(\frac{n-\alpha+3}{m-n+2})$. Если же $6<n-\alpha+3<\alpha+n+9$ ($m-n+2<n-\alpha+3<\alpha+n+1+\frac{4}{3}(m-n+2)$, $m-n+1>0$), то $B_1^{(1)}$ оцениваем при помощи неравенства (2.3) ((2.4)): $B_1^{(1)}\leqslant\tilde\gamma B_0+c(\tilde\gamma)\{R_1(s_1)+R_1(s_2)\}$ ($\leqslant\tilde\gamma B_0+c(\tilde\gamma)\{R_2(s_3)+R_2(s_4)\}$), где $R_i(s)$ из (2.3), (2.4); $s_1=\frac{2(2n+\alpha+3)}{\alpha+3}$, $s_2=\frac{n-\alpha+3}{2}$, $s_3=\frac{n-\alpha+3}{m-n+2}$, $s_4=\frac{2n+\alpha+3}{3(\alpha-1)+2(m-n+2)}$. Подставляя полученные оценки в неравенство (2.5), находим:

$$B_1\leqslant\gamma_1B_0+C(\gamma_1,\Omega)\Big(\sum_{i=1,2}R_1(s_i)+\sum_{i=3,4}R_2(s_i)\Big)\ \forall\,\gamma_1>0, \qquad (2.6)$$

если параметр α удовлетворяет одному из соотношений:

$$-3<\alpha<n+3, \qquad (2.7)$$

$$-\tfrac{2}{3}(m-n+\tfrac{1}{2})<\alpha<n+3,\ m-n+1>0. \qquad (2.8)$$

При этом $\sum\limits_{i=1,2}R_1(s_i)$ присутствует только в случае (2.7) (кроме того, дополнительно отсутствует $R_1(s_1)$, если $n-3\leqslant\alpha<n+3$), а $\sum\limits_{i=3,4}R_2(s_i)$ присутствует только в случае (2.8) (и, кроме того, дополнительно отсутствует $R_2(s_4)$, если $2n-m+1\leqslant\alpha<n+3$).

Замечание 2.1. В дальнейшем, оценивая члены B_i из правых частей (A.2), (A.4), будем опускать простые вычисления, аналогичные тем, что заключены между оценками (2.5), (2.6).

Снова используя неравенства (2.3), (2.4), получаем:

$$|B_2| := \Big|\iint\limits_{Q_T}\overrightarrow{\chi}\,b'_{\delta\sigma}(u_{\delta\sigma})u_{\delta\sigma}\nabla u_{\delta\sigma}\Big| \leqslant c\iint\limits_{Q_T}u_{\delta\sigma}^{\frac{4\lambda-\alpha-n+3}{4}}\big|\nabla u_{\delta\sigma}^{\frac{\alpha+n+1}{4}}\big| \leqslant$$

$$\leqslant \gamma_2 B_0 + C(\gamma_2, \Omega)\Big(\sum_{i=5,6} R_1(s_i) + \sum_{i=7,8} R_2(s_i)\Big) \quad \forall\, \gamma_2 > 0, \quad (2.9)$$

если параметры $\alpha,\ \lambda$ удовлетворяют одному из соотношений:

$$\left(\tfrac{\alpha+n-3}{4}\right)_+ < \lambda < \alpha + n + 6, \qquad (2.10)$$

$$\left(\tfrac{\alpha+n-3}{4}\right)_+ < \lambda < \alpha + m + 2,\ m - n + 1 > 0. \qquad (2.11)$$

Здесь $B_0,\ R_i(s)$ из (2.3), (2.4); $s_5 = \frac{\lambda+2(\alpha+n)+3}{\alpha+n-\lambda+6}$, $s_6 = \frac{4\lambda-\alpha-n+3}{6}$, $s_7 = \frac{4\lambda-\alpha-n+3}{m-n+2}$, $s_8 = \frac{\lambda+2(\alpha+n)+3}{3(\alpha+m-\lambda+2)}$. Сумма $\sum\limits_{i=5,6} R_1(s_i)$ присутствует в (2.9) только в случае (2.10), а $\sum\limits_{i=7,8} R_2(s_i)$ — только в случае (2.11).

Учитывая (1.6), (1.14) и замечание 2.1, в случае $m - n + 2 \neq 1$, находим:

$$|B_3| := \left| \iint\limits_{Q_T} \overrightarrow{\chi}\, b'_{\delta\sigma}(u_{\delta\sigma}) \Psi'_0(u_{\delta\sigma}) \nabla u_{\delta\sigma} \right| \leqslant R^{\frac{4(m-n+1)}{3}} C(\gamma_3, \Omega) \sum_{i=13,14} R_1(s_i) +$$

$$+ \gamma_3 B_0 + C(\gamma_3, \Omega)\Big(\sum_{i=9,10} R_1(s_i) + \sum_{i=11,12} R_2(s_i)\Big) \quad \forall\, \gamma_3 > 0 \quad (2.12)$$

при выполнении одного из следующих условий:

$$n - m + \tfrac{n+\alpha-3}{4} < \lambda < 2n - m + \alpha + 6, \qquad (2.13)$$

$$n - m + \tfrac{n+\alpha-3}{4} < \lambda < \alpha + n + 2,\ m - n + 1 > 0, \qquad (2.14)$$

$$\tfrac{\alpha+n+1}{4} < \lambda < \alpha + n + 7,\ m - n + 1 < 0. \qquad (2.15)$$

Здесь $B_0,\ R_i(s)$ из (2.3), (2.4); $s_9 = \frac{n+m+\lambda+2\alpha+3}{2n-m-\lambda+\alpha+6}$, $s_{10} = \frac{4(\lambda+m)-5n-\alpha+3}{6}$, $s_{11} = \frac{4(\lambda+m)-5n-\alpha+3}{m-n+2}$, $s_{12} = \frac{n+m+\lambda+2\alpha+3}{3(\alpha+n+2-\lambda)}$, $s_{13} = \frac{\lambda+2(\alpha+n+1)}{n+\alpha-\lambda+7}$, $s_{14} = \frac{4\lambda-n-\alpha-1}{6}$. Причём сумма $\sum\limits_{i=9,10} R_1(s_i)$ в (2.12) присутствует только в случае (2.13), сумма $\sum\limits_{i=11,12} R_2(s_i)$ присутствует только в случае (2.14), а $\sum\limits_{i=13,14} R_1(s_i)$ — только в случае (2.15). Интегрируя в B_3 по частям и применяя теорему о следах, в дополнение к (2.12), получаем оценку:

$$|B_3| \leqslant C(\Omega) \left(R_1(s_{15}) + R^{m-n+1} R_1(s_{16})\right),\ m - n + 2 \neq 1 \qquad (2.16)$$

(R из (1.14), $s_{15} = \frac{\lambda+m-n+1}{2},\ s_{16} = \frac{\lambda}{2}$), справедливую при

$$(n - m - 1)_+ < \lambda \leqslant \min\{n - m + 3, 4\}. \qquad (2.17)$$

В случае $m-n+2=1$, используя неравенство $|\ln z| \leqslant d(\xi)(z^{-\xi}+z^{\xi})$ $\forall\,\xi>0$ и рассуждая так же, как при выводе неравенств (2.12), (2.16), получаем:

$$|B_3| \leqslant \gamma_3 B_0 + C(\gamma_3,\Omega)\sum_{i=17}^{20} R_1(s_i) \quad \forall\,\gamma_3>0,\ B_0 \text{ из } (2.3),$$
$$|B_3| \leqslant C(\Omega)\Big(\sum_{i=21,22} R_1(s_i) + R_1(s_{16})\Big),$$

соответственно, при $\xi+\frac{\alpha+n+1}{4}<\lambda<\alpha+n+7-\xi$ и при $\xi \leqslant \lambda < 4-\xi$. Здесь $R_i(s)$ из (2.3), (2.4); $s_{17}=\frac{\lambda+\xi+2(\alpha+n+1)}{n+\alpha-\lambda-\xi+7}$, $s_{18}=\frac{4\lambda-n-\alpha-1+4\xi}{6}$, $s_{19}=\frac{\lambda-\xi+2(\alpha+n+1)}{n+\alpha-\lambda+\xi+7}$, $s_{20}=\frac{4\lambda-n-\alpha-1-4\xi}{6}$, $s_{21}=\frac{\lambda+\xi}{2}$, $s_{22}=\frac{\lambda-\xi}{2}$.

Замечание 2.2. Объединяя условия (2.13)–(2.15), (2.17) и учитывая, что в случае $m-n+2=1$ параметр ξ из условия на λ может быть зафиксирован сколь угодно малым, заключаем, что для любого $\lambda \in ((n-m-1)_+, \alpha+n+2+(n-m+4)_+)$ справедлива, по крайней мере, одна из вышеприведенных оценок $|B_3|$.

Элементарные вычисления приводят к оценке:

$$\Big|b'_{\delta\sigma}(z)g^{(\alpha)}_{\delta\sigma}(z)\Big| \leqslant \frac{c\,z^{\lambda-1}}{1+\delta(z^{\lambda-1}+z^{\lambda-1-s})+\sigma(z^{\lambda-1}+z^{\lambda-1+\beta})}\Big|\tfrac{1}{\alpha}z^{\alpha}+\tfrac{\delta}{\alpha+n-s}z^{\alpha+n-s}+$$
$$+\tfrac{\sigma}{\alpha+n}z^{\alpha+n}\Big| \leqslant \begin{cases} \frac{\lambda}{|\alpha|}z^{\alpha+\lambda-1}+\frac{\lambda}{s-\alpha-n}z^{\alpha+n}+\frac{\lambda}{\alpha+n}z^{\alpha+n} & \forall z \leqslant 1,\\ \frac{\lambda}{|\alpha|}z^{\alpha+\lambda-1}+\frac{\lambda}{s-\alpha-n}z^{\alpha+n-s}+\frac{\lambda}{\alpha+n}z^{\alpha+n-\beta} & \forall z>1,\end{cases}$$

поэтому $\big|\,b'_{\delta\sigma}(z)g^{(\alpha)}_{\delta\sigma}(z)\big| \leqslant \frac{2\lambda}{|\alpha|}z^{\alpha+\lambda-1}+\frac{2\lambda s}{(s-\alpha-n)(\alpha+n)}$ $\forall\,z>0$, если $s>\alpha+n$ и $\beta \geqslant \alpha+n$. Следовательно, в силу условий (2.1), (2.2) и замечания 2.1, имеем:

$$|B_4| := \Big|\iint\limits_{Q_T} \overrightarrow{\chi}\, b'_{\delta\sigma}(u_{\delta\sigma})g^{(\alpha)}_{\delta\sigma}(u_{\delta\sigma})\nabla u_{\delta\sigma}\Big| \leqslant$$
$$\leqslant c\iint\limits_{Q_T} u_{\delta\sigma}^{\frac{4\lambda+3\alpha-n-1}{4}}\big|\nabla u_{\delta\sigma}^{\frac{\alpha+n+1}{4}}\big| + c\iint\limits_{Q_T}|\nabla u_{\delta\sigma}| \leqslant C(\Omega)R_1(\tfrac12)+\gamma_4 B_0+$$
$$+\,C(\gamma_4,\Omega)\Big(\sum_{i=23,24}R_1(s_i)+\sum_{i=25,26}R_2(s_i)\Big) \quad \forall\,\gamma_4>0, \qquad (2.18)$$

причём $\sum\limits_{i=23,24} R_1(s_i)$ присутствует только при $\frac{n-3\alpha+1}{4}<\lambda<n+7$, а $\sum\limits_{i=25,26} R_2(s_i)$ — только при $\frac{n-3\alpha+1}{4}<\lambda<m+3$, $m-n+1>0$.

Интегрируя в B_4 по частям, используя (1.6) и вложение $H^1(\Omega) \subset L^4(\partial\Omega)$ дополнительно к (2.18) получаем:

$$|B_4| \leqslant c \int_0^T \int_{\partial\Omega} \{u_{\delta\sigma}^{\lambda+\alpha} + u_{\delta\sigma}\} \leqslant C(\Omega)\left(R_1(s_{27}) + R_1(\tfrac{1}{2})\right)$$

при $0 < \lambda + \alpha < 4$. Здесь $B_0,\ R_i(s)$ из (2.3), (2.4); $s_{23} = \frac{2n+\lambda+3\alpha+2}{n-\lambda+7}$, $s_{24} = \frac{4\lambda+3\alpha-n-1}{6}$, $s_{25} = \frac{4\lambda+3\alpha-n-1}{m-n+2}$, $s_{26} = \frac{\lambda+2n+3\alpha+2}{3(m-\lambda+3)}$, $s_{27} = \frac{\lambda+\alpha}{2}$.

Замечание 2.3. По крайней мере одна из вышеприведенных оценок $|B_4|$ справедлива для любого $\lambda \in (\min\{-\alpha, \frac{n-3\alpha+1}{4}\}, \max\{4-\alpha, n+7+(m-n-4)_+\})$.

Используя тождество $u_{x_ix_j} = \gamma^{-1}u^{1-\gamma}(u^\gamma)_{x_ix_j} - (\gamma-1)u^{-1}u_{x_i}u_{x_j}$, где $\gamma = \frac{\alpha+n+1}{2}$, перепишем $B_5 := \iint\limits_{Q_T} \overrightarrow{\chi}\, b'_{\delta\sigma}(u_{\delta\sigma})\Delta u_{\delta\sigma}\nabla u_{\delta\sigma}$ в эквивалентной форме, а затем оценим его:

$$|B_5| \leqslant c \iint\limits_{Q_T} u_{\delta\sigma}^{\Lambda}\left|\nabla u_{\delta\sigma}^{\frac{\alpha+n+1}{4}}\right|^3 + c \iint\limits_{Q_T} u_{\delta\sigma}^{\Lambda}\left|\nabla u_{\delta\sigma}^{\frac{\alpha+n+1}{4}}\right|\left|\Delta u_{\delta\sigma}^{\frac{\alpha+n+1}{2}}\right|,$$

где $\Lambda := \frac{4\lambda-3(\alpha+n)+1}{4}$. Применяя к первому слагаемому неравенство Юнга с показателями 4, $\frac{4}{3}$, а ко второму — с показателями 4, 4 и 2, получаем:

$$|B_5| \leqslant \gamma_5 \iint\limits_{Q_T} \left|D^2 u_{\delta\sigma}^{\frac{\alpha+n+1}{2}}\right|^2 + \gamma_5 B_0 + \\ + C(\gamma_5,\Omega)\Big(\sum_{i=28,29} R_1(s_i) + \sum_{i=30,31} R_2(s_i)\Big) \quad \forall\, \gamma_5 > 0, \quad (2.19)$$

причём $\sum\limits_{i=28,29} R_1(s_i)$ присутствует только при $\frac{3(\alpha+n)-1}{4} < \lambda < \alpha+n+2$, а $\sum\limits_{i=30,31} R_2(s_i)$ — только при $\frac{3(\alpha+n)-1}{4} < \lambda < \alpha+n+\frac{1}{3}(m-n+2)$, $m-n+1 > 0$. Здесь $B_0,\ R_i(s)$ из (2.3), (2.4); $s_{28} = \frac{\lambda+1}{n-\lambda+\alpha+2}$, $s_{29} = \frac{4\lambda-3(\alpha+n)+1}{2}$, $s_{30} = \frac{4\lambda-3(\alpha+n)+1}{m-n+2}$, $s_{31} = \frac{2(\lambda+1)}{3(n-\lambda+\alpha)+m-n+2}$.

Замечание 2.4. Объединяя ограничения на λ, полученные при оценивании $|B_5|$, заключаем, что (2.19) справедливо, если $\lambda \in \big(\frac{3(\alpha+n)-1}{4}, \alpha+n+2+(\frac{m-n-4}{3})_+\big)$.

Складывая неравенства (A.2), (A.4), учитывая оценки (2.6), (2.9), (2.12), (2.16), (2.18), (2.19) и выбирая $\gamma_i,\ i=\overline{1,5}$ достаточно малыми, получаем:

$$\mathcal{E}_\Omega(u_{\delta\sigma})+\int\limits_\Omega G^{(\alpha)}_{\delta\sigma}(u_{\delta\sigma})dx+c_1^{-1}\iiint\limits_{Q_T}\Big\{\big|D^2u_{\delta\sigma}^{\frac{\alpha+n+1}{2}}\big|^2+\big|\nabla u_{\delta\sigma}^{\frac{\alpha+n+1}{4}}\big|^4\Big\}+$$
$$+c_1^{-1}\iint\limits_{Q_T}u_{\delta\sigma}^{\alpha+m-1}|\nabla u_{\delta\sigma}|^2\leqslant\mathcal{E}_\Omega(u_{0\delta\sigma})+\int\limits_\Omega G^{(\alpha)}_{\delta\sigma}(u_{0\delta\sigma}(x))dx+$$
$$C(\Omega)\Big(R_1(\tfrac12)+\sum_{i=1}^{31}R_1(s_i)+\sum_{i=1}^{31}R_2(s_i)\Big)+C_2(\Omega)R_1(s_{32})\leqslant\mathcal{E}_\Omega(u_{0\delta\sigma})+$$
$$+\int\limits_\Omega G^{(\alpha)}_{\delta\sigma}(u_{0\delta\sigma}(x))dx+C_0(\Omega)\int\limits_0^T\big\{\mathcal{E}_\Omega^{s_{\min}}(u_{\delta\sigma}(\tau))+\mathcal{E}_\Omega^{s_{\max}}(u_{\delta\sigma}(\tau))\big\}\,d\tau,\tag{2.20}$$

где $\mathcal{E}_\Omega(u_{\delta\sigma})$ из h) теоремы A.1, $G^{(\alpha)}_{\delta\sigma}(z)$ из j) теоремы A.1; $s_{32}=\frac{\alpha+n+1}{2}$; $C_2(\Omega)=0$, если Ω – выпуклая; $s_{\min}=\min\{s_i,2^{-1}\}, s_{\max}=\max\{s_i,2^{-1}\}$ $(i=\overline{1,32})$. Объединяя замечания 2.2–2.4 и условия (2.7), (2.8), (2.10), (2.11) получаем следующие суммарные ограничения на λ и α, которые достаточны для справедливости (2.20):

$$\left.\begin{array}{l}\max\Big\{\frac{3(\alpha+n)-1}{4},(n-m-1)_+\Big\}<\lambda(<\alpha+n+2,\ \text{если } N=3),\\ \alpha\in\Delta_\lambda:=(\max\{\frac12-n,-\lambda\},2-n)\backslash\{0,-1\}\ \text{при } N<3,\\ \alpha\in\Delta_\lambda\cap(\min\{-3,-\frac23(m-n+\frac12)\},+\infty)\ \text{при } N=3.\end{array}\right\}\tag{2.21}$$

Учитывая определение функции $G^{(\alpha)}_{\delta\sigma}(z)$ (см. j) из теоремы A.1) и условия (2.1) получаем, аналогично [13], что

$$\mathcal{E}_\Omega(u_{0\delta\sigma}(x))+\int\limits_\Omega G^{(\alpha)}_{\delta\sigma}(u_{0\delta\sigma}(x))\leqslant\tfrac12\left\|u_{0\delta\sigma}\right\|^2_{H^1(\Omega)}+$$
$$+\int\limits_\Omega\Psi_0(u_{0\delta\sigma})+\Big|\tfrac{1}{\alpha(\alpha+1)}\Big|\int\limits_\Omega u_{0\delta\sigma}^{\alpha+1}+\overline{\overline{o}}_{\delta\sigma}(1)\leqslant c_1(u_0),\tag{2.22}$$

где постоянная $c_1(u_0):=c_1(\mathcal{E}_\Omega(u_0),\|u_0\|_{L^{\alpha+1}(\Omega)})$ не зависит от $\delta,\ \sigma$; $\Psi_0(z)$ из (1.14). Применяя к неравенству (2.20) лемму B.9, получаем с учётом (2.22) локальную априорную оценку:

$$\mathcal{E}_\Omega(u_{\delta\sigma}(T))+\int\limits_\Omega G^{(\alpha)}_{\delta\sigma}(u_{\delta\sigma}(T))\,dx+$$

$$+ c_1^{-1}\iint\limits_{Q_T}\Big\{\big|D^2 u_{\delta\sigma}^{\frac{\alpha+n+1}{2}}\big|^2 + \big|\nabla u_{\delta\sigma}^{\frac{\alpha+n+1}{4}}\big|^4 + u_{\delta\sigma}^{\alpha+m-1}|\nabla u_{\delta\sigma}|^2\Big\} \leqslant C_4 \quad (2.23)$$

для п. в. $T \leqslant \hat{T} := \frac{T_0}{2}$, где $C_4 = 2^{\frac{1}{s_{\max}-1}}(c_1(u_0) + C_0(\Omega))$, $s_{\max} > 1$ и

$$T_0 := \tfrac{1}{C_0(\Omega)(s_{\max}-1)}(c_1(u_0) + C_0(\Omega))^{1-s_{\max}}. \quad (2.24)$$

Здесь $C_0(\Omega)$ из (2.20), $c_1(u_0)$ из (2.22). Оценка (2.23) — основная априорная оценка, являющаяся целью настоящего пункта. Из (2.23) вытекает, что равномерно по $\delta > 0$ и $\sigma > 0$:

$$\{u_{\delta\sigma}\}_{\delta,\sigma>0} \text{ — ограничены в } L^\infty(0,\hat{T}; H^1(\Omega)), \quad (2.25)$$

$$\{\Psi_0(u_{\delta\sigma})\}_{\delta,\sigma>0} \text{ — ограничены в } L^\infty(0,\hat{T}; L^1(\Omega)), \quad (2.26)$$

$$\{u_{\delta\sigma}^{\frac{\alpha+m-1}{2}}|\nabla u_{\delta\sigma}|\}_{\delta,\sigma>0} \text{ — ограничены в } L^2(Q_{\hat{T}}), \quad (2.27)$$

$$\int\limits_\Omega G_{\delta\sigma}^{(\alpha)}(u_{\delta\sigma}(t))dx \text{ — ограничен } \forall\, t \in [0,\hat{T}], \quad (2.28)$$

$$\{u_{\delta\sigma}^{\frac{\alpha+n+1}{2}}\}_{\delta,\sigma>0} \text{ — ограничены в } L^2(0,\hat{T}; H^2(\Omega)), \quad (2.29)$$

$$\{u_{\delta\sigma}^{\frac{\alpha+n+1}{4}}\}_{\delta,\sigma>0} \text{ — ограничены в } L^4(0,\hat{T}; W_4^1(\Omega)). \quad (2.30)$$

Из (2.25) следует равномерная ограниченность последовательности

$$\{u_{\delta\sigma}\}_{\delta,\sigma>0} \text{ в } L^\infty(0,\hat{T}; L^q(\Omega))\ \forall\, q < \infty,\ N < 3 \text{ и } \forall\, q < 6,\ N = 3. \quad (2.31)$$

Замечание 2.5. Рассуждая так же, как при получении неравенств (2.3), (2.4), используя оценку (2.23), устанавливаем равномерную ограниченность

$$\{u_{\delta\sigma}\}_{\delta,\sigma>0} \text{ в } L^{\alpha+n+9}(Q_{\hat{T}})\ (L^r(Q_{\hat{T}}),\ m-n+1>0) \text{ при } N = 3, \quad (2.32)$$

где $r = \alpha + n + 1 + \frac{4}{3}(m - n + 2)$.

2.3. Дополнительные априорные оценки, равномерные относительно δ, σ

Если $N < 3$ или $N = 3$ и $\alpha + m \leqslant 11$ $(\alpha + m > 11)$, то непосредственно из (2.31) ((2.26)) следует:

$$\int\limits_\Omega u_{\delta\sigma}^{\frac{\alpha+m+1}{2}}(t,x)dx \leqslant C \text{ для п. в. } t \leqslant \hat{T}, \text{ если } \alpha + m + 1 > 0. \quad (2.33)$$

Отсюда с учётом (2.27) получаем, что последовательность

$$\{u_{\delta\sigma}^{\frac{\alpha+m+1}{2}}\}_{\delta,\sigma>0} \text{ ограничена в } L^2(0,\hat{T};H^1(\Omega)),\ \alpha+m+1>0. \quad (2.34)$$

Из (2.34), (2.31) в силу интерполяционной леммы B.3, получаем:

$$\iint\limits_{Q_{\hat{T}}} u_{\delta\sigma}^{\alpha+m+5} \leqslant C(\hat{T}),\ \text{если } \alpha+m+1>0 \text{ и } N=3. \quad (2.35)$$

Следуя [14], показывается, что при $N<3$ либо $N=3,\ 0<m<3$, либо $N=3,\ m\geqslant 3,\ \alpha>-2$ существует $\eta>0$ такое, что

$$\{|\nabla H_{\delta\sigma}(u_{\delta\sigma})|\}_{\delta,\sigma>0} \text{ ограничено в } L^{1+\eta}(Q_{\hat{T}}). \quad (2.36)$$

В оставшейся части этого пункта найдём оптимальные условия на параметр λ, обеспечивающие равномерную по δ,σ ограниченность последовательности:

$$\{\partial_t u_{\delta\sigma}\}_{\delta,\sigma>0} \text{ в пространстве } L^2(0,\hat{T};(W_q^1(\Omega))^*),\ q=\tfrac{q'}{q'-1}, \quad (2.37)$$

где q' — произвольное число из интервала Δ_1 из определения 1.1. В силу свойства b) теоремы A.1 для произвольной функции $\varphi \in L^2(0,\hat{T};H^1(\Omega))$ имеем равенство:

$$\int\limits_0^{\hat{T}} \langle \partial_t u_{\delta\sigma},\varphi\rangle = \iint\limits_{Q_{\hat{T}}} \Big(\overrightarrow{J}_{\delta\sigma}\cdot\nabla\varphi + \overrightarrow{\chi}\cdot\nabla\mathcal{B}_{\delta\sigma}(u_{\delta\sigma})\varphi\Big) =: \mathrm{I}+\mathrm{II}, \quad (2.38)$$

где $\mathcal{B}_{\delta\sigma}(z) := \int\limits_0^z b'_{\delta\sigma}(\tau)\,d\tau$. В силу оценок (2.6), (2.9), (2.12), (2.16), (2.19) и априорной оценки (2.23), из соотношения (A.1), вытекает:

$$\int\limits_0^{\hat{T}} \|\overrightarrow{J}_{\delta\sigma}\|^2_{L^{q'}(\Omega)} \leqslant C \sup_{t\in(0,\hat{T})} \left\|u^n_{\delta\sigma}(t,.)\right\|_{L^{\frac{q'}{2-q'}}(\Omega)} \leqslant C_1. \quad (2.39)$$

Последнее неравенство следует из свойства (2.25) и вложения $H^1(\Omega)\subset L^{\frac{nq'}{2-q'}}(\Omega)$, имеющего место в силу того, что $\frac{nq'}{2-q'} < \frac{2N}{N-2} \Leftrightarrow q' < \frac{4N}{2N+n(N-2)}$. Из соотношения (2.39), очевидно, вытекает:

$$|\mathrm{I}| \leqslant C_2\,\|\varphi\|_{L^2(0,\hat{T};W_q^1(\Omega))}. \quad (2.40)$$

Установим аналогичную оценку для члена II из (2.38), который можно записать в следующем виде:

$$\mathrm{II} = \int\limits_0^{\hat{T}} \int\limits_{\partial\Omega} \overrightarrow{\chi} \cdot \vec{n}\, \mathcal{B}_{\delta\sigma}(u_{\delta\sigma})\varphi - \iint\limits_{Q_{\hat{T}}} \overrightarrow{\chi} \cdot \mathcal{B}_{\delta\sigma}(u_{\delta\sigma})\nabla\varphi =: \mathrm{II}_1 - \mathrm{II}_2. \quad (2.41)$$

В силу (1.6), имеем:

$$|\mathrm{II}_2| \leqslant c\|u_{\delta\sigma}^{\lambda}\|_{L^2(0,\hat{T};L^{q'}(\Omega))}\|\nabla\varphi\|_{L^2(0,\hat{T};L^{q}(\Omega))}. \quad (2.42)$$

Теперь проанализируем характер суммируемости решений $u_{\delta\sigma}$, определяемый свойствами (2.25)–(2.30), в случае $N = 3$. Из (2.29) и (2.31) ((2.26)) следует равномерная по $\delta > 0$, $\sigma > 0$ ограниченность семейства:

$$\{v_{\delta\sigma}\} := \{u_{\delta\sigma}^{\mu}\} \text{ в } L^2(0,\hat{T};W_6^1(\Omega)),\ \mu = \tfrac{\alpha+n+1}{2} \in \left(\tfrac{3}{4},\tfrac{3}{2}\right), \quad (2.43)$$

$$\{v_{\delta\sigma}\} \text{ в } L^{\infty}(0,\hat{T};L^{\frac{6}{\mu}}(\Omega))\big(L^{\infty}(0,\hat{T};L^{\frac{m-n+2}{\mu}}(\Omega)), m-n+1>0\big). \quad (2.44)$$

Найдём условия на λ, гарантирующие равномерную по δ, σ оценку:

$$\|u_{\delta\sigma}^{\lambda}\|_{L^2(0,\hat{T};L^{q'}(\Omega))} \equiv \int\limits_0^{\hat{T}} \left(\int\limits_{\Omega} v_{\delta\sigma}^{\frac{\lambda q'}{\mu}}\right)^{\frac{2}{q'}} dt \leqslant C\ \forall\, q' \in \Delta_1. \quad (2.45)$$

В силу интерполяционного неравенства Ниренберга-Гальярдо (лемма B.5), имеем:

$$\left(\int\limits_{\Omega} v^a\right)^{\frac{1}{a}} \leqslant d_1\left(\int\limits_{\Omega}|\nabla v|^6\right)^{\frac{\theta_i}{6}}\left(\int\limits_{\Omega} v^{b_i}\right)^{\frac{1-\theta_i}{b_i}} + d_2\left(\int\limits_{\Omega} v^{b_i}\right)^{\frac{1}{b_i}},\ i=1,2, \quad (2.46)$$

где $a = \frac{\lambda q'}{\mu}$, $b_1 = \frac{6}{\mu}$, $b_2 = \frac{m-n+2}{\mu}$, $\theta_1 = \frac{\mu(\lambda q'-6)}{\lambda q'(1+\mu)}$, $\theta_2 = \frac{6\mu(\lambda q'-m+n-2)}{\lambda q'(6\mu+m-n+2)}$, $N = 3$. Возводя (2.46) в степень $\frac{2\lambda}{\mu}$ и интегрируя по t, получаем:

$$\int\limits_0^{\hat{T}} \left(\int\limits_{\Omega} v^{\frac{\lambda q'}{\mu}}\right)^{\frac{2}{q'}} \leqslant c\int\limits_0^{\hat{T}} \left(\int\limits_{\Omega}|\nabla v|^6\right)^{\frac{\lambda\theta_i}{3\mu}}\left(\int\limits_{\Omega} v^{b_i}\right)^{\frac{2\lambda(1-\theta_i)}{\mu b_i}} + c\int\limits_0^{\hat{T}} \left(\int\limits_{\Omega} v^{b_i}\right)^{\frac{2\lambda}{\mu b_i}},$$

$i = 1,2$. Применяя полученное неравенство к функции $v = v_{\delta\sigma}$ и используя свойства (2.43), (2.44), приходим к оценке (2.45), при условии, что имеет место одно из неравенств: $\frac{\lambda\theta_i}{\mu} \leqslant 1 \Leftrightarrow \lambda \leqslant \frac{\mu}{\theta_i}\ \forall\, q' \in \Delta_1$,

$i = 1, 2$. Эти соотношения, как несложно проверить, эквивалентны следующим ограничениям на параметр λ:

$$\lambda \leqslant \mu + \max\left\{1, \tfrac{m-n+2}{6}\right\}\left(4 + \tfrac{n}{2}\right) \text{ при } N = 3 \ (\mu \text{ из } (2.43)). \qquad (2.47)$$

Теперь оцениваем член II_1 из (2.41). Очевидно,

$$|\mathrm{II}_1| \leqslant c \int\limits_0^{\hat{T}} \|\varphi\|_{L^d(\partial\Omega)} \|u_{\delta\sigma}\|^{\lambda}_{L^{\frac{\lambda d}{d-1}}(\partial\Omega)} dt \quad \forall\, d > 1. \qquad (2.48)$$

Отсюда при $N < 3$ в силу (2.25) и вложения $W^1_p(\Omega) \subset L^r(\partial\Omega)\ \forall\, r < \infty, \forall\, p \geqslant 2$, вытекает:

$$|\mathrm{II}_1| \leqslant C_3 \, \|\varphi\|_{L^2(0,\hat{T}; W^1_q(\Omega))} \quad \forall\, \lambda > 0,\ N < 3. \qquad (2.49)$$

В случае $N = 3$ имеем вложение $W^1_q(\Omega) \subset L^{d_q}(\partial\Omega)$, где $d_q = \frac{2q}{3-q}$, если $q < 3$, и d_q — произвольное сколь угодно большое число, если $q \geqslant 3$. Теперь для получения оценки вида (2.49), в силу (2.48), достаточно получить равномерную оценку:

$$\mathrm{II}^{(1)}_1 := \int\limits_0^{\hat{T}} \Bigg(\int\limits_{\partial\Omega} |v_{\delta\sigma}|^{\frac{\lambda d_q}{\mu(d_q-1)}} d\mathcal{H}^{N-1}\Bigg)^{\frac{2(d_q-1)}{d_q}} dt \leqslant C,\ \mu \text{ из } (2.43). \qquad (2.50)$$

Применим интерполяционное неравенство из леммы B.4 к функции $v_{\delta\sigma}$ с $a = \frac{\lambda d_q}{\mu(d_q-1)}$, $d = 6$, $b = b_i$ из (2.46) $(i = 1, 2)$, $N = 3$, а затем возведём его в степень $\frac{2\lambda}{\mu}$ и проинтегрируем по t. В итоге получаем:

$$|\mathrm{II}^{(1)}_1| \leqslant c \int\limits_0^{\hat{T}} \Bigg(\int\limits_{\Omega} |\nabla v_{\delta\sigma}|^6\Bigg)^{\frac{\lambda\theta_i}{3\mu}} \Bigg(\int\limits_{\Omega} |v_{\delta\sigma}|^{b_i}\Bigg)^{\frac{2\lambda(1-\theta_i)}{\mu b_i}} + c \int\limits_0^{\hat{T}} \Bigg(\int\limits_{\Omega} |v_{\delta\sigma}|^{b_i}\Bigg)^{\frac{2\lambda}{\mu b_i}}, i = 1, 2,$$

где $\theta_1 = \frac{\mu[\lambda d_q - 4(d_q-1)]}{\lambda d_q(1+\mu)}$, $\theta_2 = \frac{2\mu[3\lambda d_q - 2(d_q-1)(m-n+2)]}{\lambda d_q[6\mu+m-n+2]}$. Отсюда, в силу свойств (2.43), (2.44), следует оценка (2.50), если $\lambda \min\{\theta_1, \theta_2\} \leqslant \mu$. Это соотношение, как показывают простые вычисления, эквивалентно ограничению: $\lambda \leqslant \mu + \max\left\{1, \frac{m-n+2}{6}\right\}\left(1 + \frac{4(d_q-1)}{d_q}\right)\ \forall\, q' = \frac{q}{q-1} \in \Delta_1$, которое, в свою очередь, в силу определений μ и d_q, эквивалентно:

$$\lambda \leqslant \tfrac{\alpha+n+1}{2} + \max\left\{1, \tfrac{m-n+2}{6}\right\}\left(4 + \tfrac{\min\{n,2\}}{2}\right) \text{ при } N = 3. \qquad (2.51)$$

Следовательно, при выполнении условий (2.47) и (2.51) имеют место оценки (2.40), (2.42), (2.45), (2.49), а значит и (2.37).

3. Доказательство теоремы 1.1: предельные переходы

Проведём сначала предельный переход по $\delta \to 0$.

3.1. Компактность последовательности $u_{\delta\sigma}$

Из (2.25), (2.37) в силу леммы B.1 следует существование элемента u_σ и подпоследовательности $\delta = \delta_k \to 0$, таких, что

$$u_{\delta\sigma} \underset{\delta\to 0}{\Rightarrow} u_\sigma \text{ в } L^2(Q_{\hat{T}}) \text{ и п. в. в } Q_{\hat{T}}. \tag{3.1}$$

Дополнительно, используя лемму B.2, также имеем:

$$u_{\delta\sigma} \underset{\delta\to 0}{\Rightarrow} u_\sigma \text{ в } C(0,\hat{T}; L^2(\Omega)). \tag{3.2}$$

Из (2.29), (2.39), (2.43) в силу леммы B.6 следует, что

$$u_{\delta\sigma}^{\frac{\alpha+n+1}{2}} \underset{\delta\to 0}{\Rightarrow} u_\sigma^{\frac{\alpha+n+1}{2}} \text{ в } L^2(0,\hat{T}; H^1(\Omega)). \tag{3.3}$$

Из (2.29) и (3.3) также вытекает, что

$$u_{\delta\sigma}^{\frac{\alpha+n+1}{2}} \underset{\delta\to 0}{\rightharpoonup} u_\sigma^{\frac{\alpha+n+1}{2}} \text{ в } L^2(0,\hat{T}; H^2(\Omega)). \tag{3.4}$$

Из (2.30), (2.34), (3.1) и леммы B.7 следует, что:

$$u_{\delta\sigma}^{\frac{\alpha+n+1}{4}} \underset{\delta\to 0}{\rightharpoonup} u_{\delta\sigma}^{\frac{\alpha+n+1}{4}} \text{ в } L^4(0,\hat{T}; W_4^1(\Omega)), \tag{3.5}$$

$$u_{\delta\sigma}^{\frac{\alpha+m+1}{2}} \underset{\delta\to 0}{\rightharpoonup} u_\sigma^{\frac{\alpha+m+1}{2}} \text{ в } L^2(0,\hat{T}; H^1(\Omega)), \text{ если } \alpha+m+1>0, \tag{3.6}$$

а из (2.25), (2.39), (2.37) и (3.1) вытекает:

$$u_{\delta\sigma} \overset{*}{\underset{\delta\to 0}{\rightharpoonup}} u_\sigma \text{ в } L^\infty(0,\hat{T}; H^1(\Omega)), \tag{3.7}$$

$$\overrightarrow{J}_{\delta\sigma} \underset{\delta\to 0}{\rightharpoonup} \overrightarrow{J}_\sigma \text{ в } L^2(0,\hat{T}; L^{q'}(\Omega))\ \forall\, q' \in \Delta_1, \Delta_1 \text{ из определения 1.1}, \tag{3.8}$$

$$\partial_t u_{\delta\sigma} \underset{\delta\to 0}{\rightharpoonup} \partial_t u_\sigma \text{ в } L^2(0,\hat{T}; (W_q^1(\Omega))^*), \text{ где } q = \tfrac{q'}{q'-1} \text{ и } q' \text{ из (3.8)}. \tag{3.9}$$

Из (3.1), (3.5) в силу теоремы Витали (см. [13]), вытекает:

$$\nabla u_{\delta\sigma}^{\frac{\alpha+n+1}{4}} \underset{\delta\to 0}{\Rightarrow} \nabla u_\sigma^{\frac{\alpha+n+1}{4}} \text{ в } L^{4-}(\{u_\sigma > 0\}) \text{ и п. в. на } \{u_\sigma > 0\}. \tag{3.10}$$

Из (3.3), (3.5) и (3.10) (см. [13]), получаем: $\nabla u_{\delta\sigma} \underset{\delta\to 0}{\Rightarrow} \nabla u_\sigma$ в $L^2(Q_{\hat{T}})$. Отсюда, с учётом (3.1) и (3.11), следует:

$$u_{\delta\sigma} \underset{\delta\to 0}{\Rightarrow} u_\sigma \text{ в } L^2(0,\hat{T}; H^1(\Omega)) \text{ и п.в. в } Q_{\hat{T}}. \tag{3.11}$$

Замечание 3.1. Если $m > 0$, то из (2.36), (3.11) в силу теоремы Витали следует сходимость:

$$m_{\delta\sigma}(u_{\delta\sigma})u_{\delta\sigma}^{m-n}\nabla u_{\delta\sigma} \underset{\delta\to 0}{\rightrightarrows} m_\sigma(u_\sigma)u_\sigma^{m-n}\nabla u_\sigma \text{ в } L^1(Q_{\hat{T}}).$$

3.2. Предельный переход в b) и c) из теоремы A.1

По аналогии с [13, 14] устанавливается, что формально найденный в (3.8) предельный поток $\overrightarrow{J}_\sigma$ удовлетворяет равенству $\overrightarrow{J}_\sigma = m_\sigma(u_\sigma)[\nabla\Delta u_\sigma - u_\sigma^{m-n}\nabla u_\sigma]$ в смысле предельного ($\delta = 0$) равенства c). При этом возникает ограничение $\alpha < \frac{n+1}{3}$, вошедшее в определение интервала $\tilde{\Delta}_{n,\lambda}$ из (1.12). Таким образом, остаётся перейти к пределу по $\delta \to 0$ во втором слагаемом правой части равенства b) или, что эквивалентно, в слагаемом II из (2.38). Снова интегрируя в II по частям, запишем это слагаемое в виде (2.41) и перейдём к пределу при $\delta \to 0$ в II_1 и II_2. Так как $\mathcal{B}_{\delta\sigma}(z) \underset{\delta\to 0}{\rightrightarrows} \mathcal{B}_\sigma(z) \leqslant c\,z^\lambda,\ z \in [0,\infty)$ ($\mathcal{B}_{\delta\sigma}(z)$ из (2.38)), то из (3.11) вытекает, что $\mathcal{B}_{\delta\sigma}(u_{\delta\sigma}) \underset{\delta\to 0}{\to} \mathcal{B}_\sigma(u_\sigma)$ п. в. в $Q_{\hat{T}}$ и п. в. в $(0,\hat{T}) \times \partial\Omega$. Из (2.25) и оценки (2.50) с $d_q = 2$ следует равномерная по δ, σ ограниченность мажорирующей последовательности $\{u_{\delta\sigma}^\lambda\}$ в $L^{1+\tilde{\sigma}}(Q_{\hat{T}})$ и $L^{1+\tilde{\sigma}}((0,\hat{T}) \times \partial\Omega)$ ($\tilde{\sigma} > 0$ достаточно мало), если $0 < \lambda$ ($< 4, N = 3$), откуда, учитывая, что $u_{\delta\sigma}^\lambda \underset{\delta\to 0}{\to} u_\sigma^\lambda$ п. в. в $Q_{\hat{T}}$ и $(0,\hat{T}) \times \partial\Omega$, в силу теоремы Витали, получаем: $u_{\delta\sigma}^\lambda \underset{\delta\to 0}{\rightrightarrows} u_\sigma^\lambda$ в $L^1(Q_{\hat{T}})$ и $L^1((0,\hat{T}) \times \partial\Omega)$. Отсюда, применяя обобщённую лемму Лебега (см. приложение B) устанавливаем, что $\mathcal{B}_{\delta\sigma}(u_{\delta\sigma}) \underset{\delta\to 0}{\rightrightarrows} \mathcal{B}_\sigma(u_\sigma)$ в $L^1(Q_{\hat{T}})$ и $L^1((0,\hat{T}) \times \partial\Omega)$, если $0 < \lambda$ ($< 4, N = 3$). Из вышеизложенного вытекают предельные переходы в $\mathrm{II}_1, \mathrm{II}_2$. Следовательно

$$\mathrm{II} \underset{\delta\to 0}{\to} \int\limits_0^{\hat{T}} \langle \overrightarrow{\chi} \cdot \nabla\mathcal{B}_\sigma(u_\sigma), \zeta\rangle\, dt =$$

$$= \int\limits_0^{\hat{T}} \int\limits_{\partial\Omega} \overrightarrow{\chi} \cdot \vec{n}\, \mathcal{B}_\sigma(u_\sigma)\zeta - \iint\limits_{Q_{\hat{T}}} \overrightarrow{\chi} \mathcal{B}_\sigma(u_\sigma)\nabla\zeta. \quad (3.12)$$

3.3. Положительность решения u_σ при $\alpha + m + 1 \leqslant 0$

Лемма 3.1. *В условиях теоремы* 1.1 *интервал разрешимости* $T_{loc} > 0$ *можно выбрать таким образом, что равномерно по* $\delta > 0$, $\sigma > 0$ *справедливо неравенство:* $\int\limits_\Omega u_{\delta\sigma}(t)\,dx > c(u_0) > 0$ *для всех* $t < T_{loc}$.

Доказательство. Полагая в тождестве b) из теоремы A.1 в качестве пробной функции $\zeta \equiv 1$, получаем: $\int\limits_\Omega u_{\delta\sigma}(t)dx = \int\limits_\Omega u_{0\delta\sigma}(x)dx + \int\limits_0^t \int\limits_{\partial\Omega} \mathcal{B}_{\delta\sigma}(u_{\delta\sigma})\overrightarrow{\chi} \cdot \vec{n}\, d\mathcal{H}^{N-1}dt := D_1 + D_2$, где $\mathcal{B}_{\delta\sigma}$ из (2.38). В силу (1.6), (2.25) и вложения $H^1(\Omega) \subset L^\lambda(\partial\Omega)\ \forall\,\lambda \leqslant 4$, если $N = 3$, следует: $|D_2| \leqslant C_1\,t\ \forall\,t \leqslant \hat{T}$, где $\hat{T}$ из (2.23), C_1 не зависит от δ, σ и t. Отсюда, учитывая, что $u_{0\delta\sigma}(x) > u_0(x)$, получаем: $\int\limits_\Omega u_{\delta\sigma}(t)\,dx > \int\limits_\Omega u_0(x)\,dx - C_1\,t > 0$, откуда следует справедливость леммы 3.1 с

$$T_{loc} = \min\{\hat{T}, (2C_1)^{-1}\|u_0\|_{L^1(\Omega)}\}. \tag{3.13}$$

□

По аналогии с [14](лемма 2.1), используя лемму 3.1, доказывается важное свойство положительности при $\alpha + m + 1 \leqslant 0$.

Лемма 3.2. *Если $\alpha+m+1 \leqslant 0$, то $u_\sigma(t,x) > 0$ п. в. в Ω и $\mathcal{M}_{\alpha+m}(u_\sigma) \in L^2_{loc}(\Omega)$ для п. в. $0 < t < T_{loc}$, где T_{loc} из* (3.13), *$\mathcal{M}_\gamma(z)$ из* (1.11)*; кроме того, $L^2_{loc}(\Omega)$ можно заменить на $L^2(\Omega)$, если область Ω выпуклая.*

3.4. Получение энтропийного неравенства (1.18)

Неравенство (1.18) устанавливается в результате предельного перехода по $\delta \to 0, \sigma \to 0$ в (A.4). Как следствие леммы 3.2 и сходимости (3.11), при $\alpha + m + 1 \leqslant 0$, получаем:

$$u_{\delta\sigma}^{\frac{\alpha+m-1}{2}}\nabla u_{\delta\sigma} \underset{\delta\to0}{\rightharpoonup} u_\sigma^{\frac{\alpha+m-1}{2}}\nabla u_\sigma = \nabla\mathcal{M}_{\alpha+m}(u_\sigma) \text{ в } L^2_{loc}(Q_{T_{loc}}), \tag{3.14}$$

где T_{loc} из (3.13). Из априорной оценки (2.23) в силу леммы Фату следует, что $\Psi_0(u_\sigma) \in L^\infty(0, T_{loc}; L^1(\Omega))$ ($\Psi_0(z)$ из (1.14)), а если к тому же $m - n + 2 \leqslant 0$, то

$$u_\sigma(t,x) > 0 \text{ п. в. в } \Omega \text{ для п. в. } 0 \leqslant t \leqslant T_{loc}. \tag{3.15}$$

Из (2.25), (2.26) и (2.35) вытекает, что последовательность $\{\Psi_0(u_{\delta\sigma})\}$ равномерно ограничена в $L^{1+\eta}(Q_{T_{loc}})$ для некоторого $\eta > 0$, если $m - n + 2 > 0$. Отсюда, в силу теоремы Витали, получаем:

$$\Psi_0(u_{\delta\sigma}) \underset{\delta\to0}{\Rightarrow} \Psi_0(u_\sigma) \text{ в } L^1(Q_{T_{loc}}), \text{ если } m - n + 2 > 0. \tag{3.16}$$

В левой части неравенства (A.4) предельный переход является простым следствием леммы Фату, сходимости (3.14), полученных в п. 3.1

результатов о компактности и неравенства $\|\lim f_\delta\|_{L^p(X)} \leqslant \lim \|f_\delta\|_{L^p(X)}$, справедливого для произвольной слабокомпактной в $L^p(X)$ последовательности $\{f_\delta\}$. Из сходимости (3.3) следует: $\iint\limits_{Q_{T_{loc}}} u_{\delta\sigma}^{\alpha+n+1} \underset{\delta\to 0}{\to}$ $\iint\limits_{Q_{T_{loc}}} u_\sigma^{\alpha+n+1}$. Из ограниченности $\int\limits_\Omega G_{\delta\sigma}^{(\alpha)}(u_{0\delta\sigma})\,dx \leqslant c(u_0)$ ($c(u_0)$ не зависит от δ и σ), сходимости (3.11) и теоремы Лебега вытекает: $\int\limits_\Omega G_{\delta\sigma}^{(\alpha)}(u_{0\delta\sigma})\,dx \underset{\delta\to 0}{\to} \int\limits_\Omega G_\sigma^{(\alpha)}(u_{0\sigma})\,dx$. Перейдём к пределу по $\delta \to 0$ в третьем слагаемом из правой части неравенства (A.4) или, что эквивалентно, в интеграле B_4 из (2.18). Интегрируя по частям, запишем B_4 в следующем виде:

$$B_4 = \int\limits_0^{T_{loc}} \int\limits_{\partial\Omega} \overrightarrow{\chi} \cdot \vec{n}\,\mathcal{B}_{\delta\sigma}^{(\alpha)}(u_{\delta\sigma}), \text{ где } \mathcal{B}_{\delta\sigma}^{(\alpha)}(z) := \int\limits_0^z b'_{\delta\sigma}(\tau) g_{\delta\sigma}^{(\alpha)}(\tau)\,d\tau. \quad (3.17)$$

Так как $\mathcal{B}_{\delta\sigma}^{(\alpha)}(z) \underset{\delta\to 0}{\rightrightarrows} \mathcal{B}_\sigma^{(\alpha)}(z) \leqslant c(z^{\lambda+\alpha} + z)$, $z \in [0,\infty)$ (здесь $\alpha > -\lambda$), то из (3.11) следует, что $\mathcal{B}_{\delta\sigma}^{(\alpha)}(u_{\delta\sigma}) \underset{\delta\to 0}{\to} \mathcal{B}_\sigma^{(\alpha)}(u_\sigma)$ п. в. в $(0, T_{loc}) \times \partial\Omega$. Из (2.25) и вложения $H^1(\Omega) \subset L^r(\partial\Omega)$ $\forall\, r \leqslant 4$ при $N = 3$ следует равномерная по δ, σ ограниченность мажорирующей последовательности

$$\{u_{\delta\sigma}^{\lambda+\alpha} + u_{\delta\sigma}\} \text{ в } L^{1+\tilde\sigma}((0, T_{loc}) \times \partial\Omega) \ (\tilde\sigma > 0 \text{ достаточно мало}), \quad (3.18)$$

если $-\alpha < \lambda (< \min\{4, 4-\alpha\}, N = 3)$. В случае $N = 3$ и $0 < \alpha < \lambda < 4$ ограниченность (3.18) вытекает из оценки (2.50) с $d_q = 2$. Таким образом, (3.18) справедливо для $-\alpha < \lambda$ $(< 4, N = 3)$. Из (3.18) и сходимости $u_{\delta\sigma}^{\lambda+\alpha} + u_{\delta\sigma} \underset{\delta\to 0}{\to} u_\sigma^{\lambda+\alpha} + u_\sigma$ п. в. в $(0, T_{loc}) \times \partial\Omega$ в силу теоремы Витали получаем: $u_{\delta\sigma}^{\lambda+\alpha} + u_{\delta\sigma} \underset{\delta\to 0}{\Rightarrow} u_\sigma^{\lambda+\alpha} + u_\sigma$ в $L^1((0, T_{loc}) \times \partial\Omega)$. Отсюда, применяя обобщённую лемму Лебега (см. приложение B) устанавливаем, что $\mathcal{B}_{\delta\sigma}^{(\alpha)}(u_{\delta\sigma}) \underset{\delta\to 0}{\Rightarrow} \mathcal{B}_\sigma^{(\alpha)}(u_\sigma)$ в $L^1((0, T_{loc}) \times \partial\Omega)$, если $-\alpha < \lambda$ $(< 4, N = 3)$. Следовательно,

$$B_4 \underset{\delta\to 0}{\to} \int\limits_0^{T_{loc}} \int\limits_{\partial\Omega} \overrightarrow{\chi} \cdot \vec{n}\,\mathcal{B}_\sigma^{(\alpha)}(u_\sigma) \text{ при выполнении (1.17)}, \quad (3.19)$$

где B_4 из (2.18), а $\mathcal{B}_\sigma^{(\alpha)}(z)$ совпадает с $\mathcal{B}_{\delta\sigma}^{(\alpha)}(z)$ из (3.17) при $\delta = 0$. Полученные сходимости доказывают (1.18).

3.5. Вывод энергетического неравенства (1.20)

Перепишем неравенство (A.3) в эквивалентной форме:

$$\tilde{\mathcal{E}}_\Omega(u_{\delta\sigma}(t)) \leqslant \tilde{\mathcal{E}}_\Omega(u_{0\delta\sigma}(x)) - \tfrac{\alpha+n-1}{2} \iint\limits_{Q_{T_{loc}}} \overrightarrow{\chi}\, b'_{\delta\sigma}(u_{\delta\sigma}) u_{\delta\sigma}^{-1} |\nabla u_{\delta\sigma}|^2 \nabla u_{\delta\sigma} +$$

$$+ \tfrac{2}{\alpha+n+1} \iint\limits_{Q_{T_{loc}}} \overrightarrow{\chi}\, b'_{\delta\sigma}(u_{\delta\sigma}) u_{\delta\sigma}^{\frac{1-\alpha-n}{2}} \Delta u_{\delta\sigma}^{\frac{\alpha+n+1}{2}} \nabla u_{\delta\sigma} +$$

$$+ \iint\limits_{Q_{T_{loc}}} \overrightarrow{\chi}\, b'_{\delta\sigma}(u_{\delta\sigma}) \Psi'_0(u_{\delta\sigma}) \nabla u_{\delta\sigma} =: \tilde{\mathcal{E}}_\Omega(u_{0\delta\sigma}(x)) + I_1 + I_2 + I_3. \quad (3.20)$$

Из (3.11), (3.15), (3.16) и леммы Фату следует возможность предельного перехода по $\delta \to 0$ в левой части неравенства (3.20) и в слагаемом $\tilde{\mathcal{E}}_\Omega(u_{0\delta\sigma}(x))$. Сначала проведём предельный переход по $\delta \to 0$ в I_1. Запишем I_1 в следующем виде:

$$I_1 = -\tfrac{\alpha+n-1}{2} \Big(\tfrac{4}{\alpha+n+1}\Big)^3 \iint\limits_{Q_{T_{loc}}} R^{(1)}_{\delta\sigma}(u_{\delta\sigma}),$$

где $R^{(1)}_{\delta\sigma}(u_{\delta\sigma}) {:=} \overrightarrow{\chi}\, b'_{\delta\sigma}(u_{\delta\sigma}) u_{\delta\sigma}^{\frac{5-3(\alpha+n)}{4}} |\nabla u_{\delta\sigma}^{\frac{\alpha+n+1}{4}}|^2 \nabla u_{\delta\sigma}^{\frac{\alpha+n+1}{4}}$. Учитывая (1.6) получаем:

$$|R^{(1)}_{\delta\sigma}(u_{\delta\sigma})| \leqslant \tilde{R}^{(1)}_{\delta\sigma}(u_{\delta\sigma}) := c\, u_{\delta\sigma}^{\frac{4\lambda-3(\alpha+n)+1}{4}} |\nabla u_{\delta\sigma}^{\frac{\alpha+n+1}{4}}|^3,$$

где $\frac{3(\alpha+n)-1}{4} < \lambda\, (< \alpha+n+2,\ N=3)$. Из (2.32), (2.30) следует, что мажорирующая последовательность $\{\tilde{R}^{(1)}_{\delta\sigma}(u_{\delta\sigma})\}$ равномерно по δ, σ ограничена в $L^{1+\tilde{\sigma}}(Q_{T_{loc}})$ (для достаточно малого $\tilde{\sigma} > 0$). Из (3.10), (3.11), леммы B.7 в силу теоремы Витали вытекает, что $\tilde{R}^{(1)}_{\delta\sigma}(u_{\delta\sigma}) \underset{\delta\to 0}{\Rightarrow} \tilde{R}^{(1)}_{\sigma}(u_\sigma)$ в $L^1(\{u_\sigma > 0\})$, а, следовательно, в силу обобщённой леммы Лебега: $R^{(1)}_{\delta\sigma}(u_{\delta\sigma}) \underset{\delta\to 0}{\Rightarrow} R^{(1)}_{\sigma}(u_\sigma)$ в $L^1(\{u_\sigma > 0\})$. Далее покажем, что $\tilde{R}^{(1)}_{\delta\sigma}(u_{\delta\sigma}) \underset{\delta\to 0}{\to} 0$ (а, следовательно, $R^{(1)}_{\delta\sigma}(u_{\delta\sigma}) \underset{\delta\to 0}{\to} 0$) на $\{u_\sigma = 0\}$. Действительно, из (3.11) в силу теоремы Егорова для любого $\gamma > 0$ существует множество $S_\gamma \subset \{u_\sigma = 0\}$ такое, что $\mathfrak{L}^{N+1}(S_\gamma) \leqslant \gamma$ и $u_{\delta\sigma} \underset{\delta\to 0}{\rightrightarrows} u_\sigma$ на $\{u_\sigma = 0\}\backslash S_\gamma$. Отсюда, применяя неравенство Гёльдера, получаем:

$$\iint\limits_{\{u_\sigma=0\}} \tilde{R}^{(1)}_{\delta\sigma}(u_{\delta\sigma}) \leqslant \bar{\bar{o}}_{\delta\sigma}(1) \Big(\iint\limits_{\{u_\sigma=0\}\backslash S_\gamma} |\nabla u_{\delta\sigma}^{\frac{\alpha+n+1}{4}}|^4 \Big)^{\frac{3}{4}} +$$

$$+ c\left(\iint\limits_{S_\gamma} u_{\delta\sigma}^{4\lambda-3(\alpha+n)+1}\right)^{\frac{1}{4}} \left(\iint\limits_{S_\gamma} |\nabla u_{\delta\sigma}^{\frac{\alpha+n+1}{4}}|^4\right)^{\frac{3}{4}}.$$

Из (2.30) в силу теоремы Витали получаем, что последнее слагаемое в правой части стремится к нулю, когда $\mathfrak{L}^{N+1}(S_\gamma) \underset{\gamma\to 0}{\to} 0$. Таким образом, в силу обобщённой теоремы Лебега имеем:

$$I_1 \underset{\delta\to 0}{\to} -\tfrac{\alpha+n-1}{2} \iint\limits_{\{u_\sigma>0\}} \overrightarrow{\chi} b'_\sigma(u_\sigma) u_\sigma^{-1} |\nabla u_\sigma|^2 \nabla u_\sigma \tag{3.21}$$

при выполнении (1.17). Теперь проведём соответствующий переход к пределу по $\delta \to 0$ в I_3. Интегрируя по частям, запишем I_3 в следующем виде: $I_3 = \int\limits_0^{T_{loc}} \int\limits_{\partial\Omega} \overrightarrow{\chi} \cdot \vec{n}\, \tilde{\Psi}_{\delta\sigma}(u_{\delta\sigma})$, где $\tilde{\Psi}_{\delta\sigma}(z) := \int\limits_0^z b'_{\delta\sigma}(\tau)\Psi'_0(\tau)\, d\tau$ ($|\tilde{\Psi}_{\delta\sigma}(z)| \leqslant c(z^{\lambda+m-n+1} + R^{m-n+1} z^\lambda)$, R из (1.14)). Рассуждая так же, как при доказательстве (3.19), получаем:

$$I_3 \underset{\delta\to 0}{\to} \int\limits_0^{T_{loc}} \int\limits_{\partial\Omega} \overrightarrow{\chi} \cdot \vec{n}\, \tilde{\Psi}_\sigma(u_\sigma) \text{ при выполнении (1.17)}, \tag{3.22}$$

где $\tilde{\Psi}_\sigma(z)$ совпадает с $\tilde{\Psi}_{\delta\sigma}(z)$ при $\delta = 0$. Осталось провести предельный переход в слагаемом I_2. Запишем I_2 в следующем виде:

$$I_2 = \tfrac{8}{(\alpha+n+1)^2} \iint\limits_{Q_{T_{loc}}} R^{(2)}_{\delta\sigma}(u_{\delta\sigma}) \Delta u_{\delta\sigma}^{\frac{\alpha+n+1}{2}},$$

где $R^{(2)}_{\delta\sigma}(u_{\delta\sigma}) := \overrightarrow{\chi}\, b'_{\delta\sigma}(u_{\delta\sigma}) u_{\delta\sigma}^{\frac{5-3(\alpha+n)}{4}} \nabla u_{\delta\sigma}^{\frac{\alpha+n+1}{4}}$. Учитывая (1.6) получаем:

$$|R^{(2)}_{\delta\sigma}(u_{\delta\sigma})| \leqslant \tilde{R}^{(2)}_{\delta\sigma}(u_{\delta\sigma}) := c\, u_{\delta\sigma}^{\frac{4\lambda-3(\alpha+n)+1}{4}} |\nabla u_{\delta\sigma}^{\frac{\alpha+n+1}{4}}|,$$

где $\frac{3(\alpha+n)-1}{4} < \lambda\, (< \alpha+n+2,\ N=3)$. Из (2.32), (2.30) следует равномерная по δ, σ ограниченость мажорирующей последовательности $\{\tilde{R}^{(2)}_{\delta\sigma}(u_{\delta\sigma})\}$ в $L^{2+\tilde{\sigma}}(Q_{T_{loc}})$ (для $0 < \tilde{\sigma} < 2$ при $N < 3$ и $0 < \tilde{\sigma} < \frac{4(\alpha+n-\lambda+2)}{2\lambda-\alpha-n+5}$ при $N = 3$). Из (3.10), (3.11), леммы B.7 в силу теоремы Витали вытекает, что $\tilde{R}^{(2)}_{\delta\sigma}(u_{\delta\sigma}) \underset{\delta\to 0}{\Rightarrow} \tilde{R}^{(2)}_\sigma(u_\sigma)$ в $L^2(\{u_\sigma > 0\})$. Отсюда, в силу обобщённой леммы Лебега следует:

$$R^{(2)}_{\delta\sigma}(u_{\delta\sigma}) \underset{\delta\to 0}{\Rightarrow} \overrightarrow{\chi}\, b'_\sigma(u_\sigma) u_\sigma^{\frac{1-\alpha-n}{2}} \nabla u_\sigma \text{ в } L^2(\{u_\sigma > 0\}). \tag{3.23}$$

Из сходимости (3.4), в частности, вытекает:

$$\Delta u_{\delta\sigma}^{\frac{\alpha+n+1}{2}} \underset{\delta\to 0}{\rightharpoonup} \Delta u_{\sigma}^{\frac{\alpha+n+1}{2}} \text{ в } L^2(Q_{T_{loc}}). \tag{3.24}$$

Таким образом, из (3.23) и (3.24) следует сходимость в слагаемом I_2 на множестве $\{u_\sigma > 0\}$. Покажем, что $I_2 \underset{\delta\to 0}{\to} 0$ на $\{u_\sigma = 0\}$. Действительно, из (3.11) в силу теоремы Егорова следует, что для любого $\gamma > 0$ существует множество $S_\gamma \subset \{u_\sigma = 0\}$, такое, что $\mathfrak{L}^{N+1}(S_\gamma) \leqslant \gamma$ и $u_{\delta\sigma} \underset{\delta\to 0}{\rightrightarrows} u_\sigma$ на $\{u_\sigma = 0\}\setminus S_\gamma$. Отсюда, применяя неравенство Гёльдера, получаем:

$$\iint\limits_{\{u_\sigma=0\}} \tilde{R}^{(2)}_{\delta\sigma}(u_{\delta\sigma})|\Delta u_{\delta\sigma}^{\frac{\alpha+n+1}{2}}| \leqslant$$

$$\leqslant \overline{\overline{o}}_{\delta\sigma}(1)\Bigg(\iint\limits_{\{u_\sigma=0\}\setminus S_\gamma} |\nabla u_{\delta\sigma}^{\frac{\alpha+n+1}{4}}|^4\Bigg)^{\frac14}\Bigg(\iint\limits_{\{u_\sigma=0\}\setminus S_\gamma} |\Delta u_{\delta\sigma}^{\frac{\alpha+n+1}{2}}|^2\Bigg)^{\frac12} +$$

$$+ c\Bigg(\iint\limits_{S_\gamma} u_{\delta\sigma}^{4\lambda-3(\alpha+n)+1}\Bigg)^{\frac14}\Bigg(\iint\limits_{S_\gamma} |\nabla u_{\delta\sigma}^{\frac{\alpha+n+1}{4}}|^4\Bigg)^{\frac14}\Bigg(\iint\limits_{S_\gamma} |\Delta u_{\delta\sigma}^{\frac{\alpha+n+1}{2}}|^2\Bigg)^{\frac12}.$$

Так как при $\lambda < \alpha+n+2$, $N = 3$ имеет место вложение $L^{\alpha+n+9}(Q_{T_{loc}}) \subset L^{4\lambda-3(\alpha+n)+1}(Q_{T_{loc}})$, то из (2.32), (2.25), (2.29), (2.30) в силу теоремы Витали вытекает, что последнее слагаемое в правой части стремится к нулю, когда $\mathfrak{L}^{N+1}(S_\gamma) \underset{\gamma\to 0}{\to} 0$. Таким образом, в силу обобщённой леммы Лебега имеем:

$$I_2 \underset{\delta\to 0}{\to} \frac{2}{\alpha+n+1} \iint\limits_{\{u_\sigma>0\}} \overrightarrow{\chi}\, b'_\sigma(u_\sigma) u_\sigma^{\frac{1-\alpha-n}{2}} \Delta u_\sigma^{\frac{\alpha+n+1}{2}} \nabla u_\sigma \tag{3.25}$$

при условии (1.17). Принимая во внимание сходимости (3.20), (3.21), (3.23)–(3.25), получаем:

$$\tilde{\mathcal{I}}_{\delta\sigma}(u_{\delta\sigma}) \underset{\delta\to 0}{\to} \int\limits_0^{T_{loc}} \int\limits_{\partial\Omega} \overrightarrow{\chi}\cdot\vec{n}\,\tilde{\Psi}_\sigma(u_\sigma) - \iint\limits_{\{u_\sigma>0\}} \overrightarrow{\chi}\, b'_\sigma(u_\sigma)\nabla u_\sigma \Delta u_\sigma$$

при выполнении (1.17). Здесь $\tilde{\mathcal{I}}_{\delta\sigma}(z)$ из h) теоремы А.1, $\tilde{\Psi}_\sigma(z) := \int\limits_0^z b'_\sigma(\tau)\Psi'_0(\tau)d\tau$. Тем самым неравенство (1.20) доказано.

Замечание 3.2. Локальная энтропийная оценка (1.19) выводится в результате предельных переходов по $\delta \to 0, \sigma \to 0$ в соответствующем локальном варианте энтропийного неравенства (A.4). Этот анализ вполне аналогичен тому, что был проведен в пункте 3.4 и мы его опускаем.

Замечание 3.3. Мы опускаем также предельный переход по $\sigma \to 0$, который основывается на тех же априорных оценках и осуществляется с небольшими модификациями аналогично тому, как был проведен предельный переход по $\delta \to 0$ в пунктах 3.1–3.5.

3.6. Вывод ограничений на n, m и λ

Объединяя все промежуточные ограничения на параметры задачи (N), которые использованы в пунктах 3.1–3.5 (а именно, (2.21), (2.48), (2.51), условие $\alpha > -2$ при $N = 3$, $m > -1$, условие $\alpha < \frac{n+1}{3}$), легко проверяется, что для их одновременного удовлетворения достаточно выполнения единого условия (1.17). Тем самым теорема 1.1 доказана полностью.

4. Доказательство теоремы 1.2: конечность скорости распространения возмущений

Введём следующие обозначения: $\Omega(s) := B(x_1, s)$, $Q_T(s) = (0,T) \times \Omega(s)$, $K(s) := \int\limits_{\Omega(s)} u_0^{\alpha+1}(x)\,dx \,\forall\, s > 0$, где произвольная точка $x_1 \in \partial B(0, \tilde{R}_0 + \frac{3}{2}R_0)$ и $R_0 > 0$ такое, что $B(0, \tilde{R}_0 + 3R_0) \Subset \Omega$. Из предположения, что $\operatorname{supp} u_0(x) \subset B(0, \tilde{R}_0)$, следует: $K(s) \equiv 0 \,\forall\, s \in (0, \frac{3}{2}R_0)$. Для произвольных $s > 0$, $\delta > 0$ введём функцию $\varphi(x) \in C^2(\Omega)$, такую, что $\varphi(x) = 0$, если $x \in \Omega \backslash \Omega(s)$; $\varphi(x) = 1$, если $x \in \Omega(s-\delta)$; $0 \leqslant \varphi(x) \leqslant 1 \;\forall\, x \in \Omega$, $|\nabla \varphi| \leqslant \frac{d}{\delta}$, $|\Delta \varphi| \leqslant \frac{d}{\delta^2}$. Полагаем в локальной энтропийной оценке (1.19) $\zeta^4(x,t) = \varphi^4(x) \exp(-\frac{t}{T})$. Зафиксируем $\alpha \in \tilde{\Delta}_{n,\lambda} \cap (0, +\infty)$, что возможно сделать, так как $n < 2$. После несложных преобразований получаем:

$$\sup_{t \in (0,T)} \int\limits_{\Omega(s-\delta)} u^{\alpha+1}(t) + T^{-1} \iint\limits_{Q_T(s-\delta)} u^{\alpha+1} +$$

$$+ c_3^{-1} \iint\limits_{Q_T(s-\delta)} \left\{ \left|\nabla u^{\frac{\alpha+m+1}{2}}\right|^2 + \left|\nabla u^{\frac{\alpha+n+1}{4}}\right|^4 + \left|D^2 u^{\frac{\alpha+n+1}{2}}\right|^2 \right\} \leqslant K(s) +$$

$$+\,c\left(\delta^{-2}\iint\limits_{Q_T(s)} u^{\alpha+m+1}+\delta^{-4}\iint\limits_{Q_T(s)} u^{\alpha+n+1}+\delta^{-1}\iint\limits_{Q_T(s)} u^{\alpha+\lambda}\right)=:R_T(s,\delta) \tag{4.1}$$

$\forall\, s>0,\ \delta>0$ и $\forall\, T\leqslant T_{loc}$, где T_{loc} из (3.13).

Введём в рассмотрение энергетические функции, связанные с решением $u(t,x)$:

$$G_T^{(1)}(s):=\iint\limits_{Q_T(s)} u^{\alpha+m+1},\quad G_T^{(2)}(s):=\iint\limits_{Q_T(s)} u^{\alpha+n+1},\quad G_T^{(3)}(s):=\iint\limits_{Q_T(s)} u^{\alpha+\lambda}. \tag{4.2}$$

Применяем интерполяционное неравенство из леммы B.5 к функциям $v_1=u^{\frac{\alpha+m+1}{2}}$ при $a=d=2,\ b=\frac{2(\alpha+1)}{\alpha+m+1},\ i=0,\ j=1,\ \theta_1=\frac{mN}{mN+2(\alpha+1)}$; $v_2=u^{\frac{\alpha+n+1}{4}}$ при $a=d=4,\ b=\frac{4(\alpha+1)}{\alpha+n+1},\ i=0,\ j=1,\ \theta_2=\frac{nN}{nN+4(\alpha+1)}$; v_1 при $a=\frac{2(\alpha+\lambda)}{\alpha+m+1},\ d=2,\ b=\frac{2(\alpha+1)}{\alpha+m+1},\ i=0,\ j=1,\ \tilde\theta_3=\frac{N(\lambda-1)(\alpha+m+1)}{(\alpha+\lambda)(mN+2(\alpha+1))},\ \lambda>1$; v_2 при $a=\frac{4(\alpha+\lambda)}{\alpha+n+1},\ d=4,\ b=\frac{4(\alpha+1)}{\alpha+n+1},\ i=0,\ j=1,\ \tilde\theta_4=\frac{N(\lambda-1)(\alpha+n+1)}{(\alpha+\lambda)(nN+4(\alpha+1))},\ \lambda>1$. Интегрируем полученные неравенства по t. С учётом (4.1) получаем следующие соотношения для энергетических функций из (4.2):

$$G_T^{(1)}(s-\delta)\leqslant cT^{1-\theta_1}R_T^{1+k_1}(s,\delta)+cTR_T^{\frac{\alpha+m+1}{\alpha+1}}(s,\delta), \tag{4.3}$$

$$G_T^{(2)}(s-\delta)\leqslant cT^{1-\theta_2}R_T^{1+k_2}(s,\delta)+cTR_T^{\frac{\alpha+n+1}{\alpha+1}}(s,\delta), \tag{4.4}$$

$$G_T^{(3)}(s-\delta)\leqslant c\int\limits_0^T\left(\int\limits_{\Omega(s-\delta)}\left|\nabla v_i\right|^4\right)^{\frac{\tilde\theta_{i+2}(\alpha+\lambda)}{\alpha+n+1}}\left(\int\limits_{\Omega(s-\delta)}u^{\alpha+1}\right)^{\frac{(1-\tilde\theta_{i+2})(\alpha+\lambda)}{\alpha+1}}+$$

$$+\,c\int\limits_0^T\left(\int\limits_{\Omega(s-\delta)}u^{\alpha+1}\right)^{\frac{\alpha+\lambda}{\alpha+1}}\leqslant cT^{1-\theta_{i+2}}R_T^{1+k_{i+2}}(s,\delta)+cTR_T^{\frac{\alpha+\lambda}{\alpha+1}}(s,\delta), \tag{4.5}$$

$i=1,2$, где $R_T(s,\delta)$ из (4.1), $k_1=\frac{2m}{mN+2(\alpha+1)},\ k_2=\frac{4n}{nN+4(\alpha+1)}$; $\theta_3=\frac{N(\lambda-1)}{mN+2(\alpha+1)},\ k_3=\frac{2(\lambda-1)}{mN+2(\alpha+1)}$, если $1<\lambda\leqslant m+1+\frac{2(\alpha+1)}{N}$; $\theta_4=\frac{N(\lambda-1)}{nN+4(\alpha+1)},\ k_4=\frac{4(\lambda-1)}{nN+4(\alpha+1)}$, если $1<\lambda\leqslant n+1+\frac{4(\alpha+1)}{N}$.

Применяем к системе неравенств (4.3)–(4.5) лемму B.8 с $s_1=\frac{3}{2}s_0$. Для строящейся в этой лемме функции $G_T(s):=f_1(T)\sum\limits_{i=1}^{4}\left(G_T^{(i)}(s)\right)^{\frac{\beta}{1+k_i}}$, где $f_1(T) \in C[0, T_{loc}]$, $f_1(0) = 0$, получаем:

$$G_T(s) \equiv 0 \quad \forall\, 0 < s \leqslant \tfrac{3}{2}R_0 - f_2(T) \sum_{i=1}^{4} \Big(G_T(\tfrac{3}{2}R_0) \Big)^{\frac{k_i}{\alpha_i \beta}}. \tag{4.6}$$

Здесь $f_2(T) \in C[0, T_{loc}]$, $f_2(0) = 0$ строится также в лемме B.8; $\beta = (1 + k_1)(1 + k_2)(1 + k_3)(1 + k_4)$, $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 4$, $\alpha_3 = \alpha_4 = 1$.

Далее найдём оценку для $G_T(\frac{3}{2}R_0)$. В силу теоремы 1.1 ($u \in L^\infty(0, T_{loc}; H^1(\Omega))$, $u^{\alpha+m+1} \in L^2(0, T_{loc};\ H^1(\Omega))$, $u^{\lambda+\alpha} \in L^1(Q_{T_{loc}})$), правая часть неравенства (4.1) (т. е. $R_T(s, \delta)$) ограничена для всех $T \leqslant T_{loc}$. Учитывая это и полагая в неравенствах (4.3)–(4.5) $s = 2R_0$, $\delta = \frac{R_0}{2}$, находим:

$$G_T(\tfrac{3}{2}R_0) := f_1(T) \sum_{i=1}^{4} \Big(G_T^{(i)}(\tfrac{3}{2}R_0) \Big)^{\frac{\beta}{1+k_i}} \leqslant C_5\, f_3(T), \tag{4.7}$$

где $f_3(T) \in C[0, T_{loc}], f_3(0) = 0$. Следовательно, свойство (4.6) справедливо для любого s из интервала:

$$0 < s \leqslant \tfrac{3}{2}R_0 - C_6\Gamma(T),\ \Gamma(T) := f_2(T) \sum_{i=1}^{4} \left(f_3(T) \right)^{\frac{k_i}{\alpha_i \beta}}. \tag{4.8}$$

Легко убедиться, что функция $\Gamma(T)$ удовлетворяет всем условиям теоремы 1.2. Из (4.8), очевидно, вытекает, что

$$G_T\left(\tfrac{R_0}{2}\right) = 0 \quad \forall\, T \leqslant \tilde{T} := \Gamma^{-1}(\tfrac{R_0}{C_6}). \tag{4.9}$$

В силу произвольности точки $x_1 \in \partial B(0, \tilde{R}_0 + \frac{3}{2}R_0)$ построенное решение $u(t, x)$ обладает следующим свойством:

$$u(t, x) \equiv 0 \quad \forall\, (t, x) \in (0, T_1) \times \{B(0, \tilde{R}_0 + 2R_0) \backslash B(0, \tilde{R}_0 + R_0)\}, \tag{4.10}$$

где $T_1 := \min\{\tilde{T}, T_{loc}\}$. Это позволяет записать построенное решение $u(t, x)$ в следующем виде: $u = u_1 + u_2$, где $u_1 = u$ в $(0, T_1) \times B(0, \tilde{R}_0 + R_0)$, $u_1 = 0$ в $(0, T_1) \times \{\Omega \backslash B(0, \tilde{R}_0 + R_0)\}$, а $u_2 = u$ в $(0, T_1) \times \{\Omega \backslash B(0, \tilde{R}_0 + 2R_0)\}$, $u_2 = 0$ в $(0, T_1) \times B(0, \tilde{R}_0 + 2R_0)$. В силу свойства (4.10) носители функций u_1, u_2 не пересекаются, поэтому нетрудно проверить, что u_1 является решением задачи (N), а u_2 — решением задачи (N) с $u_0(x) \equiv 0$.

Легко убедиться, что для любых n, m, λ из (1.22) найдётся $\alpha \in \tilde{\Delta}_{n,\lambda} \cap (0, +\infty)$, такое, что выполняются соотношения:

$$m > 0,\ \tfrac{1}{8} < n < 2,$$
$$1 < \lambda < \Phi,\ \text{если } N < 3,\ \Phi := \max\{n + 1 + \tfrac{4(\alpha+1)}{3}, m + 1 + \tfrac{2(\alpha+1)}{3}\},$$
$$1 < \lambda < \min\{\alpha + n + 2, \Phi\} = \alpha + n + 2,\ \text{если } N = 3,$$

которые достаточны для справедливости функциональной системы (4.3)–(4.5). Теорема 1.2 доказана.

5. Доказательство теоремы 1.3: задача Коши

Решение $U(t,x)$ задачи Коши (C) будем строить из решений задачи (N). Пусть $\operatorname{supp} u_0 \Subset B(0,R_0), R_0 > 0,\ \Omega := \Omega_1 = B(0,4R_0)$ и $u(t,x)$ решение задачи (N) из теоремы 1.1 в области $(0,T_{loc}^{(1)}) \times \Omega_1$. В силу теоремы 1.2 с $\tilde{R}_0 = R_0$ следует, что $u(t,x) = u_1(t,x) + u_2(t,x)$ в области $(0,T_1) \times \Omega_1$, где $\operatorname{supp} u_1(t,.) \Subset B(0,2R_0)$, $\operatorname{supp} u_2(t,.) \Subset \Omega_1 \backslash B(0,3R_0)$. Тогда положим:

$$U(t,x) := \begin{cases} u_1(t,x)\ \forall\,(t,x) \in (0,T_1) \times B(0,2R_0), \\ 0\ \forall\,(t,x) \in (0,T_1) \times \{\mathbb{R}^N \backslash B(0,2R_0)\}. \end{cases}$$

Очевидно, что функция $U(t,x)$ является решением задачи (C) в области $(0,T_1)\times\Omega_1$, в смысле определения 1.2. Запишем уточнённые энтропийное (1.18) и энергетическое (1.20) неравенства для решения $U(t,x)$, учитывая, что $\operatorname{supp} U(t,.) \Subset B(0,2R_0) \Subset \Omega$:

$$\sup_{t\in(0,T_1)} \int\limits_\Omega U^{\alpha+1}(t,x) + c_1^{-1} \iint\limits_{Q_t} \Big\{ \big|D^2 U^{\frac{\alpha+n+1}{2}}\big|^2 + \big|\nabla U^{\frac{\alpha+n+1}{4}}\big|^4 \Big\} + \\ + c_1^{-1} \iint\limits_{Q_t} \big|\nabla U^{\frac{\alpha+m+1}{2}}\big|^2 \leqslant \int\limits_\Omega u_0^{\alpha+1}(x) \quad \forall\, t \leqslant T_1, \tag{5.1}$$

$$\tilde{\mathcal{E}}_\Omega(U(t)) \leqslant \tilde{\mathcal{E}}_\Omega(u_0(x)) - \iint\limits_{\mathrm{P}} \overrightarrow{\chi}\, b'(U)\nabla U \Delta U \leqslant \tilde{\mathcal{E}}_\Omega(u_0(x)) + \\ + c\int\limits_0^t \Big(\int\limits_\Omega \big|\nabla U^{\frac{\alpha+n+1}{4}}\big|^4 \Big)^{\frac14} \Big(\int\limits_\Omega \big|D^2 U^{\frac{\alpha+n+1}{2}}\big|^2 \Big)^{\frac12} \Big(\int\limits_\Omega U^\xi \Big)^{\frac14} + \\ + c\int\limits_0^t \Big(\int\limits_\Omega \big|\nabla U^{\frac{\alpha+n+1}{4}}\big|^4 \Big)^{\frac34} \Big(\int\limits_\Omega U^\xi \Big)^{\frac14},\ \xi := 4\lambda - 3(\alpha+n) + 1, \tag{5.2}$$

где $\tilde{\mathcal{E}}_\Omega(u(t))$ из (1.20). Применяя лемму B.5 к функции $v(x) = U$ при $a = \xi > 1$ $\big(\Leftrightarrow \lambda > \frac{3(\alpha+n)}{4}\big)$, $b = 1$, $d = 2$, $i = 0$, $j = 1$, получаем:

$$\int\limits_\Omega U^\xi \leqslant c\Big(\int\limits_\Omega |\nabla U|^2 \Big)^{\frac{N(\xi-1)}{N+2}} \Big(\int\limits_\Omega U \Big)^{1+\frac{(2-N)(\xi-1)}{N+2}} + c\Big(\int\limits_\Omega U \Big)^\xi, \tag{5.3}$$

при $\lambda > \frac{3(\alpha+n)}{4}$, если $N < 3$ и при $\frac{3(\alpha+n)}{4} < \lambda \leqslant \frac{3(\alpha+n)+5}{4}$, если $N = 3$. Если же $N = 3$ и $\frac{3(\alpha+n)-1}{4} < \lambda \leqslant \frac{3(\alpha+n)}{4} \Leftrightarrow 0 < \xi \leqslant 1$, то $\int\limits_\Omega U^\xi \leqslant |\Omega|^{3(\alpha+n)-4\lambda}\big(\int\limits_\Omega U\big)^\xi$. В случае $N = 3$ и $\lambda > \frac{3(\alpha+n)+5}{4}$, применяя лемму B.5 к функции $v(x) = U^{\frac{\alpha+n+1}{4}}$ с $a = \frac{\xi}{\alpha+n+1}$, $b = \frac{24}{\alpha+n+1}$, $d = 4$, $i = 0$, $j = 1$, получаем:

$$\int\limits_\Omega U^\xi \leqslant c\Bigg(\int\limits_\Omega \big|\nabla U^{\frac{\alpha+n+1}{4}}\big|^2\Bigg)^{\nu}\Bigg(\int\limits_\Omega U^6\Bigg)^{\frac{4(\lambda+1)}{3(\alpha+n+3)}} + c\Bigg(\int\limits_\Omega U^6\Bigg)^{\frac{\xi}{6}}, \tag{5.4}$$

где $\nu := \frac{4\lambda-3(\alpha+n)-5}{\alpha+n+3}$.

Из (5.2), учитывая (5.1), (5.3) и вытекающее из финитности носителя $u(t,.)$ сохранение массы $\big(\int\limits_\Omega u(t,x)dx = \int\limits_\Omega u_0(x)dx\big)$, получаем, что $\forall\, t \leqslant T_1$:

$$\tilde{\mathcal{E}}_\Omega(U(t)) \leqslant A_1(\tilde{\mathcal{E}}_\Omega(u_0), T_1) + c_2(u_0)\int\limits_0^t g(\tau)\Big(\tilde{\mathcal{E}}_\Omega(U(\tau))\Big)^{\frac{N(\xi-1)}{4(N+2)}}\,d\tau, \tag{5.5}$$

при $\lambda > \frac{3(\alpha+n)}{4}$, если $N < 3$ и при $\frac{3(\alpha+n)}{4} < \lambda \leqslant \frac{3(\alpha+n)+5}{4}$, если $N = 3$. Здесь $A_1(\tilde{\mathcal{E}}_\Omega(u_0), T_1) := \tilde{\mathcal{E}}_\Omega(u_0) + c_1(u_0)T_1^{\frac14}$, $g(t) := \big(\int\limits_\Omega |\nabla U^{\frac{\alpha+n+1}{4}}|^4\big)^{\frac14} \times$ $\times\big(\int\limits_\Omega |D^2 U^{\frac{\alpha+n+1}{2}}|^2\big)^{\frac12} + \big(\int\limits_\Omega |\nabla U^{\frac{\alpha+n+1}{4}}|^4\big)^{\frac34}$, $c_i(u_0)$ не зависят от $\|u_0\|_{H^1(\Omega)}$, ξ из (5.2). Из (5.5) в силу леммы B.9 и оценки (5.1) вытекает:

$$\tilde{\mathcal{E}}_\Omega(U(t)) \leqslant A_1(\tilde{\mathcal{E}}_\Omega(u_0), T_1)\exp\Bigg\{c_2(u_0)\int\limits_0^t g(\tau)\,d\tau\Bigg\} \leqslant$$

$$\leqslant A_1(\tilde{\mathcal{E}}_\Omega(u_0), T_1)\exp\big\{B_1(T_1)\big\} \quad \forall\, t \leqslant T_1,\ B_1(T_1) := c_3(u_0)T_1^{\frac14} \tag{5.6}$$

($A_1(.,.)$ из (5.5)) при условии, что $\frac{N(\xi-1)}{4(N+2)} \leqslant 1 \Leftrightarrow \lambda \leqslant \frac{N+2}{N} + \frac{3(\alpha+n)}{4}$; $c_3(u_0)$ не зависит от $\|u_0\|_{H^1(\Omega)}$.

В случае $N = 3$ и $\lambda > \frac{3(\alpha+n)+5}{4}$ из (5.2) и (5.4) следует:

$$\tilde{\mathcal{E}}_\Omega(U(t)) \leqslant \tilde{\mathcal{E}}_\Omega(u_0(x)) + c\int\limits_0^t g(\tau)\,\Big(\tilde{\mathcal{E}}_\Omega(U(\tau))\Big)^{\frac{\xi}{8}} d\tau +$$

$$+\, c\int\limits_0^t g(\tau)\Bigg(\int\limits_\Omega \big|\nabla U^{\frac{\alpha+n+1}{4}}\big|^4\Bigg)^{\frac{\nu}{4}}\big(\tilde{\mathcal{E}}_\Omega(U(\tau))\big)^{\frac{\lambda+1}{\alpha+n+3}}\,d\tau \quad \forall\, t \leqslant T_1.$$

Так как $\frac{\xi}{8} > \frac{\lambda+1}{\alpha+n+3}$, то из последнего неравенства вытекает:

$$\tilde{\mathcal{E}}_\Omega(U(t)) \leqslant \tilde{\mathcal{E}}_\Omega(u_0(x)) + c\int\limits_0^t \tilde{g}(\tau)\bigl\{1 + \bigl(\tilde{\mathcal{E}}_\Omega(U(\tau))\bigr)^{\frac{\xi}{8}}\bigr\}\,d\tau \quad \forall\, t \leqslant T_1, \tag{5.7}$$

где $\tilde{g}(t) := g(t)\bigl\{1 + \bigl(\int\limits_\Omega \bigl|\nabla U^{\frac{\alpha+n+1}{4}}\bigr|^4\bigr)^{\frac{\nu}{4}}\bigr\}$, ξ из (5.2), ν из (5.4), $g(t)$ из (5.5). В силу (5.1) и неравенства Гёльдера имеем:

$$c\int\limits_0^t \tilde{g}(\tau)d\tau \leqslant B_2(T_1) \quad \forall\, t \leqslant T_1,\ B_2(T_1) := c_4(u_0)T_1^{\omega} + c_5(u_0)T_1^{\frac{1}{4}}, \tag{5.8}$$

где $\omega = \frac{\alpha+n-\lambda+2}{\alpha+n+3}$ и $\lambda < \alpha+n+2$; $c_i(u_0)$ не зависят от $\|u_0\|_{H^1(\Omega)}$. Из (5.7) вытекает:

$$\tilde{\mathcal{E}}_\Omega(U(t)) \leqslant A_2(\tilde{\mathcal{E}}_\Omega(u_0), T_1) + c\int\limits_0^t \tilde{g}(\tau)\left(\tilde{\mathcal{E}}_\Omega(U(\tau))\right)^{\frac{\xi}{8}} d\tau,\ \xi \text{ из } (5.2),$$

где $A_2(\tilde{\mathcal{E}}_\Omega(u_0), T_1) := \tilde{\mathcal{E}}_\Omega(u_0) + B_2(T_1)$, ω из (5.8). Отсюда, в силу (5.8) и леммы B.9 получаем:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{E}}_\Omega(U(t)) &\leqslant A_2(\tilde{\mathcal{E}}_\Omega(u_0), T_1)\exp\Bigl\{c\int\limits_0^t \tilde{g}(\tau)d\tau\Bigr\} \leqslant \\ &\leqslant A_2(\tilde{\mathcal{E}}_\Omega(u_0), T_1)\exp\{B_2(T_1)\},\ B_2(T_1) \text{ из } (5.8),\end{aligned} \tag{5.9}$$

при условии, что $\frac{\xi}{8} \leqslant 1 \Leftrightarrow \lambda \leqslant \frac{3(\alpha+n)+7}{4}$. Таким образом, справедливы равномерные по $R_0 > 0$ ($\Omega = B(0, 4R_0)$) априорные оценки (5.6), (5.9), если выполняются следующие условия:

$$\begin{gathered} m > 0,\ \tfrac{1}{8} < n < 2, \\ \max\Bigl\{\tfrac{3(\alpha+n)-1}{4}, 1\Bigr\} < \lambda \leqslant \tfrac{N+2}{N} + \tfrac{3(\alpha+n)}{4} \text{ при } N < 3, \\ \max\Bigl\{\tfrac{3(\alpha+n)-1}{4}, 1\Bigr\} < \lambda \leqslant \tfrac{3(\alpha+n)+7}{4} \text{ при } N = 3 \end{gathered} \tag{5.10}$$

Несложно проверить, что для любых n, m, λ из (1.23) найдётся положительное $\alpha \in \tilde{\Delta}_{n,\lambda}$, такое, что выполняются соотношения (5.10).

Используя уточнённое энтропийное неравенство (5.1), установим не зависящую от $R_0 > 0$ оценку начальной энергии $G_T(\frac{3}{2}R_0)$ из (4.7) и, следовательно, уточним оценку движения границы носителя. Применяя лемму B.5 для оценки $G_T^{(1)}(\frac{3}{2}R_0)$ ($G_T^{(1)}(s)$ из (4.2)), по аналогии с (4.3), получаем:

$$G_T^{(1)}(\tfrac{3}{2}R_0) \leqslant c\Bigg(\iint\limits_{Q_T} \big|\nabla U^{\frac{\alpha+m+1}{2}}\big|^2\Bigg)^{\theta_1}\Bigg(\int\limits_0^T\Bigg(\int\limits_\Omega U^{\alpha+1}\Bigg)^{1+\frac{m}{\alpha+1}}\Bigg)^{1-\theta_1} +$$
$$+ cT\Bigg(\sup_{t\in(0,T)}\int\limits_\Omega U^{\alpha+1}\Bigg)^{\frac{\alpha+m+1}{\alpha+1}} \overset{(5.1)}{\leqslant} c(T+T^{1-\theta_1})\|u_0\|^h_{L^{\alpha+1}(\Omega)} +$$
$$+ c(T+T^{1-\theta_1})\|u_0\|^{\alpha+m+1}_{L^{\alpha+1}(\Omega)} \leqslant c(u_0)(T+T^{1-\theta_1}) \quad \forall\, T\leqslant T_1,$$

где $h=\frac{(mN+2(m+\alpha+1))(\alpha+1)}{mN+2(\alpha+1)}$; $c(u_0)$ зависит только от нормы $\|u_0\|_{L^{\alpha+1}(\Omega)}$. Аналогичным образом оцениваем энергетические функции $G_T^{(i)}(\frac{3}{2}R_0)$, $i=2,3$ ($G_T^{(i)}(s)$ из (4.2)). В итоге получаем, что

$$G_T(\tfrac{3}{2}R_0) \leqslant c_6(u_0)f_3(T),\ \ f_3(T) \text{ из } (4.7)$$

и, следовательно, свойство (4.9) имеет место с $\tilde{T} = \Gamma^{-1}\big(\frac{R_0}{c_7(u_0)}\big)$. Отсюда вытекает, что $\operatorname{supp} U(t,.) \subset B(0, R_0 + c_7(u_0)\Gamma(t))\ \forall\, 0\leqslant t\leqslant T_1 = \min\big\{T_{loc}^{(1)}, \Gamma^{-1}\big(\frac{R_0}{c_7(u_0)}\big)\big\}$, где $\Gamma(t)$ из теоремы 1.2, $c_7(u_0)$ зависит только от нормы $\|u_0\|_{L^{\alpha+1}(\Omega)}$ и не зависит от области Ω (т. е. от $R_0>0$). Отметим также, что для построенного решения $U_1(t,x) := U(t,x)$, $(t,x)\in(0,T_1)\times\mathbb{R}^N$, справедливы оценки (5.1), (5.6), (5.9).

Теперь будем строить продолжение решения $U(t,x)$ при $t\geqslant T_1$. Обозначим $R_1 := R_0 + c_7(u_0)\Gamma(T_1)$ (очевидно, $R_1\leqslant 2R_0$) и рассмотрим задачу (N) в области $\Omega_2 := B(0,4R_1)$. Следуя доказательствам теорем 1.1 и 1.2, построим решение $U_2(t,x)$ задачи (N) в области $(T_1, T_1+T_2)\times\Omega_2$ с начальным условием $U_2(T_1,x) = U_1(T_1,x)$, где $T_2 := \min\big\{T_{loc}^{(2)},\ \Gamma^{-1}\big(\frac{R_1}{c_7(u_0)}\big) + T_1\big\}$ ($T_{loc}^{(2)} = T_{loc}^{(2)}(\mathcal{E}_\Omega(U_1(T_1)), \|U_1(T_1)\|_{L^{\alpha+1}(\Omega_2)}, \Omega_2)$, $\mathcal{E}_\Omega(.)$ из h) теоремы A.1), причём, $\operatorname{supp} U_2(t,.) \subset B(0, R_1 + c_7(U_1(T_1))\Gamma(t-T_1))\ \forall\, T_1\leqslant t\leqslant T_1+T_2$ и справедливы оценки типа (5.1), (5.6), (5.9):

$$\|U_2(t,.)\|_{L^{\alpha+1}(\Omega_2)} \leqslant \|U_1(T_1,.)\|_{L^{\alpha+1}(\Omega_2)}\ \forall\, t\in[T_1,T_1+T_2], \tag{5.11}$$

$$\tilde{\mathcal{E}}_\Omega(U_2(t,.)) \leqslant A_i(\tilde{\mathcal{E}}_\Omega(U_1(T_1)),T_1)\exp\{B_i(T_1)\}\ \forall\, t\in[T_1,T_1+T_2], \tag{5.12}$$

где $A_i(.,.), B_i(.)\,(i=1,2)$ из (5.5)–(5.9). В силу оценок (5.1), (5.6), (5.9), (5.11), (5.12) функция

$$U(t,x) := \begin{cases} U_1(t,x),\ (t,x) \in [0,T_1] \times \mathbb{R}^N, \\ U_2(t,x),\ (t,x) \in [T_1, T_1+T_2] \times \Omega_2, \\ 0,\ (t,x) \in [T_1, T_1+T_2] \times \{\mathbb{R}^N \backslash \Omega_2\}, \end{cases}$$

как нетрудно проверить, является решением задачи Коши в области $(0, T_1+T_2) \times \mathbb{R}^N$ с начальным условием $U(0,x) = u_0(x)$. Поэтому в силу теоремы 1.2 можно уточнить оценку носителя этого решения: $\operatorname{supp} U(t,.) \subset B(0, R_0 + c_7(u_0)\Gamma(t))\ \forall\, 0 \leqslant t \leqslant T_1+T_2$, кроме того, справедливы оценки, аналогичные оценкам (5.1), (5.6), (5.9):

$$\|U(t,.)\|_{L^{\alpha+1}(\Omega_2)} \leqslant \|u_0\|_{L^{\alpha+1}(\Omega_2)}\ \forall\, t \leqslant T_1+T_2, \tag{5.13}$$

$$\tilde{\mathcal{E}}_\Omega(U(t,.)) \leqslant A_i(\tilde{\mathcal{E}}_\Omega(u_0), T_1+T_2) \exp\{B_i(T_1+T_2)\}\ \forall\, t \leqslant T_1+T_2, \tag{5.14}$$

где $A_i(.,.), B_i(.)\,(i = 1,2)$ из (5.5)–(5.9). Теперь используем значение $U(T_1+T_2, x)$ как начальную функцию в следующей задаче Неймана в области $(T_1+T_2, T_1+T_2+T_3) \times \Omega_3$, где $T_3 := \min\big\{T^{(3)}_{loc}(\mathcal{E}_\Omega(U(T_1 + T_2,.)), \|U(T_1+T_2,.)\|_{L^{\alpha+1}(\Omega_3)}, \Omega_3), \Gamma^{-1}\big(\frac{R_2}{c_7(u_0)}\big)+T_1+T_2\big\}$, $\Omega_3 := B(0, 4R_2)$, $R_2 := R_0 + c_7(u_0)\Gamma(T_1+T_2)$. В силу теорем 1.1–1.3 получим решение $U_3(t,x)$ такое, что $\operatorname{supp} U_3(t,.) \Subset \Omega_3\ \forall\, T_1+T_2 \leqslant t \leqslant T_1+T_2+T_3$. Следовательно, продолжая его нулём вне Ω_3, получим соответствующее решение задачи Коши в $(0, T_1+T_2+T_3) \times \mathbb{R}^N$ с единой оценкой носителя:

$$\operatorname{supp} U(t,.) \subset B(0, R_0 + c_7(u_0)\Gamma(t))\ \forall\, 0 \leqslant t \leqslant T_1+T_2+T_3.$$

Продолжая описанную процедуру k раз и устремляя $k \to \infty$, получим решение $U(t,x)$ для всех $t \leqslant T^* = \sum\limits_{i=1}^{\infty} T_i$. Покажем, что $T^* = \infty$. Предположим, что это не так. Тогда для произвольного сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ можно найти номер $k = k(\varepsilon)$ такой, что $\sum\limits_{i=1}^{k} T_i = T', T^* - T' < \varepsilon$, и решение $U(t,x)$ построено на интервале $(0, T')$. Тогда, используя $U(T',x)$ как начальную функцию, построим, следуя теоремам 1.1, 1.2, решение $U_{k+1}(t,x)$ задачи (N) в области $(T', T'+T_{k+1}) \times \Omega_{k+1}$, где $\Omega_{k+1} := B(0, 4R_{k+1}), R_{k+1} := R_0 + c_7(u_0)\Gamma(T')$, $T_{k+1} := \min\big\{T^{(k+1)}_{loc}(\mathcal{E}_\Omega(U(T',.)), \|U(T',.)\|_{L^{\alpha+1}(\Omega_{k+1})}, \Omega_{k+1}), \Gamma^{-1}\big(\frac{R_{k+1}}{c_7(u_0)}\big)+T'\big\}$. В силу финитности носителя этого решения в Ω_{k+1} для всех $t \in [T', T'+T_{k+1}]$ заключаем, что $U_{k+1}(t,x)$ является решением соответствующей задачи Коши, которое определяет продолжение решения $U(t,x)$ на интервал $(0, T'+T_{k+1})$. Из определения T_{k+1} легко видеть, что

T_{k+1} не зависит ни от k, ни от ε, а зависит только от T^*, причём $T_{k+1} = T_{k+1}(T^*) \to 0$ только при $T^* \to \infty$. Следовательно, мы можем продолжить наше решение $U(t,x)$ на интервал $(0, T^* - \varepsilon + T_{k+1}(T^*))$, где $T^* - \varepsilon + T_{k+1}(T^*) > T^*$, что противоречит сделанному допущению. Значит $T^* = \infty$. Теорема 1.3 доказана.

Приложение A

A.1. Построение решений $u_{\varepsilon\delta\sigma}$

Теорема A.1. *Пусть $N \in \{1,2,3\}$, $m > -1$, $n > 0$, кроме того $n < m$, если $N = 3$ и $m \geqslant 5$; тогда для произвольных $\delta > 0$, $\sigma > 0$ и конечного $T > 0$ существует пара функций $(u_{\delta\sigma}, \overrightarrow{J}_{\delta\sigma})$, являющаяся решением задачи $(N_{\delta\sigma})$ в следующем смысле:*

a) $(u_{\delta\sigma}, \overrightarrow{J}_{\delta\sigma}) \in L^\infty(0,T; H^1(\Omega)) \cap L^2(0,T; H^2_*(\Omega)) \times L^2(Q_T)$;

b) пара $(u_{\delta\sigma}, \overrightarrow{J}_{\delta\sigma})$ удовлетворяет следующему интегральному тождеству:

$$\int\limits_0^T \langle \partial_t u_{\delta\sigma}(t), \zeta(t) \rangle_{(H^1)^*, H^1}\, dt = \iint\limits_{Q_T} \overrightarrow{J}_{\delta\sigma} \nabla\zeta + \iint\limits_{Q_T} \overrightarrow{\chi}\, b'_{\delta\sigma}(u_{\delta\sigma}) \nabla u_{\delta\sigma} \zeta$$

с произвольной функцией $\zeta \in L^2(0,T; H^1(\Omega))$;

c) вектор-функция $\overrightarrow{J}_{\delta\sigma}$ удовлетворяет равенству

$$\overrightarrow{J}_{\delta\sigma} = m_{\delta\sigma}(u_{\delta\sigma})[\nabla\Delta u_{\delta\sigma} - u_{\delta\sigma}^{m-n} \nabla u_{\delta\sigma}]$$

в следующем слабом смысле:

$$\iint\limits_{Q_T} \overrightarrow{J}_{\delta\sigma} \cdot \vec{\eta} = \tfrac{1}{2} \iint\limits_{Q_T} m''_{\delta\sigma}(u_{\delta\sigma}) |\nabla u_{\delta\sigma}|^2 \nabla u_{\delta\sigma} \vec{\eta} +$$
$$+ \tfrac{1}{2} \iint\limits_{Q_T} m'_{\delta\sigma}(u_{\delta\sigma}) |\nabla u_{\delta\sigma}|^2 \operatorname{div}\vec{\eta} + \iint\limits_{Q_T} m'_{\delta\sigma}(u_{\delta\sigma}) \langle \nabla u_{\delta\sigma}, D\vec{\eta}, \nabla u_{\delta\sigma} \rangle +$$
$$+ \iint\limits_{Q_T} m_{\delta\sigma}(u_{\delta\sigma}) \nabla u_{\delta\sigma} \nabla \operatorname{div}\vec{\eta} + \iint\limits_{Q_T} H_{\delta\sigma}(u_{\delta\sigma}) \operatorname{div}\vec{\eta}$$

для всех $\vec{\eta} \in L^\infty(0,T; W^2_\infty(\Omega))$: $\vec{\eta} \cdot \vec{n} = 0$ на $(0,T) \times \partial\Omega$, где $H_{\delta\sigma}(z) := \int\limits_0^z \tau^{m-n} m_{\delta\sigma}(\tau)\, d\tau$;

d) $u_{\delta\sigma}(t,.) \underset{t\to 0}{\Rightarrow} u_{0\delta\sigma}(.)$ в $L^2(\Omega)$;

e) если $N = 1$ и $s \geqslant 4$, тогда $u_{\delta\sigma}(t,.) > 0$ в $(0,T) \times \overline{\Omega}$, если $N = 2$ и $s > 4$ или $N = 3$ и $s > 8$, то $u_{\delta\sigma}(t,.) > 0$ в $\overline{\Omega}$ для почти всех $t > 0$;

f) для почти всех t и s из e) справедливо неравенство:

$$\int\limits_{\Omega} G_0(u_{\delta\sigma}(t))dx + \iint\limits_{Q_t} \left[|\Delta u_{\delta\sigma}|^2 + u_{\delta\sigma}^{m-n}|\nabla u_{\delta\sigma}|^2\right] \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_{\Omega} G_0(u_{0\delta\sigma}(x))dx + \iint\limits_{Q_t} \overrightarrow{\chi}\, b'_{\delta\sigma}(u_{\delta\sigma})g_0(u_{\delta\sigma})\nabla u_{\delta\sigma},$$

где $G_0(z) := \int\limits_1^z g_0(\tau)d\tau = \int\limits_1^z\int\limits_1^v \frac{d\tau dv}{m_{\delta\sigma}(\tau)}$;

g) $u_{\delta\sigma}(t,.) \in C^{\beta}(\overline{\Omega})$ для почти всех $t > 0$ и любого $\beta \in \left[0, \frac{4-N}{2}\right)$, $N < 4$;

h) для почти всех $0 \leqslant t_1 < t_2$ ($t_1 = 0$, если $m-n+2 \leqslant 0$) и любом $q' \in (1,2)$ ($q' = 2$, если $N = 1$) для потока $\overrightarrow{J}_{\delta\sigma}$ справедлива оценка:

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} \left\|\overrightarrow{J}_{\delta\sigma}(t)\right\|^2_{L^{q'}(\Omega)}dt \leqslant 2 \sup_{t\in(t_1,t_2)} \|m_{\delta\sigma}(u_{\delta\sigma}(t))\|_{L^{\frac{q'}{2-q'}}(\Omega)} \times$$
$$\times \left[\mathcal{E}_{\Omega}(u_{\delta\sigma}(t_1)) - \mathcal{E}_{\Omega}(u_{\delta\sigma}(t_2)) + \mathcal{I}_{\delta\sigma}(u_{\delta\sigma})\right], \quad \text{(A.1)}$$

где $\mathcal{I}_{\delta\sigma}(u_{\delta\sigma}) := \tilde{\mathcal{I}}_{\delta\sigma}(u_{\delta\sigma}) + \iint\limits_{Q_{t_1}^{t_2}} \left\{\frac{1}{2}m_{\delta\sigma}(u_{\delta\sigma})|\nabla u_{\delta\sigma}|^2 + \overrightarrow{\chi}\, b'_{\delta\sigma}(u_{\delta\sigma})u_{\delta\sigma}\nabla u_{\delta\sigma}\right\}$,
$\tilde{\mathcal{I}}_{\delta\sigma}(u_{\delta\sigma}) := \iint\limits_{Q_{t_1}^{t_2}} \overrightarrow{\chi}\, b'_{\delta\sigma}(u_{\delta\sigma})\{-\Delta u_{\delta\sigma} + \Psi'_0(u_{\delta\sigma})\}\nabla u_{\delta\sigma}$, $\Psi_0(z)$ *из* (1.14), $\mathcal{E}_{\Omega}(u_{\delta\sigma}(t)) := \tilde{\mathcal{E}}_{\Omega}(u_{\delta\sigma}(t)) + \frac{1}{2}\|u_{\delta\sigma}(t)\|^2_{L^2(\Omega)}$, $\tilde{\mathcal{E}}_{\Omega}(u_{\delta\sigma}(t))$ *из* (1.20);

i) для почти всех $0 \leqslant t_1 < t_2$ ($t_1 = 0$, если $m - n + 2 \leqslant 0$) имеют место неравенства:

$$\mathcal{E}_{\Omega}(u_{\delta\sigma}(t_2)) \leqslant \mathcal{E}_{\Omega}(u_{\delta\sigma}(t_1)) + \mathcal{I}_{\delta\sigma}(u_{\delta\sigma}), \quad \mathcal{I}_{\delta\sigma}(u_{\delta\sigma}) \text{ из (A.1)}, \quad \text{(A.2)}$$

$$\tilde{\mathcal{E}}_{\Omega}(u_{\delta\sigma}(t_2)) \leqslant \tilde{\mathcal{E}}_{\Omega}(u_{\delta\sigma}(t_1)) + \tilde{\mathcal{I}}_{\delta\sigma}(u_{\delta\sigma}), \quad \tilde{\mathcal{I}}_{\delta\sigma}(u_{\delta\sigma}) \text{ из } h); \quad \text{(A.3)}$$

j) в условиях e) для любого $\alpha \in \left(\frac{1}{2} - n, 2 - n\right) \setminus \{0, -1\}$ и любого $T > 0$ существуют положительные постоянные $c_1, C_2(\Omega)$, такие, что

$$\sup_{t\in[0,T]} \int\limits_{\Omega} G^{(\alpha)}_{\delta\sigma}(u_{\delta\sigma}(t))\,dx + c_1^{-1} \iint\limits_{Q_T} \left\{\left|D^2 u_{\delta\sigma}^{\frac{\alpha+n+1}{2}}\right|^2 + \left|\nabla u_{\delta\sigma}^{\frac{\alpha+n+1}{4}}\right|^4\right\} +$$
$$+ c_1^{-1} \iint\limits_{Q_T} u_{\delta\sigma}^{\alpha+m-1}|\nabla u_{\delta\sigma}|^2 \leqslant \int\limits_{\Omega} G^{(\alpha)}_{\delta\sigma}(u_{0\delta\sigma})\,dx + C_2(\Omega) \iint\limits_{Q_T} u_{\delta\sigma}^{\alpha+n+1} +$$

$$+\iint\limits_{Q_T} \overrightarrow{\chi}\, b'_{\delta\sigma}(u_{\delta\sigma}) g^{(\alpha)}_{\delta\sigma}(u_{\delta\sigma}) \nabla u_{\delta\sigma}, \quad (A.4)$$

где $G^{(\alpha)}_{\delta\sigma}(z) := \frac{1}{\alpha(\alpha+1)} z^{\alpha+1} + \frac{\delta}{(s-\alpha-n)(s-\alpha-n-1)} z^{\alpha+n+1-s} + \frac{\sigma}{(\alpha+n)(\alpha+n+1)} \times$ $\times z^{\alpha+n+1}$, $g^{(\alpha)}_{\delta\sigma}(z) := (G^{(\alpha)}_{\delta\sigma}(z))'$, $(g^{(\alpha)}_{\delta\sigma}(z))' = \frac{z^{\alpha+n-1}}{m_{\delta\sigma}(z)}$ *и* $C_2(\Omega) = 0$, *если область* Ω *— выпуклая.*

A.2. Доказательство следствия 1.1

Запишем два простых следствия из интерполяционных лемм B.4 и B.5:

$$\int\limits_{\Omega} v^a \leqslant c\left(\int\limits_{\Omega} |\nabla v|^2\right)^{\frac{\theta_1 a}{2}} \left(\int\limits_{\Omega} v^b\right)^{\frac{(1-\theta_1)a}{b}} + c\left(\int\limits_{\Omega} v^b\right)^{\frac{a}{b}}, \quad (A.5)$$

где $\theta_1 = \frac{2N(a-b)}{a(2N+b(2-N))}$ и $\frac{\theta_1 a}{2} + \frac{(1-\theta_1)a}{b} = \frac{2a+N(2-b)}{2N+b(2-N)} > 1$, $b < a(<$ 6 при $N = 3)$;

$$\int\limits_{\partial\Omega} v^a \leqslant c\left(\int\limits_{\Omega} |\nabla v|^2\right)^{\frac{\theta_2 a}{2}} \left(\int\limits_{\Omega} v^b\right)^{\frac{(1-\theta_2)a}{b}} + c\left(\int\limits_{\Omega} v^b\right)^{\frac{a}{b}}, \quad (A.6)$$

где $\theta_2 = \frac{2(aN-b(N-1))}{a(2N+b(2-N))}$, $a > \frac{b(N-1)}{N}$ и $\frac{\theta_2 a}{2} + \frac{(1-\theta_2)a}{b} = \frac{2a+(N-1)(2-b)}{2N+b(2-N)} > 1$, $\frac{b+2}{2} < a(< 4$ при $N = 3)$. Обозначим:

$$E_b(v(t,.)) = \int\limits_{\Omega} \{|\nabla v(t,.)|^2 + v^b(t,.)\} dx. \quad (A.7)$$

Оценим по очереди правые части неравенств (1.18), (1.20). Так как $n < 2$, то интервал $\tilde{\Delta}_{n,\lambda} \cap (0,+\infty)$ ($\tilde{\Delta}_{n,\lambda}$ из (1.12)) не пуст и можно выбрать параметр α строго положительным. Следовательно, применяя неравенство (A.6) к функции $v = u$ при $a = \lambda+\alpha, b = \alpha+1$ и интегрируя по t, получаем:

$$\left|\int\limits_0^T \int\limits_{\partial\Omega} \overrightarrow{\chi}\cdot\vec{n}\,\mathcal{B}^{(\alpha)}(u)\right| \overset{(1.6)}{\leqslant} c\int\limits_0^T \int\limits_{\partial\Omega} u^{\lambda+\alpha} \leqslant c\int\limits_0^T \{E^{s_1}_{\alpha+1}(u(t)) + E^{s_2}_{\alpha+1}(u(t))\}\, dt$$

при $\max\{1, \frac{3-\alpha}{2}\} < \lambda(< 4-\alpha, N = 3)$. Здесь $s_1 = \frac{2(\lambda+\alpha)+(1-\alpha)(N-1)}{2N+(\alpha+1)(2-N)}$, $s_2 = \frac{\lambda+\alpha}{\alpha+1}$, $s_i > 1$; $\mathcal{B}^{(\alpha)}(z)$ из (1.18). Применяя неравенство (A.6) к

$v = u$ при $a = 4\lambda - 3(\alpha+n)+1,\ b = \alpha+1$, а затем интегрируя по t, находим (см. (2.19)):

$$\Big|\iint\limits_{Q_T} \overrightarrow{\chi} b'(u)\Delta u \nabla u\Big| \overset{(1.6)}{\leqslant} \gamma \iint\limits_{Q_T} \big|D^2 u^{\frac{\alpha+n+1}{2}}\big|^2 + \gamma B_0 + \\ + c(\gamma)\iint\limits_{Q_T} u^{4\lambda-3(\alpha+n)+1} \leqslant \gamma \iint\limits_{Q_T} \big|D^2 u^{\frac{\alpha+n+1}{2}}\big|^2 + \gamma B_0 + \\ + c(\gamma)\int\limits_0^T \{E_{\alpha+1}^{s_3}(u(t)) + E_{\alpha+1}^{s_4}(u(t))\}dt \quad \forall \gamma > 0$$

при $\alpha + \frac{3n}{4} < \lambda (< \frac{3(\alpha+n)+5}{4},\ N=3)$. Здесь B_0 из (2.3), $s_3 = \frac{4\lambda-3(\alpha+n)+1}{\alpha+1}$, $s_4 = \frac{2(4\lambda-3(\alpha+n)+1)+N(1-\alpha)}{2N+(\alpha+1)(2-N)}$, $s_i > 1$. Интегрируя неравенство (A.6) с $v = u,\ a = \lambda+m-n+1,\ b = \alpha+1\ (m-n+1>0)$ по t, получаем:

$$\Big|\int\limits_0^T \int\limits_{\partial\Omega} \overrightarrow{\chi}\cdot\vec{n}\,\tilde{\Psi}_0(u)\Big| \overset{(1.14)}{\underset{}{\overset{(1.6)}{\leqslant}}} c \int\limits_0^T\int\limits_{\partial\Omega} u^{\lambda+m-n+1} \leqslant \\ \leqslant c\int\limits_0^T \{E_{\alpha+1}^{s_5}(u(t)) + E_{\alpha+1}^{s_6}(u(t))\}\,dt, \quad E_b \text{ из (A.7)}$$

при $\max\{n-m+\frac{\alpha+1}{2}, n-m+\alpha\} < \lambda (< n-m+3,\ N=3)$. Здесь $s_5 = \frac{2(\lambda+m-n+1)+(1-\alpha)(N-1)}{2N+(\alpha+1)(2-N)}$, $s_6 = \frac{\lambda+m-n+1}{\alpha+1}$, $s_i > 1$; $\tilde{\Psi}_0(z)$ из (1.20).

Складываем неравенства (1.18), (1.20). Учитывая полученные выше оценки и то, что $u_0 \equiv 0$, выводим:

$$E_{\alpha+1}(u(T,x)) \leqslant c\int\limits_0^T \{E_{\alpha+1}^{s_{\min}}(u(t)) + E_{\alpha+1}^{s_{\max}}(u(t))\}\,dt\ \forall T \leqslant T_{loc}. \quad (A.8)$$

Здесь $1 < s_{\min} := \min\{s_i\} \leqslant s_{\max} := \max\{s_i\}$ $(i = \overline{1,6})$, если $\max\{1, \frac{3-\alpha}{2}, \alpha+\frac{3n}{4}, n-m+\frac{\alpha+1}{2}, n-m+\alpha\} < \lambda\,(< \min\{4-\alpha, \frac{3(\alpha+n)+5}{4}, n-m+3\}$ при $N=3$), $\alpha \in \tilde{\Delta}_{n,\lambda} \cap (0,+\infty)$ и $m-n+1>0$. В случае $N=3$ и $\min\{4-\alpha, \frac{3(\alpha+n)+5}{4}, n-m+3\} \leqslant \lambda < \alpha+n+2$ $(\alpha \in \tilde{\Delta}_{n,\lambda} \cap (0,+\infty))$ оценка вида (A.8) получается, если правые части (1.18), (1.20) оцениваются с помощью неравенств (2.3), (2.4) (см. пп. 2.2). Объединяя все ограничения на параметры α и λ получаем, что неравенство (A.8) справедливо, если

$$\max\{1, \tfrac{3-\alpha}{2}, \alpha+\tfrac{3n}{4}, n-m+\tfrac{\alpha+1}{2}, n-m+\alpha\} < \lambda\,(<\alpha+n+2,\ N=3). \tag{A.9}$$

Нетрудно убедиться, что для всех m, n и λ из (1.21) найдётся α из интервала $\tilde{\Delta}_{n,\lambda}\cap(0,+\infty)$, такое, что соотношения (A.9) имеют место и тогда из (A.8) в силу леммы B.9 вытекает, что $u(t,x)\equiv 0\ \forall\, 0\leqslant t\leqslant T_{loc}$ (T_{loc} из теоремы 1.1) при выполнении (1.21).

Приложение B

Обобщённая лемма Лебега. Пусть множество $E\subset\mathbb{R}^N$ — измеримое, $g_n \underset{n\to\infty}{\Rightarrow} g$ в $L^q(E)$ с $1\leqslant q<\infty$ и $f_n, f: E\to\mathbb{R}^N$ — измеримые функции, такие, что $f_n \underset{n\to\infty}{\to} f$ п. в. в E и $|f_n|^p\leqslant\ |g_n|^q$ п. в. в E с $1\leqslant p<\infty$. Тогда $f_n \underset{n\to\infty}{\Rightarrow} f$ в $L^p(E)$.

Лемма B.1. ([21]) *Пусть X, Y, Z — банаховы пространства, $X\Subset Y\subset Z$, X и Z рефлексивны. Тогда компактно вложение $\{u\in L^{p_0}(0,T;X): \partial_t u\in L^{p_1}(0,T;Z), 1<p_i<\infty, i=0,1\}\Subset L^{p_0}(0,T;Y)$.*

Лемма B.2. ([24]). *Пусть X, Y, Z — банаховы пространства, $X\Subset Y\subset Z$. Тогда компактно вложение $\{u\in L^\infty(0,T;X): \partial_t u\in L^p(0,T;Z), p>1\}\Subset C(0,T;Y)$.*

Лемма B.3. ([15]). *Пусть $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ — ограниченная область с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega$ и пусть $\tilde{m}$, $p\geqslant 1$. Тогда существует постоянная $d>0$, зависящая только от $\tilde{m}$, p, N и структуры $\partial\Omega$, такая, что для всех $v\in L^\infty(0,T;L^{\tilde{m}}(\Omega))\cap L^p(0,T;W_p^1(\Omega))$ имеет место неравенство:*

$$\|v\|_{L^q(Q_T)}\leqslant d\Big(1+\frac{T}{|\Omega|^{\frac{N(p-\tilde{m})+\tilde{m}p}{N\tilde{m}}}}\Big)^{\frac{1}{q}}\Big(\operatorname*{ess\,sup}_{0<t<T}\|v(t)\|_{L^{\tilde{m}}(\Omega)}+\|\nabla v\|_{L^p(Q_T)}\Big),$$

где $q=\frac{p(N+\tilde{m})}{N}$.

Лемма B.4. ([22]). *Если $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ — ограниченная область с C^1 — гладкой границей, $a>1$, $b>0$, $a>\frac{N-1}{N}b>0$, $d>1$, тогда существуют положительные постоянные d_1 и d_2 ($d_2=0$, если Ω неограниченная), зависящие только от Ω, d, b и N, такие, что для любой функции $v(x)\in W_d^1(\Omega)\cap L^b(\Omega)$ справедливо неравенство:*

$$\|v\|_{L^a(\partial\Omega)}\leqslant d_1\,\|\nabla v\|^{\theta}_{L^d(\Omega)}\,\|v\|^{1-\theta}_{L^b(\Omega)}+d_2\,\|v\|_{L^b(\Omega)}\,,\ \theta=\frac{\frac{1}{b}-\frac{N-1}{aN}}{\frac{1}{b}+\frac{1}{N}-\frac{1}{d}}\in(0,1).$$

Лемма B.5. ([22]). *Если $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ — ограниченная область с кусочно-гладкой границей, $a > 1$, $b \in (0, a)$, $d > 1$, $0 \leqslant i < j$, i и $j \in \mathbb{N}$, тогда существуют положительные постоянные d_1 и d_2 ($d_2 = 0$, если Ω неограниченная), зависящие только от Ω, d, j, b и N, такие, что для любой функции $v(x) \in W^j_d(\Omega) \cap L^b(\Omega)$ справедливо неравенство:*

$$\left\|D^i v\right\|_{L^a(\Omega)} \leqslant d_1 \left\|D^j v\right\|^{\theta}_{L^d(\Omega)} \|v\|^{1-\theta}_{L^b(\Omega)} + d_2 \|v\|_{L^b(\Omega)},$$

где $\theta = \frac{\frac{1}{b}+\frac{i}{N}-\frac{1}{a}}{\frac{1}{b}+\frac{j}{N}-\frac{1}{d}} \in \left[\frac{i}{j}, 1\right)$.

Лемма B.6. ([13]). *Пусть $N \in \{1, 2, 3\}$, $0 < n (< 4$, если $N = 3)$, $\beta \in \left(\frac{3}{4}, \frac{3}{2}\right)$ и пусть $\mathcal{F}$ — ограниченное подмножество в $L^\infty(0, T; H^1(\Omega))$, такое, что*

(i) для любой $f \in \mathcal{F}$ существует вектор-функция $\overrightarrow{J}(f)$, такая, что

$$f_t = -\operatorname{div} \overrightarrow{J}(f) \text{ в } L^2(0, T; (W^1_q(\Omega))^*) \quad \forall q > \tfrac{4N}{2N+n(2-N)},$$

$$\left\{\overrightarrow{J}(f)\right\}_{f \in \mathcal{F}} \text{ — ограничена в } L^2(0, T; L^{q'}(\Omega)) \ \forall q' < \tfrac{4N}{2N+n(N-2)};$$

(ii) $\{f^\beta\}_{f\in\mathcal{F}}(x)$ — ограничена в $L^2(0, T; H^2(\Omega))$;
тогда $\{f^\beta\}_{f\in\mathcal{F}}$ относительно компактно в $L^2(0, T; H^1(\Omega))$.

Лемма B.7. ([21]). *Пусть Q — ограниченная область в $\mathbb{R}^+_t \times \mathbb{R}^N_x$, f_n и f_0 — такие функции из $L^q(Q)$, $1 < q < \infty$, что $\|f_n\|_{L^q(Q)} \leqslant c$, $f_n \underset{n\to\infty}{\to} f_0$ п. в. в Q. Тогда $f_n \underset{n\to\infty}{\rightharpoonup} f_0$ в $L^q(Q)$.*

Лемма B.8. ([17]). *Пусть $(\beta_1, \ldots, \beta_m) \in \mathbb{R}^m, m \geqslant 1$ и $\beta = \prod\limits_{j=1}^{m} \beta_j$, $\overline{\beta_i} = \frac{\beta}{\beta_i} = \prod\limits_{j=1, j\neq i}^{m} \beta_j$. Предположим, что неотрицательные неубывающие функции $G_i(s)$ удовлетворяют условиям:*

$$G_i(s-\delta) \leqslant d_i \Big(\sum_{i=1}^{m} \frac{G_i(s)}{\delta^{\alpha_i}}\Big)^{\beta_i} \ \forall\, s < s_1,\ \delta > 0,\ i = \overline{1, m}$$

с действительными числами $d_i > 0$, $\beta_i > 1$, $\alpha_i > 0$ для $i = \overline{1, m}$. Пусть $G(s) = \sum\limits_{i=1}^{m} \overline{(d_i^{\overline{\beta_i}})}\, (G_i(s))^{\overline{\beta_i}}$. Тогда существует положительная постоянная $d > 1$, зависящая от m, α_i и β_i, такая, что $G_i(s_0) \equiv 0$ для всех $i = \overline{1, m}$, где $s_0 \leqslant s_1 - d \sum\limits_{i=1}^{m} \big(d_i^{\overline{\beta_i}} \overline{(d_i^{\overline{\beta_i}})}^{1-\beta_i} (G(s_1))^{\beta_i - 1}\big)^{\frac{1}{\alpha_i \beta}}$.

Лемма B.9. ([12]). *Пусть* $v(t)$ *— неотрицательная суммируемая функция на* $[0,T]$, *которая удовлетворяет для п. в.* $t \geqslant a$ *следующему интегральному неравенству:* $v(t) \leqslant k + m \int\limits_a^t h(\tau) g(v(\tau))\, d\tau$, *где* $k \geqslant 0, m \geqslant 0$ *и* $g(\tau)$ *— положительная для* $\tau > 0$ *функция. Тогда* $v(t) \leqslant G^{-1}\bigl(G(k) + m\int\limits_a^t h(\tau)\, d\tau\bigr)$ *для п. в.* $t \geqslant a$, *таких, что* $G(k) + m\int\limits_a^t h(\tau)\, d\tau > 0$, *здесь* $G(v) = \int\limits_{v_0}^{v} \frac{d\tau}{g(\tau)}$, $v > v_0 \geqslant 0$.

Литература

[1] E. Beretta, M. Bertsch, R. Dal Passo, *Nonnegative solutions of a fourth-order nonlinear degenerate parabolic equation* // Arch. Rat. Mech. Anal. **129** (1995), №2, 175–200.

[2] F. Bernis, *Viscous flows, fourth order nonlinear degenerate parabolic equations and singular elliptic problems* // In J. I. Diaz, M. A. Herrero, A. Linan and J. L. Vazquez, eds, Free boundary problems: theory and applications, Pitman Research Notes in Mathematics. Longman, Harlow, **323** (1995), 40–56.

[3] F. Bernis, *Finite speed of propagation and continuity of the interface for thin viscous flows* //Adv. Diff. Equ. **1** (1996), №3, 337–368.

[4] F. Bernis, *Finite speed of propagation for thin viscous flows when* $2 \leqslant n < 3$ // C. R. Acad. Sci. Paris; Ser. I Math **322** (1996), 1169–1174.

[5] F. Bernis, A. Friedman, *Higher order nonlinear degenerate parabolic equations* // J. Diff. Equ. **83** (1990), 179–206.

[6] A. L. Bertozzi, A. Münch, M. Shearer, *Undercompressive shocks in thin film flows* // Physica D. **134** (1999), 431–464.

[7] A. L. Bertozzi, A. Münch, M. Shearer, K. Zumbrun, *Stability of compressive and undercompressive thin film traveling waves. The dynamics of thin fluid films* // Euro. J. Appl. Math. **12** (2001), №3, 253–291.

[8] A. L. Bertozzi, M. Pugh, *The lubrication approximation for thin viscous films: the moving contact line with a porous media cutoff of the Van der Waals interactions* // Nonlinearity. **7** (1994), 1535–1564.

[9] A. L. Bertozzi, M. Pugh, *Long-wave instabilities and saturation in thin film equations* // Commun. Pure Appl. Math. **51** (1998), №6, 625–661.

[10] A. L. Bertozzi, M. Shearer, *Existence of undercompressive traveling waves in thin film equations* // SIAM J. Math. Anal. **32** (2000), 194–213.

[11] M. Bertsch, R. Dal Passo, H. Garcke, G. Grün, *The thin viscous flow equation in higher space dimension* // Adv. Diff. Equ. **3** (1998), 417–440.

[12] I. Bihari, *A generalization of a lemma of Bellman and its applications to uniqueness problems of differential equations* // Acta Math. Hung. **7** (1956), 81–94.

[13] R. Dal Passo, H. Garcke, G. Grün, *On a fourth-order degenerate parabolic equation: Global entropy estimates, existence and qualitative behavior of solutions* // SIAM J. Math. Anal. **29** (1998), №2, 321–342.

[14] R. Dal Passo, L. Giacomelli, A. Shishkov, *The thin film equation with nonlinear diffusion* // Commun. in Partial Diff. Equ. **26 (9&10)** (2001), 1509–1557.

[15] E. DiBenedetto *Degenerate parabolic equations*, Springer-Verlag, Berlin, 1993.

[16] C. M. Elliot, H. Garcke, *On the Cahn-Hilliard equation with degenerate mobility* // SIAM J. Math. Anal. **27** (1996), №2, 404–423.

[17] L. Giacomelli, A. Shishkov, *Propagation of support in one-dimensional convected thin-film flow* // Rome, Preprint IAC "Mauro Picone"; Sept. 2003, 22pp (to appear in Ind. Univ. Math. J.).

[18] G. Grün, *Degenerate parabolic differential equations of fourth order and plasticity model with non-local hardening* // Z. Anal. Anwendungen. **14** (1995), 541–574.

[19] J. Hulshof, A. Shishkov,*The thin film equation with* $2 \leqslant n < 3$*: Finite speed of propagation in terms of the* L^1*–norm* // Adv. Diff. Equ. **3** (1998), 625–642.

[20] R. Kersner, A. Shishkov, *Existence of free-boundaries in thin-film theory* // Donetsk, Preprint IAMM NASU; №**6** (1996), 15pp.

[21] J.-L. Lions, *Quelques methodes de resolution des problemes aux limites non lineaires*, Dunod Gauthier–Villars, 1969.

[22] L. Nirenberg, *An extended interpolation inequality* // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa **20** (1966), 733–737.

[23] A. Oron, S. H. Davis, G. Bankoff, *Long-scale evolution of thin liquid films* // Rev. Mod. Phys. **69** (1997), №3, 931–980.

[24] J. Simon, *Compact sets in the space* $L^p(0,T;B)$ // Annali di Mathematica Pure ed Applicata. **146** (1988), 65–96.

[25] Р. М. Таранец, *Распространение возмущений в уравнениях тонких капиллярных плёнок с нелинейным поглощением* // Труды ИПММ. **8** (2003), 181–194.

[26] Р. М. Таранец, А. Е. Шишков, *Эффект временной задержки распространения носителя в уравнениях тонких плёнок* // УМЖ **55** (2003), №7, 935–952.

Сведения об авторах

А. Е. Шишков,
Р. М. Таранец

Институт прикладной математики
и механики НАН Украины,
ул. Р. Люксембург 74,
Донецк 83114,
Украина
E-Mail: `shihskov@iamm.ac.donetsk.ua`,
`taranets_r@yahoo.com`