Український математичний вісник
Том 1 **(2004)**, № 1, 99 – 127

Локальное поведение решений нелинейных параболических уравнений в области с тонкой щелью

И. В. Скрыпник, М. А. Наумова

Аннотация. Доказываются поточечные оценки модельных нелинейных параболических задач в области с тонкой цилиндрической полостью. Полученные оценки характеризуют зависимость решения от толщины полости и являются основой качественного исследования различных задач асимптотического поведения решений нелинейных параболических уравнений.

2000 MSC. 35K55, 35B27.

1. Введение

В работе изучается поточечное поведение решений модельного параболического уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{j=1}^{n} \frac{d}{dx_j}\, a_j\Big(x, t, \frac{\partial u}{\partial x}\Big) = 0, \quad (x,t) \in \Omega \times (0,T) \tag{1.1}$$

в области $Q = \Omega \times (0,T)$, $\Omega = \mathcal{D}_1 \setminus F$. Здесь

$$\mathcal{D}_1 = \big\{x \in \mathbb{R}^n : |x'| < 1,\, |x''| < 1, \\ x' = (x_1, ..., x_\sigma),\, x'' = (x_{\sigma+1}, ..., x_n)\big\}, \tag{1.2}$$

F – произвольное замкнутое подмножество цилиндра

$$\mathcal{D}(d) = \Big\{x \in \mathbb{R}^n : |x'| < d,\, |x''| < \frac{1}{4}\Big\} \tag{1.3}$$

с $0 < d \le \frac{1}{4}$. Будем изучать поведения решения задачи Коши-Дирихле для уравнения (1.1) при малых d в случае двух модельных вариантов начальных и граничных данных.

Статья поступила в редакцию 25.07.2003
Ключевые слова и фразы. Нелинейное параболическое уравнение, задача Коши-Дирихле, оценки решения, поточечные оценки, перфорированная область.

ISSN 1810 – 3200.

Первой является задача со следующими данными

$$\begin{aligned} &u(x,t)=0 \ \text{ для } \ (x,t)\in\partial\Omega\times(0,T) \\ &u(x,t)=k \ \text{ для } \ (x,t)\in\partial F\times(0,T) \\ &u(x,0)=kf(x) \ \text{ для } \ x\in\Omega. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Здесь k – произвольное вещественное число, $f(x)$ – определенная в $\mathcal{D}_1$ функция из пространства $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\mathcal{D}_1)$, удовлетворяющая условиям

$$f(x)\equiv 1 \quad \text{при} \quad x\in F, \quad 0\le f(x)\le \min\Big\{1,\Big(\frac{d}{|x'|}\Big)^{\sigma-2}\Big\},$$

$$\int\limits_{\Omega}\Big|\frac{\partial f(x)}{\partial x}\Big|^2 dx\le C_0\, d^{\sigma-2}. \tag{1.5}$$

При формулируемых ниже условиях на коэффициенты $a_j(x,t,\xi)$ нами доказана поточечная оценка

$$|u(x,t)|\le K|k|\Big(\frac{d}{|x'|}\Big)^{\sigma-2} \tag{1.6}$$

для решения $u(x,t)$ задачи (1.1), (1.4).

Второй является задача со следующими данными

$$\begin{gathered} u(x,t)=0 \ \text{ для } \ (x,t)\in\partial\Omega\times(0,T), \\ u(x,t)=kg\left(\frac{|t-t_0|}{d^2}\right) \quad \text{для} \quad (x,t)\in\partial F\times(0,T), \\ u(x,0)=0, \quad \text{для} \ \ x\in\Omega. \end{gathered} \tag{1.7}$$

Здесь $k\in\mathbb{R}^1$, t_0, d – положительные числа, такие, что $t_0\ge 2d^2$, $T-t_0\ge 2d^2$, $g:\mathbb{R}^1\to\mathbb{R}^1$ – функция класса C^∞, равная единице при $|s|\le 1$, нулю при $|s|\ge 2$ и удовлетворяющая оценкам $0\le g(s)\le 1$, $\left|\frac{dg(s)}{ds}\right|\le 2$. Для решения $u(x,t)$ задачи (1.1), (1.7) доказываем поточечную оценку

$$|u(x,t)|\le K|k|\,\frac{d^\sigma}{\Big(|x'|+\sqrt{|t-t_0|}\Big)^\sigma}. \tag{1.8}$$

Оценки (1.6), (1.8) являются аналогами поточечных оценок для нелинейных эллиптических уравнений в перфорированных областях. В случае множества F малого диаметра такие оценки были получены в [1], для множеств F, содержащихся в тонких окрестностях линии или многообразия, соответствующие оценки решений эллиптических задач содержатся в [2,3]. Для параболической задачи и множества F малого диаметра первые оценки такого вида содержатся в [4].

Отметим, что поточечные оценки подобного вида находят широкие применения при изучении асимптотического поведения решений граничных задач в перфорированных областях (см. работы [2,5] и цитированную в них литературу), при изучении регулярности граничных точек (см. [2,6]), при изучении устранимости особенностей решений нелинейных уравнений [8].

Доказательству оценок (1.6), (1.8) посвящены разделы 4 и 5 работы. Предварительные интегральные оценки решения задачи (1.1), (1.4) доказываются в разделе 2. Предварительные поточечные оценки решения задачи (1.1), (1.4) доказываются в разделе 3.

2. Интегральные оценки решения задачи (1.1), (1.4)

Будем предполагать, что функции $a_i(x,t,\xi),\ i=1,...,n$ определены при $(x,t)\in Q,\ \xi\in\mathbb{R}^n$ и удовлетворяют при рассматриваемых значениях аргументов условиям:

a_1) при почти всех x,t функции $a_i(x,t,\xi),\ i=1,...,n$ непрерывны по ξ и для всех ξ эти функции измеримы по x,t;

a_2) с положительными постоянными ν_1,ν_2 выполнены неравенства

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x,t,\xi)\,\xi_i \ge \nu_1|\xi|^2,\ |a_i(x,t,\xi)|\le \nu_2|\xi|,\ i=1,...,n. \tag{2.1}$$

Используем далее обозначения $V_2(Q)$, $V_2^{1,0}(Q)$, $V_2^{1,\frac{1}{2}}(Q)$, $W_2^{1,1}(Q)$, $\overset{\circ}{V}_2(Q)$, $\overset{\circ}{V}{}_2^{1,1}(Q)$, $\overset{\circ}{W}{}_2^{1,1}(Q)$ для пространств функций, введенных в монографии [7].

Под решением задачи (1.1), (1.4) понимаем функцию $u(x,t)\in V_2(Q)$, такую, что $u(x,t)-kf(x)\in\overset{\circ}{V}_2(Q)$ и при любых $\varphi(x,t)\in\overset{\circ}{V}{}_2^{1,1}(Q)$, $\tau\in[0,T]$ справедливо интегральное тождество

$$\int\limits_\Omega u(x,\tau)\varphi(x,\tau)dx-k\int\limits_\Omega f(x)\varphi(x,0)dx+$$
$$+\int\limits_0^\tau\int\limits_\Omega\Big[-u\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\sum_{j=1}^n a_j\Big(x,t,\frac{\partial u}{\partial x_j}\Big)\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\Big]dxdt=0. \tag{2.2}$$

Следуя [7], можно показать, что $u(x,t) \in V_2^{1,\frac{1}{2}}(Q)$. Отметим еще интегральное тождество, которое будем использовать в дальнейшем

$$\int\limits_0^{t_1}\int\limits_\Omega \left\{ \frac{\partial}{\partial t} u_{(h)}(x,t)\psi(x,t) + \sum_{j=1}^n \left[a_j\left(x,t,\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right]_{(h)} \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial x_j} \right\} dxdt = 0, \tag{2.3}$$

справедливое при $h > 0$, $0 < t_1 < T - h$ для решения $u(x,t)$ задачи (1.1), (1.4) и произвольной функции $\psi(x,t) \in \overset{\circ}{V}{}_2^{1,0}(Q_{t_1})$. Здесь $Q_{t_1} = \Omega \times (0,t_1)$. В (2.3) использовано обозначение

$$\varphi_{(h)}(x,t) = [\varphi(x,t)]_{(h)} = \frac{1}{h}\int\limits_t^{t+h} \varphi(x,s)\,ds$$

для усреднения по t.

Замечание 2.1. *Просто показать, что для решения $u(x,t)$ задачи (1.1), (1.4) справедлива оценка*

$$0 \le sign\, k u(x,t) \le |k|. \tag{2.4}$$

Замечание 2.2. *В дальнейшем достаточно оценить решение задачи (1.1), (1.4) при $k > 0$, так как при $k < 0$ можно перейти к оценке функции $v(x,t) = -u(x,t)$, также являющейся решением задачи вида (1.1), (1.4).*

Обозначим для произвольной функции $g(x,t)$

$$[g(x,t)]_+ = \max\{g(x,t), 0\}$$

и определим при $r \in (d,1]$

$$\begin{aligned} m_r &= \operatorname{vrai}\max\{u(x,t) : |x'| = r,\, |x''| < 1,\, t \in (0,T)\},\\ u_r(x,t) &= [u(x,t) - m_r]_+,\\ E_r &= \{(x,t) \in Q : u(x,t) > m_r\},\ E_r^{(\tau)} = E_r \cap \Omega_\tau. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Здесь $u(x,t)$ – решение задачи (1.1), (1.4), $\Omega_\tau = \{(x,t) : x \in \Omega,\, t = \tau\}$.

Аналогично доказательству (2.4) можно получить, что $u(x,t) \le m_r$ при $r \le |x'| \le 1$, $t \in [0,T]$ и тем самым справедливо включение

$$E_r \subset \overline{(D_r \setminus F)} \times [0,T], \tag{2.6}$$

где $D_r = \{x \in R^n : |x'| \le r,\ |x''| \le 1\}$.

Зафиксируем в дальнейшем функцию $\omega(s)$, удовлетворяющую следующим условиям. Функция $\omega(s)$ – четная, класса $C^{\infty}(R^1)$, равная единице при $|s| \le \frac{1}{2}$, нулю при $|s| \ge 1$, и такая, что $\operatorname{sign} s \cdot \omega'(s) \le 0$, $|\omega'(s)| \le 3$. И пусть $\lambda_\theta(t) = \omega\Big(\frac{t}{\theta}\Big)$ для $\theta > 0$, $\chi_\rho(x,\eta) = \omega\Big(\frac{|x''-\eta|}{2\rho}\Big)$ при $|\eta| < 1$, $\eta \in R^{n-\sigma}$, $\rho > 0$. Пусть еще $\varphi_d(x) = \omega\Big(\frac{|x'|}{2d}\Big)$. Отметим, что при $\theta_1 < \theta_2$, $\rho_1 < \rho_2$ справедливы неравенства $\lambda_{\theta_1}(t) \le \lambda_{\theta_2}(t)$, $\chi_{\rho_1}(x,\eta) \le \chi_{\rho_2}(x,\eta)$.

Обозначим

$$I_r(\rho,\eta,\theta,\tau) = \operatorname*{vrai\,max}_{0\le t\le T} \int\limits_{\Omega} u_r^2(x,t)\,\chi_\rho^2(x,\eta)\,\lambda_\theta^2(t-\tau)dx + \\ + \int\limits_{E_r} \left|\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|^2 \chi_\rho^2(x,\eta)\,\lambda_\theta^2(t-\tau)dxdt \qquad (2.7)$$

при $r \in (d,1]$, $\tau \in [0,T]$, $\theta \in (0,T]$, $\rho \in \big(0,\frac{1}{2}\big]$, $|\eta| \le 1$, $\eta \in R^{n-\sigma}$. Здесь $u(x,t)$ – решение задачи (1.1), (1.4) при $k \ge 0$.

Лемма 2.1. *Предположим, что выполнены условия $a_1), a_2)$, (1.5) и пусть $k \ge 0$. Тогда существуют постоянные K_1, K_2, K_3, зависящие лишь от n, ν_1, ν_2, T, C_0, такие, что для решения $u(x,t)$ задачи (1.1), (1.4) справедливы оценки:*

а) $\|u\|^2_{V_2(Q)} \le K_1 k^2 d^{\sigma-2}, \qquad (2.8)$

б) $\|u_r\|^2_{V_2(Q)} \le K_2 k(k-m_r)d^{\sigma-2},$ *при* $r \in [2d,1], \qquad (2.9)$

в) $\displaystyle\int\limits_Q \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 \varphi_d^2(x)\chi_\rho^2(x,\eta)\,\lambda_\theta^2(t-\tau)\,dxdt \le K_3\theta k^2\rho^{n-\sigma}d^{\sigma-2} \qquad (2.10)$

при $r \in [2d,1]$, $\rho \in \big[d,\frac{1}{2}\big]$, $|\eta| \le 1$, $\theta \in [d^2,T]$, $\tau \in [0,T]$.

Доказательство. Докажем неравенство (2.8). Для этого в интегральное тождество (2.3) подставим пробную функцию $\psi(x,t) = u_{(h)}(x,t) - kf(x)$. В полученном равенстве проинтегрируем по частям в интегралах, содержащих $\frac{\partial}{\partial t}u_{(h)}$, перейдем затем к пределу при $h \to 0$ и оценим возникающие слагаемые, используя неравенства (1.5), (2.1) и Юнга. В итоге имеем

$$\int\limits_\Omega u^2(x,t_1)dx + \int\limits_{Q_{t_1}} \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 dxdt \le$$

$$\leq C_1 k^2 \Big\{ \int\limits_\Omega f^2(x)dx + \int\limits_\Omega \Big|\frac{\partial f}{\partial x}\Big|^2 dx \Big\} \leq C_2 k^2 d^{\sigma-2}.$$

Здесь и далее через C_j при $j = 1, 2, ...$ обозначаем постоянные, зависящие лишь от n, ν_1, ν_2, T, C_0. Нами используется обозначение $Q_{t_1} = \Omega \times (0, t_1)$.

Для получения оценки (2.9) подставим в (2.3) функцию $\psi(x,t) = [u_{(h)}(x,t) - m_r]_+ - (k - m_r)f(x)$. Аналогично доказательству первого неравенства получим

$$\int\limits_\Omega u_r^2(x,t_1)dx + \int\limits_0^{t_1} \int\limits_{E_r^{(t)}} \Big|\frac{\partial u}{\partial x}\Big|^2 dxdt \leq C_3(k - m_r) \int\limits_{Q_{t_1}} \Big|\frac{\partial u}{\partial x}\Big| \Big|\frac{\partial f}{\partial x}\Big| dxdt +$$
$$+ \int\limits_\Omega \big\{ [kf(x) - m_r]_+^2 + (k - m_r)u(x,t_1)f(x) \big\} dx.$$

Затем, применяя неравенство Юнга, оценки (2.8) и (1.5), получим требуемую оценку (2.9). Для доказательства (2.10) подставим в (2.3)

$$\psi(x,t) = [u_{(h)}(x,t) - m_r]_+ \varphi_d^2(x)\chi_\rho^2(x,\eta)\lambda_\theta^2(t-\tau) -$$
$$- (k - m_r)\varphi_d^2(x)\chi_\rho^2(x,\eta)\lambda_\theta^2(t-\tau)g(\eta), \quad (2.11)$$

где $g(\eta)$ – функция, равная единице при $|\eta| \leq \frac{1}{2}$ и нулю при $|\eta| > \frac{1}{2}$. Аналогично доказательству оценки (2.8) получим

$$\int\limits_{Q_{t_1}} \Big|\frac{\partial u}{\partial x}\Big|^2 \varphi_d^2(x)\chi_\rho^2(x,\eta)\lambda_\theta^2(t-\tau)dxdt \leq$$
$$\leq C_4\Big(\frac{1}{d} + \frac{1}{\rho}\Big) \int\limits_{Q_{t_1}} \Big|\frac{\partial u}{\partial x}\Big| |kg(\eta) - u| \, \varphi_d(x)\chi_\rho(x,\eta)\lambda_\theta^2(t-\tau)dxdt +$$
$$+ k \int\limits_\Omega u\varphi_d^2(x)\chi_\rho^2(x,\eta)\lambda_\theta^2(t-\tau)g(\eta)dx\Big|_0^{t_1} -$$
$$- \frac{1}{2} \int\limits_\Omega u^2\varphi_d^2(x)\chi_\rho^2(x,\eta)\lambda_\theta^2(t-\tau)dx\Big|_0^{t_1} -$$
$$- k \int\limits_{Q_{t_1}} u\varphi_d^2(x)\chi_\rho^2(x,\eta)\lambda_\theta\lambda_\theta' g(\eta)dxdt.$$

Далее оцениваем аналогично неравенству (2.9) и получаем оценку (2.10). □

Лемма 2.2. *Пусть выполнены условия* $a_1), a_2), (1.5)$. *Предположим, что при некоторых* $r \in [2d, 1]$, $\rho' \in [2r, \frac{1}{8}]$, $\theta' \in [4r^2, T]$, $l \geq 2$, $|\eta| \leq 1$, $\tau \in [0, T]$ *имеет место неравенство*

$$I_r(\rho', \eta, \theta', \tau) \leq Kk(k - m_r)\theta'(\rho')^{n-\sigma} d^{\sigma-2}. \tag{2.12}$$

Тогда при произвольных $\rho \in \left[r, \frac{\rho'}{2}\right]$, $\theta \in \left[r^2, \frac{\theta'}{2}\right]$ *справедлива оценка*

$$I_r(\rho, \eta, \theta, \tau) \leq K_4 \left\{ \theta\rho^{n-\sigma} + K\theta'(\rho')^{n-\sigma}\left(\frac{r^2}{\theta} + \frac{r^2}{\rho^2}\right) \right\} k(k - m_r) d^{\sigma-2} \tag{2.13}$$

с постоянной K_4, *зависящей лишь от* n, ν_1, ν_2, T, C_0.

Доказательство. Подставим в интегральное тождество (2.3) функцию

$$\psi(x,t) = [u_{(h)}(x,t) - m_r]_+ \chi_\rho^2(x,\eta)\lambda_\theta^2(t-\tau) - \\ - (k - m_r)\varphi_d^2(x)\chi_\rho^2(x,\eta)\lambda_\theta^2(t-\tau)g(\eta).$$

После стандартных преобразований получим

$$\frac{1}{2}\int\limits_\Omega u_r^2(x,t_1)\chi_\rho^2(x,\eta)\lambda_\theta^2(t_1-\tau)dx + \\ + \nu_1 \int\limits_0^{t_1}\int\limits_{E_r^{(t)}} \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 \chi_\rho^2(x,\eta)\lambda_\theta^2(t-\tau)dxdt \leq \\ \leq C_5\left\{\frac{1}{2}\int\limits_\Omega [kf - m_r]_+^2 \chi_\rho^2(x,\eta)\lambda_\theta^2(-\tau)dx + \right. \\ + (k - m_r)\int\limits_\Omega u(x,t_1)\varphi_d^2(x)\chi_\rho^2(x,\eta)\lambda_\theta^2(t_1-\tau)dx + \\ + \frac{1}{\theta}\int\limits_0^{t_1}\int\limits_\Omega u_r^2(x,t)\chi_\rho^2(x,\eta)\lambda_\theta(t-\tau)dxdt + \\ + \frac{k - m_r}{\theta}\int\limits_0^{t_1}\int\limits_\Omega u(x,t)\varphi_d^2(x)\chi_\rho^2(x,\eta)\lambda_\theta(t-\tau)dxdt + \\ + \frac{1}{\rho}\int\limits_0^{t_1}\int\limits_{E_r^{(t)}} \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| u_r\chi_\rho(x,\eta)\lambda_\theta^2(t-\tau)dxdt +$$

$$+\frac{k-m_r}{d}\int\limits_0^{t_1}\int\limits_\Omega\Big|\frac{\partial u}{\partial x}\Big|\varphi_d(x)\chi_\rho(x,\eta)\lambda_\theta^2(t-\tau)dxdt\Big\}. \quad (2.14)$$

Первое слагаемое в правой части оценим, используя условия (1.5) и неравенство $[kf(x)-m_r]_+ \le (k-m_r)f(x)$, второе и четвертое – используя неравенство $0 \le u(x,t) \le k$. Третье слагаемое оценим, используя неравенство Пуанкаре и (2.12)

$$\frac{1}{\theta}\int\limits_0^{t_1}\int\limits_\Omega u_r^2\chi_\rho^2\lambda_\theta dxdt \le C_6\frac{r^2}{\theta}\int\limits_{E_r}\Big|\frac{\partial u}{\partial x}\Big|^2\chi_{\rho'}^2\lambda_{\theta'}^2dxdt \le$$

$$\le C_6K\frac{r^2}{\theta}\theta' k(k-m_r)(\rho')^{n-\sigma}d^{\sigma-2}.$$

Пятое слагаемое правой части (2.14) оценим с помощью неравенств Юнга и Пуанкаре

$$\frac{1}{\rho}\int\limits_0^{t_1}\int\limits_{E_r^{(t)}}\Big|\frac{\partial u}{\partial x}\Big|u_r\chi_\rho\lambda_\theta^2dxdt \le$$

$$\le\frac{\varepsilon}{2}\int\limits_0^{t_1}\int\limits_{E_r^{(t)}}\Big|\frac{\partial u}{\partial x}\Big|^2\chi_\rho^2\lambda_\theta^2dxdt+\frac{C_7}{2\varepsilon}\frac{r^2}{\rho^2}\int\limits_0^{t_1}\int\limits_{E_r^{(t)}}\Big|\frac{\partial u}{\partial x}\Big|^2\chi_{2\rho}^2\lambda_{\theta'}^2dxdt.$$

Шестое слагаемое оценим, используя неравенство Гельдера и (2.10).

Указанные оценки слагаемых в правой части (2.14) и неравенство (2.12) приводят к оценке (2.13), что и завершает доказательство леммы 2.2. □

Теорема 2.1. *Пусть выполнены условия $a_1), a_2)$, (1.5). Тогда существуют постоянные K_5, K_6, K_7, зависящие только от n, ν_1, ν_2, T, C_0, такие, что при $2d \le r \le 1$, $K_5r \le \rho \le \frac{1}{4}$, $K_6r^2 \le \theta \le T$, $|\eta| \le 1$, $\tau \in [0,T]$ для решения $u(x,t)$ задачи (1.1), (1.4) справедлива оценка*

$$I_r(\rho,\eta,\theta,\tau) \le K_7k(k-m_r)\theta\rho^{n-\sigma}d^{\sigma-2}. \quad (2.15)$$

Доказательство. Определим конечные числовые последовательности $\rho_i = 2^{-(i+1)}$, $\theta_i = 4^{-(i-1)}T$, $i = 1,...,I$ с I, удовлетворяющим условиям $2^{-(I+1)} < K_5r \le 2^{-I}$, $4^{-(I-1)}T < K_6r^2 \le 4^{-I+2}T$, где K_5, K_5, K_7 определяются равенствами

$$K_5=\sqrt{K_7+1},\ K_6=K_7+1,\ K_7=4^{n-\sigma+2}\max\Big\{3K_4,\frac{4K_2}{T}\Big\} \quad (2.16)$$

и K_2, K_4 – постоянные из лемм 2.1, 2.2.

Будем вначале доказывать неравенства

$$I_r(\rho_i,\eta,\theta_i,\tau) \le \frac{K_7}{4^{n-\sigma+2}} k(k-m_r)\rho_i^{n-\sigma} d^{\sigma-2}\theta_i \quad \text{для} \quad i=1,...,I. \qquad (2.17)$$

При $i=1$ это неравенство следует из (2.9). Далее, если (2.17) установлено для $i=i_0-1$, $i_0 \le I$, тогда для $i=i_0$ (2.17) следует из леммы 2.2:

$$\begin{aligned} I_r(\rho_{i_0},\eta,\theta_{i_0},\tau) &\le \\ &\le K_4 \left\{ \rho_{i_0}^{n-\sigma}\theta_{i_0} + \left[\frac{r^2}{\rho_{i_0}^2} + \frac{r^2}{\theta_{i_0}} \right] \frac{K_7}{2^{n-\sigma}} \rho_{i_0-1}^{n-\sigma}\theta_{i_0-1} \right\} k(k-m_r)d^{\sigma-2} \le \\ &\le K_4 \Big\{ 1 + \frac{K_7}{K_5^2} + \frac{K_7}{K_6} \Big\} \rho_{i_0}^{n-\sigma}\theta_{i_0} k(k-m_r)d^{\sigma-2} \le \\ &\le \frac{K_7}{2^{n-\sigma}} \rho_{i_0}^{n-\sigma}\theta_{i_0} k(k-m_r)d^{\sigma-2}. \end{aligned}$$

Тем самым, оценка (2.17) установлена для любых $i=1,...,I$.

Для произвольных $\rho \in \left[K_5 r, \frac{1}{4}\right]$, $\theta \in \left[K_6 r^2, T\right]$ определим соответственно целые числа $j(\rho)$, $i(\theta)$ так, чтобы $2^{-j(\rho)-2} < \rho \le 2^{-j(\rho)-1}$, $4^{-i(\theta)}T < \theta \le 4^{-i(\theta)+1}T$. Тогда $1 \le j(\rho) \le I$, $1 \le i(\theta) \le I$ и рассмотрим два следующих случая.

1) $j(\rho) \le i(\theta)$. Тогда $\rho_{j(\rho)} = \rho_{i(\theta)} 2^{i(\theta)-j(\rho)}$ и

$$\begin{aligned} I_r(\rho,\eta,\theta,\tau) &\le \\ &\le I_r(\rho_{j(\rho)},\eta,\theta_{i(\theta)},\tau) \le \sum_{k=1}^{2^{[i(\theta)-j(\rho)+1](n-\sigma)}} I_r(\rho_{i(\theta)},\eta_k,\theta_{i(\theta)},\tau) \le \\ &\le \frac{K_7 2^{[i(\theta)-j(\rho)+1](n-\sigma)}}{2^{n-\sigma}} \rho_{i(\theta)}^{n-\sigma}\theta_{i(\theta)} k(k-m_r)d^{\sigma-2} \le \\ &\le K_7 \rho^{n-\sigma}\theta k(k-m_r)d^{\sigma-2}. \end{aligned}$$

Здесь η_k такие точки, что $\eta_k \in R^{N-\sigma}, |\eta_k| \le 1$ и выполнено неравенство

$$\chi_{j(\rho)}^2(x,\eta) \le \sum_{k=1}^{2^{[i(\theta)-j(\rho)+1](n-\sigma)}} \chi_{i(\theta)}^2(x,\eta_k).$$

2) $i(\theta) < j(\rho)$. Тогда $\theta_{i(\theta)} = \theta_{j(\rho)} 4^{j(\rho)-i(\theta)}$ и при соответствующем выборе τ_k имеем

$$I_r(\rho,\eta,\theta,\tau) \le I_r(\rho_{j(\rho)},\eta,\theta_{i(\theta)},\tau) \le$$

$$\leq \sum_{k=1}^{4^{j(\rho)-i(\theta)}} I_r(\rho_{j(\rho)}, \eta, \theta_{j(\rho)}, \tau_k) \leq$$
$$\leq \frac{K_7 4^{j(\rho)-i(\theta)+1}}{2^{n-\sigma}} \rho_{j(\rho)}^{n-\sigma} \theta_{j(\rho)} k(k-m_r) d^{\sigma-2} \leq$$
$$\leq K_7 \rho^{n-\sigma} \theta k(k-m_r) d^{\sigma-2}.$$

Из этих двух неравенств следует оценка (2.15), что и заканчивает доказательство теоремы 2.1. □

Пусть μ – произвольное число из интервала $(0, k-m_r)$. Введем обозначения

$$[u_r]_\mu = \min\{u_r(x,t), \mu\},$$
$$E_{r,\mu} = \{(x,t) \in Q : 0 \leq u_r(x,t) \leq \mu\},$$
$$E_{r,\mu}^{(\tau)} = E_{r,\mu} \cap \Omega_\tau,$$
$$F_{r,\mu} = \{(x,t) \in Q : u_r(x,t) \geq \mu\}.$$

Лемма 2.3. *Пусть выполнены условия теоремы 2.1. Существует постоянная K_8, зависящая лишь от n, ν_1, ν_2, T, C_0, такая, что для решения $u(x,t)$ задачи (1.1), (1.4) справедлива оценка*

$$\int\limits_{E_{r,\mu}} \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 dxdt \leq K_8 \mu k d^{\sigma-2} \tag{2.18}$$

при $x \in [2d, 1]$, $0 < \mu < k - m_r$.

Доказательство. Подставим в интегральное тождество (2.3) пробную функцию

$$\psi(x,t) = \left[u_{(h),r}\right]_\mu (x,t) - \frac{\mu}{k-m_r} u_{(h),r}(x,t),$$

где

$$u_{(h),r}(x,t) = [u_{(h)}(x,t) - m_r]_+,$$
$$[u_{(h),r}]_\mu(x,t) = \min\{u_{(h),r}(x,t), \mu\}.$$

В полученном равенстве интегрируем по частям в слагаемых, содержащих производные по t и переходим к пределу при $h \to 0$. Используя неравенства (2.1), (2.9), получим:

$$\int\limits_\Omega G_{r,\mu}^{(1)}(u) dx \Big|_0^{t_1} + \nu_1 \int\limits_0^{t_1} \int\limits_{E_{r,\mu}^{(\tau)}} \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 dxdt \leq C_8 k \mu d^{\sigma-2}, \tag{2.19}$$

где $G^{(1)}_{r,\mu}(s)$ – функция, определенная на R^1 и равная соответственно нулю при $s \le m_r$, $\frac{1}{2}(s-m_r)^2$ при $m_r \le s \le m_r+\mu$, $\frac{\mu^2}{2}+\mu(s-m_r-\mu)$ при $s \ge m_r+\mu$.

Оценим первое слагаемое левой части неравенства (2.19) при $t=0$. Пусть

$$D^{(1)}_{r,\mu} = \{x \in \Omega : m_r \le kf(x) \le m_r+\mu\},$$
$$D^{(2)}_{r,\mu} = \{x \in \Omega : kf(x) > m_r+\mu\}.$$

Имеем

$$\int\limits_{D^{(1)}_{r,\mu}} G^{(1)}_{r,\mu}(kf(x))dx = \frac{1}{2}\int\limits_{D^{(1)}_{r,\mu}} [kf(x)-m_r]^2 dx \le$$
$$\le \frac{\mu}{2}k\int\limits_{E_r} f(x)dx \le C_9\mu k d^{\sigma-2}$$

$$\int\limits_{D^{(2)}_{r,\mu}} G^{(1)}_{r,\mu}(kf(x))dx = \mu\int\limits_{D^{(2)}_{r,\mu}} \Big[kf(x)-m_r-\frac{\mu}{2}\Big]dx \le$$
$$\le \mu k\int\limits_{E_r} f(x)dx \le C_{10}\mu k d^{\sigma-2}. \quad (2.20)$$

Неравенство (2.18) следует сейчас из (2.19), (2.20), и, тем самым, доказательство леммы 2.3 закончено. □

Пусть q – число из интервала (1,2), выбор которого будет указан далее. Обозначим

$$I_{r,\mu}(\rho,\eta,\theta,\tau) = \int\limits_{E_{r,\mu}} u_r^{q-2}(x,t)\Big|\frac{\partial u}{\partial x}\Big|^2 \chi^2_\rho(x,\eta)\lambda^2_\theta(t-\tau)dxdt,$$

где $r \in [2d,1]$, $0<\mu<k-m_r$, $K_5 r \le \rho \le \frac{1}{4}$, $K_6 r^2 \le \theta \le T$, $\tau \in [0,T]$, $\eta \in R^{n-\sigma}$, $|\eta| \le 1$.

Лемма 2.4. *Пусть выполнены условия теоремы 2.1 и пусть q – произвольное число из интервала (1,2). Тогда справедлива оценка*

$$I_{r,\mu}(\rho,\eta,\theta,\tau) \le \frac{K_9}{(q-1)^2}\Big\{\Big[\frac{r^2}{\rho^2}+\frac{r^2}{\theta}\Big]I_{r,\mu}(2\rho,\eta,2\theta,\tau)+$$

$$+\mu^{q-1}k\rho^{n-\sigma}d^{\sigma-2}\theta+\frac{\mu^{q-1}}{\rho}\int\limits_{F_{r,\mu}}\Big|\frac{\partial u}{\partial x}\Big|\chi_\rho\lambda_\theta^2dxdt+$$
$$+\frac{\mu^{q-1}}{\theta}\int\limits_{F_{r,\mu}}(u_r-\mu)\chi_\rho^2\lambda_\theta dxdt\Big\}$$

с постоянной K_9, зависящей лишь от n,ν_1,ν_2,T,C_0.

Доказательство. Пусть ε – произвольное число из интервала $(0,\mu)$. Подставим в интегральное тождество (2.3) функцию

$$\psi(x,t)=\Big\{\big([u_{(h),r}]_\mu+\varepsilon\big)^{q-2}[u_{(h),r}]_\mu-$$
$$-(\mu+\varepsilon)^{q-2}\mu\frac{u_{(h),r}(x,t)}{k-m_r}\Big\}\chi_\rho^2(x,\eta)\lambda_\theta^2(t-\tau).$$

Проводя стандартные преобразования и оценки, имеем

$$\int\limits_\Omega G^{(2)}_{r,\mu}(u)\chi_\rho^2\lambda_\theta^2dx\Big|_0^{t_1}-2\int\limits_0^{t_1}\int\limits_\Omega G^{(2)}_{r,\mu}(u)\chi_\rho^2\lambda_\theta\frac{d\lambda_\theta}{dt}dxdt+$$
$$+\nu_1(q-1)\int\limits_0^{t_1}\int\limits_{E^{(t)}_{r,\mu}}\big([u_r]_\mu+\varepsilon\big)^{q-2}\Big|\frac{\partial u}{\partial x}\Big|^2\chi_\rho^2\lambda_\theta^2dxdt\le$$
$$\le\frac12\frac{(\mu+\varepsilon)^{q-2}\mu}{k-m_r}\int\limits_\Omega u_r^2(x,t)\chi_\rho^2\lambda_\theta^2dx\Big|_0^{t_1}+$$
$$+2\frac{(\mu+\varepsilon)^{q-2}\mu}{(k-m_r)\theta}\int\limits_0^{t_1}\int\limits_\Omega u_r^2\chi_\rho^2\lambda_\theta dxdt+$$
$$+C_{11}\Big\{\frac1\rho\int\limits_0^{t_1}\int\limits_\Omega\big([u_r]_\mu+\varepsilon\big)^{q-2}[u_r]_\mu\Big|\frac{\partial u}{\partial x}\Big|\chi_\rho\lambda_\theta^2dxdt+$$
$$+\frac{(\mu+\varepsilon)^{q-2}\mu}{(k-m_r)\rho}\int\limits_0^{t_1}\int\limits_\Omega u_r\Big|\frac{\partial u}{\partial x}\Big|\chi_\rho\lambda_\theta^2dxdt+$$
$$+\frac{(\mu+\varepsilon)^{q-2}\mu}{k-m_r}\int\limits_0^{t_1}\int\limits_{E^{(t)}_r}\Big|\frac{\partial u}{\partial x}\Big|^2\chi_\rho^2\lambda_\theta^2dxdt\Big\},\quad(2.22)$$

где $G^{(2)}_{r,\mu}(s)$ – функция, определенная на R^1, равная нулю при $s \le m_r$,

$$\frac{(s-m_r+\varepsilon)^q}{q} - \varepsilon\frac{(s-m_r+\varepsilon)^{q-1}}{q-1} + \frac{\varepsilon^q}{q(q-1)} \text{ при } m_r \le s \le m_r+\mu,$$

$$\left[(\mu+\varepsilon)^{q-1} - \varepsilon(\mu+\varepsilon)^{q-2}\right](s-m_r-\mu) + \frac{(\mu+\varepsilon)^q}{q} - \\ - \varepsilon\frac{(\mu+\varepsilon)^{q-1}}{q-1} + \frac{\varepsilon^q}{q(q-1)} \text{ при } s \ge m_r+\mu.$$

Первый интеграл в правой части (2.22) оценим по теореме 2.1:

$$\frac{(\mu+\varepsilon)^{q-2}\mu}{k-m_r}\int\limits_\Omega u_r^2(x,t)\chi_\rho^2\lambda_\theta^2 dx\Big|_0^{t_1} \le K_7(\mu+\varepsilon)^{q-2}\mu\theta k\rho^{n-\sigma}d^{\sigma-2}. \quad (2.23)$$

Второй интеграл в правой части (2.22) оцениваем также, используя дополнительно неравенство Пуанкаре по переменной x':

$$\frac{(\mu+\varepsilon)^{q-2}\mu}{(k-m_r)\theta}\int\limits_0^{t_1}\int\limits_\Omega u_r^2\chi_\rho^2\lambda_\theta dxdt \le \\ \le \frac{(\mu+\varepsilon)^{q-2}\mu r^2}{(k-m_r)\theta}\int\limits_{E_r}\Big|\frac{\partial u}{\partial x}\Big|^2\chi_\rho^2\lambda_{2\theta}^2 dxdt \le \\ \le C_{12}(\mu+\varepsilon)^{q-2}\mu\theta k\rho^{n-\sigma}d^{\sigma-2}. \quad (2.24)$$

Третье слагаемое правой части (2.22) разбиваем на сумму двух интегралов по множествам $F_{r,\mu}$ и $E_{r,\mu}$:

$$\frac{1}{\rho}\int\limits_0^{t_1}\int\limits_{E_r^{(t)}}\big([u_r]_\mu+\varepsilon\big)^{q-2}[u_r]_\mu\Big|\frac{\partial u}{\partial x}\Big|\chi_\rho\lambda_\theta^2 dxdt \le \\ \le \int\limits_0^{t_1}\int\limits_{F_{r,\mu}^{(t)}}\frac{(\mu+\varepsilon)^{q-1}}{\rho}\Big|\frac{\partial u}{\partial x}\Big|\chi_\rho\lambda_\theta^2 dxdt + \\ + \frac{1}{\rho}\int\limits_0^{t_1}\int\limits_{E_{r,\mu}^{(t)}}\big(u_r+\varepsilon\big)^{q-2}u_r\Big|\frac{\partial u}{\partial x}\Big|\chi_\rho\chi_{2\rho}\lambda_\theta\lambda_{2\theta} dxdt. \quad (2.25)$$

Последний интеграл оценим, используя неравенства Юнга и Пуанкаре

$$\frac{C_{11}}{(q-1)\rho}\int\limits_0^{t_1}\int\limits_{E^{(t)}_{r,\mu}}(u_r+\varepsilon)^{q-2}u_r\Big|\frac{\partial u}{\partial x}\Big|\chi_\rho\chi_{2\rho}\lambda_\theta\lambda_{2\theta}dxdt\leq$$

$$\leq\frac{\varepsilon_1}{2}\int\limits_0^{t_1}\int\limits_{E^{(t)}_{r,\mu}}(u_r+\varepsilon)^{q-2}\Big|\frac{\partial u}{\partial x}\Big|^2\chi^2_\rho\lambda^2_\theta dxdt+$$

$$+\frac{C_{13}}{2\varepsilon_1(q-1)^2}\int\limits_0^{t_1}\int\limits_{E^{(t)}_{r,\mu}}(u_r+\varepsilon)^{q-2}\frac{u_r^2}{\rho^2}\chi^2_{2\rho}\lambda^2_{2\theta}dxdt\leq$$

$$\leq\frac{\varepsilon_1}{2}\int\limits_0^{t_1}\int\limits_{E^{(t)}_{r,\mu}}(u_r+\varepsilon)^{q-2}\Big|\frac{\partial u}{\partial x}\Big|^2\chi^2_\rho\lambda^2_\theta dxdt+$$

$$+\frac{C_{14}}{\varepsilon_1(q-1)^2}\Big(\frac{r}{\rho}\Big)^2\int\limits_0^{t_1}\int\limits_{E^{(t)}_{r,\mu}}(u_r+\varepsilon)^{q-2}\Big|\frac{\partial u}{\partial x'}\Big|^2\chi^2_{2\rho}\lambda^2_{2\theta}dxdt,\quad(2.26)$$

где ε_1 – достаточно малое число.

Четвертое слагаемое правой части (2.22) оценим аналогично последнему интегралу

$$\frac{(\mu+\varepsilon)^{q-2}\mu}{(k-m_r)\rho}\int\limits_0^{t_1}\int\limits_\Omega u_r\Big|\frac{\partial u}{\partial x}\Big|\chi_\rho\lambda^2_\theta dxdt\leq$$

$$\leq C_{15}\frac{(\mu+\varepsilon)^{q-2}\mu}{k-m_r}\frac{r^2}{\rho^2}\int\limits_{E_r}\Big|\frac{\partial u}{\partial x'}\Big|^2\chi^2_{2\rho}\lambda^2_\theta dxdt+$$

$$+C_{15}\frac{(\mu+\varepsilon)^{q-2}\mu}{k-m_r}\int\limits_{E_r}\Big|\frac{\partial u}{\partial x}\Big|^2\chi^2_\rho\lambda^2_\theta dxdt\leq$$

$$\leq C_{16}(\mu+\varepsilon)^{q-2}\mu k\theta\rho^{n-\sigma}d^{\sigma-2}.\quad(2.27)$$

И, наконец, последнее слагаемое правой части (2.22) просто оценивается с использованием теоремы 2.1.

Оценим второй интеграл в левой части (2.22), используя неравенство Пуанкаре:

$$\int\limits_0^{t_1}\int\limits_\Omega G^{(2)}_{r,\mu}(u)\chi^2_\rho(x,\eta)\lambda_\theta(t-\tau)\frac{d\lambda_\theta}{dt}dxdt\leq$$

$$\le \frac{C_{17}}{\theta}\Big\{\int\limits_{E_r}\min\{G^{(2)}_{r,\mu}(u), G^{(2)}_{r,\mu}(m_r)\}\chi^2_{2\rho}\lambda^2_{2\theta}dxdt+$$

$$+(\mu+\varepsilon)^{q-1}\int\limits_{F_{r,\mu}}(u_r-\mu)\chi^2_\rho\lambda_\theta dxdt\Big\}\le$$

$$\le \frac{C_{18}}{\theta}\Big\{r^2\int\limits_{E_{r,\mu}}(u_r+\varepsilon)^{q-2}\Big|\frac{\partial u}{\partial x'}\Big|^2\chi^2_{2\rho}\lambda^2_{2\theta}dxdt+$$

$$+(\mu+\varepsilon)^{q-1}\int\limits_{F_{r,\mu}}(u_r-\mu)\chi^2_\rho\lambda_\theta dxdt\Big\}. \quad (2.28)$$

Значение при $t=0$ первого интеграла в левой части (2.22) оценим, как при доказательстве леммы 2.3 на множествах $D^{(1)}_{r,\mu}, D^{(2)}_{r,\mu}$.

В итоге, переходя к пределу при $\varepsilon\to 0$, получим из (2.22)-(2.28) нужное неравенство (2.21). Доказательство леммы 2.4 закончено. □

Лемма 2.5. *Пусть выполнены условия леммы 2.4. Тогда существует постоянная K_{10}, зависящая лишь от n,ν_1,ν_2,T,C_0, такая, что справедлива оценка*

$$\int\limits_{F_{r,\mu}}u_r^{-q}(x,t)\Big|\frac{\partial u}{\partial x}\Big|^2\chi^2_\rho(x,\eta)\lambda^2_\theta(t-\tau)dxdt\le$$

$$\le\frac{K_{10}}{(q-1)^2}\mu^{1-q}\Big\{k\theta\rho^{n-\sigma}d^{\sigma-2}+$$

$$+\mu^{1-q}\Big[\frac{1}{\theta}+\frac{1}{\rho^2}\Big]\int\limits_{F_{r,\mu}}u_r^q(x,t)\chi^2_{2\rho}(x,\eta)\lambda^2_{2\theta}(t-\tau)dxdt\Big\} \quad (2.29)$$

Доказательство. Пусть $u_r^{(\mu)}=\max\{u_r(x,t),\mu\}$ и подставим в интегральное тождество (2.3) функцию

$$\psi(x,t)=\big\{\mu^{1-q}-[u^{(\mu)}_{(h),r}]^{1-q}\big\}\chi^2_\rho\lambda^2_\theta-\big\{\mu^{1-q}-(k-m_r)^{1-q}\big\}\frac{u_{(h),r}}{k-m_r}\chi^2_\rho\lambda^2_\theta.$$

Далее доказательство проводится аналогично доказательству леммы 2.4. □

Теорема 2.2. *Пусть выполнены условия $a_1), a_2)$, (1.5). Тогда для решения $u(x,t)$ задачи (1.1), (1.4) справедлива оценка*

$$I_{r,\mu}(\rho,\eta,\theta,\tau)\le\frac{K_{11}}{(q-1)^4}\Big\{\Big[\frac{r^2}{\theta}+\frac{r^2}{\rho^2}\Big]I_{r,\mu}(2\rho,\eta,2\theta,\tau)+ \quad (2.30)$$

$$+\mu^{q-1}k\theta\rho^{n-\sigma}d^{\sigma-2}+\Big[\frac{1}{\theta}+\frac{1}{\rho^2}\Big]\int\limits_{F_{r,\mu}} u_r^q(x,t)\chi_{2\rho}^2(x,\eta)\lambda_{2\theta}^2(t-\tau)dxdt\Big\},$$

с постоянной K_{11}, зависящей только от n,ν_1,ν_2,T,C_0. Здесь $q\in(1,2)$, $r\in[2d,1]$, $0<\mu<k-m_r$, $|\eta|\le 1$, $\tau\in[0,T]$, $K_5r\le\rho\le H$, $K_6r^2\le\theta\le T$ и K_5,K_6 – постоянные, определенные в теореме 2.1

Доказательство. Оценим интегралы из неравенства (2.21). Для оценки первого из них воспользуемся неравенствами Юнга и (2.29):

$$\frac{1}{\rho}\int\limits_{F_{r,\mu}}\Big|\frac{\partial u}{\partial x}\Big|\chi_\rho\lambda_\theta^2dxdt\le$$

$$\le\mu^{q-1}\int\limits_{F_{r,\mu}}u_r^{-q}(x,t)\Big|\frac{\partial u}{\partial x}\Big|^2\chi_\rho^2\lambda_\theta^2dxdt+\mu^{1-q}\int\limits_{F_{r,\mu}}\frac{u_r^q(x,t)}{\rho^2}\chi_{2\rho}^2\lambda_{2\theta}^2dxdt\le$$

$$\le\frac{C_{19}}{(q-1)^2}\Big\{k\theta\rho^{n-\sigma}d^{\sigma-2}+\mu^{1-q}\Big[\frac{1}{\theta}+\frac{1}{\rho^2}\Big]\int\limits_{F_{r,\mu}}u_r^q(x,t)\chi_{2\rho}^2\lambda_{2\theta}^2dxdt\Big\}.$$

Второй интеграл из (2.21) оценим аналогично с использованием еще неравенства Пуанкаре:

$$\frac{1}{\theta}\int\limits_{F_{r,\mu}}(u_r-\mu)\chi_\rho^2\lambda_\theta dxdt\le\frac{\mu^{q-1}}{\theta}\int\limits_{F_{r,\mu}}u_r^{-q}(x,t)(u_r-\mu)^2\chi_\rho^2\lambda_\theta^2dxdt+$$

$$+\frac{\mu^{1-q}}{\theta}\int\limits_{F_{r,\mu}}u_r^q(x,t)\chi_{2\rho}^2\lambda_{2\theta}^2dxdt\le\frac{C_{20}}{(q-1)^2}\Big\{k\theta\rho^{n-\sigma}d^{\sigma-2}+$$

$$+\mu^{1-q}\Big[\frac{1}{\theta}+\frac{1}{\rho^2}\Big]\int\limits_{F_{r,\mu}}u_r^q(x,t)\chi_{2\rho}^2\lambda_{2\theta}^2dxdt\Big\}.$$

Из этих двух неравенств следует оценка (2.30). Доказательство теоремы 2.2 закончено. □

Замечание 2.3. *Аналогично доказательству теоремы 2.2, только без использования срезывающих функций χ_ρ,λ_θ, доказывается оценка*

$$\int\limits_{E_{r,\mu}}u_r^{q-2}(x,t)\Big|\frac{\partial u}{\partial x}\Big|^2dxdt\le\frac{K_{12}}{(q-1)^4}\mu^{q-1}kd^{\sigma-2}T,\qquad(2.31)$$

где r,μ,q такие же, как в теореме 2.2.

3. Предварительные поточечные оценки решения задачи (1.1), (1.4)

В данном разделе займемся поточечными оценками решения задачи (1.1), (1.4). Вначале сможем доказать более грубые оценки, чем оценка (1.6). Последовательное уточнение интегральных и поточечных оценок приведет в следующем разделе к доказательству теоремы 2.1.

Лемма 3.1. *Пусть выполнены условия* $a_1), a_2)$, *(1.5). Тогда существует постоянная* K_{13}, *зависящая лишь от* n, ν_1, ν_2, T, C_0, *такая, что для решения* $u(x,t)$ *задачи (1.1), (1.4) с* $k \geq 0$ *справедлива оценка*

$$m_{\frac{r}{2}} - m_r \leq K_{13} k \frac{d^{\sigma-2}}{r^n} \tag{3.1}$$

при $r \in [8d, 1]$.

Доказательство. Определим числовые последовательности

$$r_j^{(1)} = \frac{r}{4}(1 + 2^{-j}),\ r_j^{(2)} = \frac{r}{4}(3 - 2^{-j})$$

и последовательность функций $\varphi_j(x)$, зависящих только $|x'|$ и равных единице на множестве $G_j = \{r_j^{(1)} \leq |x'| \leq r_j^{(2)}\}$, нулю вне множества G_{j+1} и таких, что $\varphi_j(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $0 \leq \varphi_j(x) \leq 1$, $|\frac{\partial \varphi_j(x)}{\partial x}| \leq \frac{2^{j+4}}{r}$.

Подставим в инитегральное тождество (2.3) следующую функцию

$$\psi(x,t) = [u_{(h),r}(x,t)]^{l+1}[\varphi_j(x)]^{s+2},$$

где l, s – произвольные положительные числа. После стандартных преобразований и использования неравенств (1.5), получим

$$\begin{aligned} &\operatorname*{vrai\,max}_{0\leq t\leq T} \int\limits_\Omega u_r^{l+2}\varphi_j^{s+2}dx + (l+1)^2 \int\limits_Q u_r^l \Big|\frac{\partial u}{\partial x}\Big|^2 \varphi_j^{s+2} dxdt \leq \\ &\leq C_{21}\frac{(s+2)^2(l+1)^2}{r^2} 2^{2j} \int\limits_Q u_r^{l+2}\varphi_j^s dxdt + C_{21}\Big[k\Big(\frac{d}{r}\Big)^{\sigma-2}\Big]^{l+2} r^\sigma. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Используя вложение $V_2(Q)$ в $L_{2(n+1)}(Q)$ и неравенство (3.2), получаем при $s = (\frac{n}{2}+2)l$:

$$\begin{aligned} \int\limits_Q u_r^{l+2}\varphi_j^{s+2}dxdt \leq C_{22}\Big\{ \frac{(l+1)^4}{r^2} 2^{2j} \int\limits_Q u_r^{\frac{l+2}{n+2}n} \varphi_j^{\frac{s+2}{n+2}n-2} dxdt + \\ + \Big[k\Big(\frac{d}{r}\Big)^{\sigma-2}\Big]^{\frac{l+2}{n+2}n} r^\sigma \Big\}^{\frac{n+2}{n}}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Выберем значения l, s в виде

$$l = l_i = 2\left[\left(\frac{n+2}{n}\right)^i - 1\right], \quad s = s_i = (n+4)\left[\left(\frac{n+2}{n}\right)^i - 1\right]$$

и обозначим

$$I_i(j) = \frac{1}{r^{n+2}}\left\{\int\limits_Q [u_r(x,t)]^{l_i+2}[\varphi_j(x)]^{s_i+2}dxdt + \left[k\left(\frac{d}{r}\right)^{\sigma-2}\right]^{l_i+2} r^{\sigma+2}\right\}.$$

Имеем

$$[I_i(j)]^{\kappa^i} \le C_{23}^{\kappa^i}\left(\frac{n+2}{n}\right)^{4\kappa^{i-1}} \left(2^{2j}\right)^{\kappa^{i-1}}[I_{i-1}(j)]^{\kappa^{i-1}}, \text{ где } \kappa = \frac{n}{n+2}.$$

Применяя это неравенство последовательно и устремляя $i \to \infty$, получим оценку

$$\mu_j^2(r) \le C_{24}\left(\frac{2^j}{r}\right)^{n+2}\left\{\int\limits_Q u_r^2\varphi_j^2 dxdt + \left[k\left(\frac{d}{r}\right)^{\sigma-2}\right]^2 r^{\sigma+2}\right\}. \tag{3.4}$$

Здесь

$$\mu_j(r) = \max\{u_r(x,t) : (x,t) \in Q \cap G_j\}. \tag{3.5}$$

Оценим интеграл в правой части (3.4), используя неравенство Пуанкаре и оценку (2.18)

$$\int\limits_Q u_r^2\varphi_j^2 dxdt \le \int\limits_Q \left[u_r\right]^2_{\mu_{j+1}(r)} dxdt \le$$

$$\le C_{25} r^2 \int\limits_{E_{r,\mu_{j+1}(r)}} \left|\frac{\partial u}{\partial x'}\right|^2 dxdt \le C_{26} r^2 \mu_{j+1}(r) k d^{\sigma-2}.$$

Из (3.4) и последнего неравенства получаем для $\overline{\mu}_j(r) = \mu_j(r) + k(\frac{d}{r})^{\sigma-2}$ оценку

$$\overline{\mu}_j^2(r) \le C_{27}\frac{2^{j(n+2)}}{r^n} k d^{\sigma-2}\overline{\mu}_{j+1}(r),$$

откуда последовательной итерацией по j следует неравенство

$$\mu_1(r) \le C_{28}\frac{kd^{\sigma-2}}{r^n},$$

доказывающее лемму 3.1. $\square$

Обозначим при $\rho \in (r, \frac{1}{2})$, $\eta \in R^{n-\sigma}, |\eta| \le 1,\ \theta \in [r^2, T]$, $\tau \in [0, T]$

$$\begin{aligned}
&\tilde{G}(r,\rho,\eta,\theta,\tau) = \{(x,t) \in Q : x \in G_1,\ |x'' - \eta| \le \rho,\ |t-\tau| \le \theta\},\\
&\tilde{\mu}(r,\rho,\eta,\theta,\tau) = \max\{u_r(x,t) : (x,t) \in \tilde{G}(r,\rho,\eta,\theta,\tau)\},\\
&\tilde{\varphi}_{\rho,\theta}(x,\eta,t,\tau) = \varphi_1(x)\chi_\rho(x,\eta)\lambda_\theta(x,\tau).
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Подставляя в интегральное тождество (2.3) пробную функцию

$$\psi(x,t) = \big[u_r(x,t)\big]_{(h)}^{l+1}\big[\tilde{\varphi}_{\rho,\theta}(x,\eta,t,\tau)\big]^{s+2}$$

и повторяя рассуждения из доказательства неравенства (3.4), устанавливаем следующую лемму.

Лемма 3.2. *Предположим, что выполнены условия леммы 3.1. Тогда при* $1 \le q \le 2$, $\rho \in (r, \frac{1}{2})$, $\eta \in R^{n-\sigma}$, $|\eta| \le 1$, $\theta \in [r^2, T]$, $\tau \in [0, T]$ *справедлива оценка*

$$\tilde{\mu}^q(r,\rho,\eta,\theta,\tau) \le K_{14}\Big(\frac{1}{r}\Big)^{n+2}\Big\{\int\limits_Q u_r^q(x,t)\tilde{\varphi}^2_{\rho,\theta}(x,\eta,t,\tau)dxdt + \\ + \Big[k\Big(\frac{d}{r}\Big)^{\sigma-2}\Big]^q\rho^{n-\sigma}\cdot r^{\sigma+2}\Big\} \tag{3.7}$$

с постоянной K_{14}*, зависящей только от* n, ν_1, ν_2, T, C_0.

Лемма 3.3. *Пусть выполнены условия* $a_1), a_2), (1.5)$*. Тогда для решения* $u(x,t)$ *задачи (1.1), (1.4) справедлива оценка*

$$|u(x,t)| \le K_{15}|k|\frac{d^{\sigma-2}}{|x'|^n} \quad \text{при} \quad (x,t) \in Q \tag{3.8}$$

с постоянной K_{15}*, зависящей только от* n, ν_1, ν_2, T, C_0.

Доказательство. Выбираем последовательность $r_j = (\frac{1}{2})^{j-1}$, $j = 1, 2, \ldots$. Применяя неравенство (3.1) при $r = r_j$ и суммируем по j полученные неравенства, имеем оценку

$$m_{r_j} \le \frac{4n}{2^n - 1}K_{12}k\frac{d^{n-2}}{r_j^n},$$

доказанную при $k > 0$. Последнее неравенство немедленно влечет за собой оценку (3.8), что доказывает лемму 3.3. □

Аналогично доказательствам лемм 3.1, 3.3, только используя вместо оценки (2.18) оценку (2.15) при $\rho = \frac{1}{4}$, $\theta = T$, может быть доказана

Лемма 3.4. *Существует постоянная K_{16}, зависящая лишь от n, ν_1, ν_2, T, C_0, такая, что для решения $u(x,t)$ задачи (1.1), (1.4) справедлива оценка*

$$|u(x,t)| \le K_{16}|k|\Big(\frac{d}{|x'|}\Big)^{\frac{\sigma-2}{2}}. \tag{3.9}$$

4. Доказательство оценки (1.6)

В этом разделе статьи доказывается, что, стартуя с полученных в леммах 3.1, 3.2 оценок решения, можно установить неравенство (1.6) путем последовательных улучшений оценок максимума $|u(x,t)|$.

Проведем вначале последовательное улучшение интегральных оценок. Далее будем исходить из дополнительного предположения, что с некоторым $\lambda \in [\frac{1}{2}, 1)$ и некоторой постоянной $A_1 \ge \max\{K_{13}, 1\}$ справедлива оценка

$$u(x,t) \le A_1 k\Big(\frac{d}{|x'|}\Big)^{\lambda(\sigma-2)}, \quad (x,t) \in Q. \tag{4.1}$$

Предполагаем, как и раньше, что $k > 0$. Тогда из (3.8), (4.1) следует, что при любом $\gamma \in [0,1]$ справедливо неравенство

$$u(x,t) \le M\,(A_1)k\Big(\frac{1}{|x'|}\Big)^{2\gamma+\alpha} \cdot \Big(\frac{d}{|x'|}\Big)^{\beta}, \quad (x,t) \in Q, \tag{4.2}$$

где

$$M(A_1) = K_{13}^{\gamma}A_1^{1-\gamma},\ \alpha = (n-\sigma)\gamma,\ \beta = (\sigma-2)[\gamma + \lambda(1-\gamma)]. \tag{4.3}$$

Введем при произвольных положительных числах $A, r, \delta, \rho, \theta,\ \eta \in R^{n-\sigma}$, $\tau \in [0,T]$ обозначения

$$\begin{aligned} R_{r,\delta}(A,\rho,\theta) = \Big[Ak\Big(\frac{d}{\delta}\Big)^{\lambda(\sigma-2)}\Big]^{q-1} k\rho^{n-\sigma}d^{\sigma-2}\theta + {}\\ + \Big[M(A_1)k\Big(\frac{\theta}{r^2}\Big)^{\gamma}\Big(\frac{\rho}{r}\Big)^{\alpha}\Big(\frac{d}{r}\Big)^{\beta}\Big]^{q} r^{\sigma}\rho^{n-\sigma}\theta\cdot\Big(\frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{\theta}\Big), \end{aligned} \tag{4.4}$$

$$J_r(\rho,\eta,\theta,\tau) = \Big[\frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{\theta}\Big]\int\limits_{E_r} u_r^q(x,t)\chi_\rho^2(x,\eta)\lambda_\theta^2(t-\tau)dxdt \tag{4.5}$$

и пусть $R_r(A,\rho,\theta) = R_{r,r}(A,\rho,\theta)$.

Зафиксируем в дальнейшем значения q и γ, полагая их соответственно равными

$$q = \frac{\sigma+1}{\sigma}, \quad \gamma = \frac{1}{n-\sigma+2}. \tag{4.6}$$

В этом случае справедливо неравенство

$$(\alpha+\beta+2\gamma)q<\sigma. \tag{4.7}$$

Теорема 4.1. *Предположим, что выполнены условия* $a_1), a_2), (1.5)$, q, γ *определяются равенствами (4.6) и пусть* A_1, λ *таковы, что* $A_1 \geq K_4$, $\lambda \in [\frac{1}{2}, 1)$ *и для решения* $u(x,t)$ *задачи (1.1), (1.4) справедлива оценка (4.1). Существуют постоянные* A_2, A_3, $A_4 \in [1,\infty)$, $A_5 \in [T,\infty)$, *зависящие лишь от* n, ν_1, ν_2, T, C_0, *такие, что из справедливости при некоторых* $\rho \in [d, \frac{1}{4}]$, $\theta \in [d^2, T]$ *оценок*

$$J_r(\rho,\eta,\theta,\tau) \leq A_2 R_r(A_1,\rho,\theta), \tag{4.8}$$

$$I_{r,\mu}(\rho,\eta,\theta,\tau) \leq A_3 R_{r\delta}(A_1,\rho,\theta) \quad \text{для} \quad \mu = m_\delta - m_r \tag{4.9}$$

при

$$2d \leq r \leq 1,\ |\eta| \leq 1,\ \tau \in [0,T],\ \frac{r}{2^4} \leq \delta \leq r,\ 2d \leq \delta \tag{4.10}$$

и неравенств

$$A_4 r \leq \rho, \quad A_5 r^2 \leq \theta \tag{4.11}$$

следует выполнение оценок

$$J_r\Big(\frac{\rho}{2},\eta,\frac{\theta}{4},\tau\Big) \leq A_2 R_r\Big(A_1,\frac{\rho}{2},\frac{\theta}{4}\Big), \tag{4.12}$$

$$I_{r,\mu}\Big(\frac{\rho}{2},\eta,\frac{\theta}{4},\tau\Big) \leq A_3 R_{r,\delta}\Big(A_1,\frac{\rho}{2},\frac{\theta}{4}\Big) \quad \text{для} \quad \mu = m_\delta - m_r \tag{4.13}$$

при r, η, τ, δ, *удовлетворяющих неравенствам (4.10).*

Доказательство. Отметим вначале, что в условиях теоремы с некоторыми постоянными C_{29}, C_{30} справедливы оценки

$$J_r\Big(\frac{1}{4},\eta,T,\tau\Big) \leq C_{30} R_r\Big(A_1,\frac{1}{4},T\Big) \tag{4.14}$$

$$I_{r,\mu}\Big(\frac{1}{4},\eta,T,\tau\Big) \leq C_{31} R_{r\delta}\Big(A_1,\frac{1}{4},T\Big) \quad \text{для} \quad \mu = m_\delta - m_r \tag{4.15}$$

при $2d \leq r \leq 1$, $|\eta| \leq 1$, $\tau \in [0,T]$, $2d \leq \delta \leq r$. Эти неравенства непосредственно следуют из оценок (4.1), (4.2), (2.31) и неравенства (4.7).

Далее будем предполагать, что $A_2 \geq C_{30}$, $A_3 \geq C_{31}$. Докажем вначале неравенство (4.12). Используя оценку (4.9) при $\delta = r(1) =$

$\frac{r}{4}$, $\mu = m(r(1)) - m(r)$, $8d \le r \le 1$ и неравенство Пуанкаре, получаем

$$
\begin{aligned}
J_r\Big(\frac{\rho}{2},\eta,\frac{\theta}{4},\tau\Big) &\le \\
&\le 4\Big[\frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{\theta}\Big]\int\limits_{E_r}[u_r]^q_\mu\chi^2_\rho(x,\eta)\lambda^2_\theta(t,\tau)dxdt + J_{r(1)}\Big(\frac{\rho}{2},\eta,\frac{\theta}{4},\tau\Big) \le \\
&\le C_{32}r^2\Big[\frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{\theta}\Big]I_{r\mu}(\rho,\eta,\theta,\tau) + J_{r(1)}\Big(\frac{\rho}{2},\eta,\frac{\theta}{4},\tau\Big) \le \\
&\le C_{32}A_3\Big[\Big(\frac{r}{\rho}\Big)^2+\frac{r^2}{\theta}\Big]R_{r,r(1)}(A_1,\rho,\theta) + J_{r(1)}\Big(\frac{\rho}{2},\eta,\frac{\theta}{4},\tau\Big). \qquad (4.16)
\end{aligned}
$$

Обозначим

$$r(j) = \frac{r}{4^j},\ \ J_j = J_{r(j)}\Big(\frac{\rho}{2},\eta,\frac{\theta}{4},\tau\Big).$$

Из неравенства (4.16) с $r = r(j)$, $2^{1+2j}d \le r \le 1$ и обозначения (4.4) имеем оценку

$$J_j \le C_{32}A_3\sum_{i=1}^{2}R^{(i)}_r(A_1,\rho,\theta)4^{-m_i j} + J_{j+1}, \qquad (4.17)$$

где

$$R^{(1)}_r(A_1,\rho,\theta) = \Big[\Big(\frac{r}{\rho}\Big)^2+\frac{r^2}{\theta}\Big]\Big[\frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{\theta}\Big]\Big[A_1k\Big(\frac{d}{r}\Big)^{\lambda(\sigma-2)}\Big]^{q-1}k\rho^{n-\sigma}\theta d^{\sigma-2},$$

$$
\begin{aligned}
R^{(2)}_r(A_1,\rho,\theta) = \Big[\Big(\frac{r}{\rho}\Big)^2+\frac{r^2}{\theta}\Big]\Big[\frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{\theta}\Big]& \\
\Big[M(A_1)k\Big(\frac{\theta}{r^2}\Big)^{\gamma}\cdot\Big(\frac{\rho}{r}\Big)^{\alpha}\cdot\Big(\frac{d}{r}\Big)^{\beta}\Big]^q\cdot r^{\sigma}\rho^{n-\sigma}\theta&
\end{aligned}
$$

$$m_1 = 2-\lambda(\sigma-2)(q-1), \quad m_2 = 2-q(\alpha+\beta+2\gamma)+\sigma.$$

В силу выбора q и неравенства (4.7) имеем оценки $m_1 \ge 1$, $m_2 \ge 2$. Тем самым из (4.17) получаем

$$J_j \le 4^{n-j}C_{32}A_3\Big[\Big(\frac{r}{\rho}\Big)^2+\frac{r^2}{\theta}\Big]R_r\Big(A_1,\frac{\rho}{2},\frac{\theta}{4}\Big) + J_{j+1}. \qquad (4.18)$$

Определим для $r \in [2d,1]$ целое число j_0 так, чтобы $4^{1+j_0} \le \frac{r}{d} < 4^{2+j_0}$. Применяя последовательно неравенство (4.18), получаем оценку

$$J_r\Big(\frac{\rho}{2},\eta,\frac{\theta}{4},\tau\Big) \le 4^{n+1}C_{32}A_3\Big[\Big(\frac{r}{\rho}\Big)^2+\frac{r^2}{\theta}\Big]R_r\Big(A_1,\frac{\rho}{2},\frac{\theta}{4}\Big) + J_{j_0}. \qquad (4.19)$$

Оценим J_{j_0}, используя неравенство (2.4) и выбор j_0

$$J_{j_0} \le C_{33}\Big[\frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{\theta}\Big]k^q\rho^{n-\sigma}\theta d^\sigma \le C_{34}R_r\Big(A_1,\frac{\rho}{2},\frac{\theta}{4}\Big). \tag{4.20}$$

Из (4.19), (4.20) имеем оценку

$$J_r\Big(\frac{\rho}{2},\eta,\frac{\theta}{4},\tau\Big) \le C_{35}\Big\{A_3\Big[\Big(\frac{r}{\rho}\Big)^2+\frac{r^2}{\theta}\Big]+1\Big\}R_r\Big(A_1,\frac{\rho}{2},\frac{\theta}{4}\Big). \tag{4.21}$$

Эта оценка доказывает требуемое неравенство (4.12), если подчинить A_2, A_3, A_4, A_5 условию

$$C_{35}\Big\{A_3\Big[\frac{1}{A_4^2}+\frac{1}{A_5}\Big]+1\Big\} \le A_2. \tag{4.22}$$

Далее доказываем неравенство (4.12). Из теоремы 2.2, неравенств (4.8), (4.21) при $\mu = m_\delta - m_r$, $\frac{r}{4} \le \delta \le r$, $2d \le r \le 1$ имеем

$$\begin{aligned} J_{r,\mu}\Big(\frac{\rho}{2},\eta,\frac{\theta}{4},\tau\Big) &\le C_{36}\Big\{\Big[\frac{r^2}{\rho^2}+\frac{r^2}{\theta}\Big]A_3R_{r,\delta}(A_1,\rho,\theta)+ \\ &\quad + m_\delta^{q-1}k\rho^{n-\sigma}\theta d^{\sigma-2}+A_2R_r(A_1,\rho,\theta)\Big\} \le \\ &\le C_{37}\Big\{\Big[\frac{r^2}{\rho^2}+\frac{r^2}{\theta}\Big]A_3+A_2+1\Big\}R_{r,\delta}\Big(A_1,\frac{\rho}{2},\frac{\theta}{4}\Big). \end{aligned} \tag{4.23}$$

При этом использованы неравенства

$$\begin{aligned} &R_{r,\delta}(A_1,\rho,\theta) \le C_{38}R_{r,\delta}\Big(A_1,\frac{\rho}{2},\frac{\theta}{4}\Big), \\ &R_r(A_1,\rho,\theta) \le R_{r,\delta}(A_1,\rho,\theta) \ \text{ при } \ \frac{r}{4} \le \delta \le r. \end{aligned}$$

Требуемое неравенство (4.13) следует из (4.23), если подчинить постоянные $A_2, A_3,\ A_4, A_5$ условию

$$C_{37}\Big\{A_3\Big[\frac{1}{A_4^2}+\frac{1}{A_5}\Big]+A_2+1\Big\} \le A_3. \tag{4.24}$$

Выбирая A_2, A_3, A_4, A_5, удовлетворяющими неравенствам (4.22), (4.24), $A_2 \ge C_{30}$, $A_3 \ge C_{31}$, завершаем доказательство теоремы 4.1. □

Используя неравенства (4.14), (4.15) и применяя последовательно теорему 4.1, получаем следующее утверждение.

Лемма 4.1. *В условиях теоремы 4.1 при любом*

$$r \in \big[2d, \min\big\{\frac{1}{4A_4}, \sqrt{\frac{T}{A_5}}\big\}\big]$$

справедлива оценка

$$I_{r,\mu}(\rho,\eta,\theta,\tau) \le K_{17} R_{r,\delta}(A_1,\rho,\theta) \tag{4.25}$$

для $\mu = m_\delta - m_r$, $\frac{r}{4} \le \delta \le r$, $A_4 r \le \rho \le 1$, $A_5 r \le \theta \le T$ *с постоянной* K_{17}, *зависящей лишь от* n, ν_1, ν_2, T, C_0.

Лемма 4.2. *Предположим, что выполнены условия теоремы 4.1. Тогда существует постоянная* K_{18}, *зависящая лишь от* n, ν_1, ν_2, T, C_0 *такая, что справедлива оценка*

$$u(x,t) \le K_{18} A_1^{1-\gamma} k\Big(\frac{d}{|x'|}\Big)^{\beta}, \quad (x,t) \in Q, \tag{4.26}$$

где β, γ *определяются равенствами (4.3), (4.6).*

Доказательство. Аналогично доказательству леммы 3.3 проверяется, что для доказательства неравенства (4.26) достаточно установить оценку

$$m_{\frac{r}{2}} - m_r \le C_{38} A_1^{1-\gamma} k\Big(\frac{d}{r}\Big)^{\beta}, \quad \text{при} \quad r \in \Big[2d, \min\Big\{\frac{1}{4A_4}, \sqrt{\frac{T}{A_5}}\Big\}\Big], \tag{4.27}$$

с постоянными A_4, A_5 из теоремы 4.1.

Докажем неравенство (4.27). Для заданного значения r зафиксируем значения ρ, η, θ, τ так, чтобы $\rho = \rho(r) = A_4 r$, $\theta = \theta(r) = A_5 r^2$, $\eta = \eta(r)$, $\tau = \tau(r)$ и выполнялось равенство

$$\tilde{\mu}\big(r, \rho(r), \eta(r), \theta(r), \tau(r)\big) = m_{\frac{r}{2}} - m_r. \tag{4.28}$$

Используя лемму 3.2, получаем

$$\begin{aligned} &\big[m_{\frac{r}{2}} - m_r\big]_+^q \le \\ &\quad \le \frac{C_{39}}{r^{n+2}} \Big\{ \int\limits_Q u_r^q(x,t) \varphi_*^2(x,t)\,dxdt + \Big[k\Big(\frac{d}{r}\Big)^{\sigma-2}\Big]^q r^{n+2} \Big\}, \end{aligned} \tag{4.29}$$

где $\varphi_*(x,t) = \tilde{\varphi}_{\rho(r),\theta(r)}(x, \eta(r), t, \tau(r))$.

Так как функция $\varphi_*(x,t)$ равна нулю при $|x'| \le \delta = \frac{5r}{16}$, то используя неравенство Пуанкаре по переменной x' и оценку (4.25), получаем с $\mu = m(\delta) - m(r)$

$$\int\limits_Q u_r^q(x,t)\varphi_*^2(x,t)dxdt \le$$
$$\le \int\limits_Q [u_r]_\mu^q(x,t)\chi^2_{\rho(r)}(x,\eta(r))\lambda^2_{\theta(r)}(t-\tau(r))dxdt \le$$
$$\le C_{40}r^2 \int\limits_{E_{r,\mu}} u_r^{q-2}\Big|\frac{\partial u}{\partial x}\Big|^2 \chi^2_{\rho(r)}(x,\eta(r))\lambda^2_{\theta(r)}(t-\tau(r))dxdt \le$$
$$\le C_{41}r^2 R_{r,\delta}(A_1, A_4 r, A_5 r^2). \quad (4.30)$$

Из (4.29), (4.30) и (4.4) получаем

$$\big[m_{\frac{r}{2}} - m_r\big]_+^q \le$$
$$\le C_{42}k^q\Big\{A_1^{q-1}\Big(\frac{d}{r}\Big)^{(\sigma-2)[\lambda(q-1)+1]} + A_1^{(1-\gamma)q}\Big(\frac{d}{r}\Big)^{\beta q} + \Big(\frac{d}{r}\Big)^{(\sigma-2)q}\Big\} =$$
$$= C_{42}A_1^{(1-\gamma)q}k^q\Big(\frac{d}{r}\Big)^{\beta q}\Big\{1 + A_1^{\gamma q-1}\Big(\frac{d}{r}\Big)^{(1-\gamma q)(\sigma-2)(1-\lambda)} +$$
$$+ A_1^{-(1-\gamma)q}\Big(\frac{d}{r}\Big)^{(\sigma-2)q(1-\lambda)(1-\gamma)}\Big\} \le C_{43}A_1^{(1-\gamma)q}k^q\Big(\frac{d}{r}\Big)^{\beta q}. \quad (4.31)$$

При получении последней оценки также воспользовались неравенством $\gamma q < 1$, следующим из (4.6). Получение оценки (4.31) заканчивает доказательство леммы 4.2. □

Доказанная лемма 4.2 позволяет просто получить основной результат данного раздела.

Теорема 4.2. *Предположим, что выполнены условия* $a_1), a_2)$, *(1.5). Тогда существует постоянная* K, *зависящая лишь от* n, ν_1, ν_2, T, C_0, *такая, что для решения* $u(x,t)$ *задачи (1.1), (1.4) справедлива оценка*

$$|u(x,t)| \le K|k|\Big(\frac{d}{|x'|}\Big)^{\sigma-2}. \quad (4.32)$$

Доказательство. Как отмечалось ранее, достаточно рассматривать $k > 0$. Покажем, что число K можно выбрать в виде

$$K = \max\big\{1, K_{15}, K_{16}, K_{18}^{\frac{1}{\gamma}}\big\}, \quad (4.33)$$

где K_{15}, K_{16}, K_{18} – постоянные, определенные соответственно в леммах 3.3, 3.4, 4.2, γ – число, определенное равенством (4.6).

Определим последовательность λ_i, $i = 1, 2, ...$ равенством

$$\lambda_i = 1 - \frac{1}{2}(1-\gamma)^{i-1} \tag{4.34}$$

и покажем, что при $i = 1, 2, ...$ справедливы оценки

$$u(x,t) \le Kk\Big(\frac{d}{|x'|}\Big)^{\lambda_i(\sigma-2)}. \tag{4.35}$$

При $i = 1$ оценка (4.35) следует из (4.33) и леммы 3.4. Далее оценка (4.35) доказывается индукцией по i. Если предполагать ее справедливой при $i = i_0$, $i_0 \ge 1$, то, применяя лемму 4.2, получаем оценку:

$$u(x,t) \le K_{18}K^{1-\gamma}k\Big(\frac{d}{|x'|}\Big)^{(\sigma-2)\gamma+\lambda_{i_0}(\sigma-2)(1-\gamma)}. \tag{4.36}$$

По выбору K имеем $K_{18}K^{1-\gamma} \le K$. Из (4.34) получаем

$$(\sigma-2)\gamma + \lambda_{i_0}(\sigma-2)(1-\gamma) = \lambda_{i_0+1}(\sigma-2).$$

Тем самым, из (4.36) следует (4.35) при $i = i_0 + 1$. Замечая, что $\lambda_i \to 1$ при $i \to \infty$, предельным переходом по i из (4.35) получаем (4.32), что и завершает доказательство теоремы. □

5. Оценка решения задачи (1.1), (1.7)

Далее $u(x,t)$ – решение задачи (1.1), (1.7). Предполагаем выполненными условия a_1, a_2), (1.5) и пусть, для определенности $k > 0$.

Определим при $r \in (d, 1]$

$$m(r) = \max\{u(x,t) : |x'| + \sqrt{|t-t_0|} = r,\ |x''| \le 1\}$$
$$u^{(r)}(x,t) = \max\{u(x,t) - m(r), 0\},$$
$$E(r) = \{(x,t) \in Q : u(x,t) > m(r)\}.$$

Аналогично доказательству теоремы 2.1 доказывается следующая теорема.

Теорема 5.1. *Пусть выполнены условия a_1, a_2), (1.5), $t_0 \ge 2d^2$. Тогда существуют постоянные $K^{(1)}, K^{(2)}$, зависящие лишь от n, ν_1, ν_2, T,*

C_0, такие, что при $2d \le r \le 1$, $K^{(1)} r \le \rho \le \frac{1}{4}$, $|\eta| \le 1$ для решения $u(x,t)$ задачи (1.1), (1.7) с $k > 0$ справедлива оценка

$$\operatorname*{vrai\,max}_{0\le t\le T} \int\limits_{\Omega} \left[u^{(r)}(x,t)\right]^2 \chi_\rho^2(x,\eta)dx + \int\limits_{E(r)} \left|\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|^2 \chi_\rho^2(x,\eta)dxdt \le \\ \le K^{(2)} k(k - m(r))\rho^{n-\sigma} d^\sigma, \quad (5.1)$$

где $\chi_\rho(x,\eta)$ – та же функция, что и в (2.7).

Пусть μ – произвольное число из интервала $(0, k - m(r))$. Введем обозначения

$$\begin{aligned} &[u^{(r)}]_\mu(x,t) = \min\{u^{(r)}(x,t), \mu\}, \\ &E_\mu(r) = \{(x,t) \in Q : 0 \le u^{(r)}(x,t) \le \mu\}, \\ &F_\mu(r) = \{(x,t) \in Q : u^{(r)}(x,t) \ge \mu\}, \\ &I_\mu^{(r)}(\rho,\eta) = \int\limits_{E_\mu(r)} \left[u^{(r)}(x,t)\right]^{q-2} \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 \chi_\rho^2(x,\eta)dxdt, \end{aligned}$$

где $r \in [2d, 1]$, $K^{(1)} r \le \rho \le \frac{1}{4}$, $\eta \in R^{n-\sigma}$, $|\eta| \le 1$, q – число из интервала (1,2), выбор которого будет указан далее.

Используя теорему 5.1, можно доказать следующую лемму, с помощью которой проводится последовательное улучшение интегральных оценок решения задачи (1.1), (1.7).

Лемма 5.1. *При выполнении условий теоремы 5.1 для решения $u(x,t)$ задачи (1.1), (1.7) справедлива оценка*

$$I_\mu^{(r)}(\rho,\eta) \le \frac{K^{(3)}}{(q-1)^4} \Big\{ \frac{r^2}{\rho^2} I_\mu^{(r)}(2\rho,\eta) + \mu^{q-1} k \rho^{n-\sigma} d^\sigma + \\ + \frac{1}{\rho^2} \int\limits_{F_\mu(r)} \left[u^{(r)}(x,t)\right]^q \chi_{2\rho}^2(x,\eta)dxdt \Big\}, \quad (5.2)$$

где $q \in (1,2)$, $r \in [2d,1]$, $0 < \mu < k - m(r)$, $|\eta| \le 1$, $K^{(1)} r \le \rho \le \frac{1}{4}$ и постоянная $K^{(3)}$ зависит только от n, ν_1, ν_2, T, C_0.

Используя метод Мозера, как в разделе 3, доказываются следующие предварительные поточечные оценки.

Лемма 5.2. *Пусть выполнены условия теоремы 5.1. Существуют постоянные $K^{(4)}$, $K^{(5)}$, зависящие лишь от n, ν_1, ν_2, T, C_0, такие,* *что для решения $u(x,t)$ задачи (1.1), (1.7) при $(x,t)\in Q$ справедливы оценки*

$$u(x,t)\le K^{(4)}k\frac{d^{\sigma}}{\big[|x'|+\sqrt{|t-t_0|}\big]^n} \tag{5.3}$$

$$u(x,t)\le K^{(5)}k\left(\frac{d}{|x'|+\sqrt{|t-t_0|}}\right)^{\frac{\sigma}{2}}. \tag{5.4}$$

Далее будем исходить из дополнительного предположения, что с некоторым $\lambda_1\in[\frac{1}{2},1)$ и некоторой постоянной $A^{(1)}\ge K^{(5)}$ справедлива оценка

$$u(x,t)\le A^{(1)}k\left(\frac{d}{|x'|+\sqrt{|t-t_0|}}\right)^{\lambda_1\sigma},\quad (x,t)\in Q. \tag{5.5}$$

Тогда из (5.3), (5.5) следует, что при любом $\gamma\in[0,1]$ справедливо неравенство

$$u(x,t)\le M(A^{(1)})k\left(\frac{1}{|x'|+\sqrt{|t-t_0|}}\right)^{\alpha}\left(\frac{d}{|x'|+\sqrt{|t-t_0|}}\right)^{\beta\sigma},\quad (x,t)\in Q, \tag{5.6}$$

где

$$M(A^{(1)})=[K^{(4)}]^{\gamma}[A^{(1)}]^{1-\gamma},\ \alpha=(n-\sigma)\gamma,\ \beta=\gamma+\lambda_1(1-\gamma). \tag{5.7}$$

Фиксируя в дальнейшем значения q и γ, соответственно равными

$$q=\frac{\sigma+3}{\sigma+2},\quad \gamma=\frac{1}{n-\sigma+1}, \tag{5.8}$$

видим, что справедливы неравенства

$$2<(\alpha+\beta\sigma)q<\sigma+2,\quad \frac{1}{q}>\gamma,\quad \lambda_1\frac{q-1}{q}+\frac{1}{q}-\beta>0.$$

Проводя далее такие же рассуждения, как в разделе 4, получим следующую теорему, с помощью которой и проводим улучшение поточечных оценок.

Теорема 5.2. *Существует постоянная $K^{(6)}$, зависящая лишь от n, ν_1, ν_2, T, C_0, такая, что из справедливости при некотором $\lambda_1\in[\frac{1}{2},1)$ неравенства (5.5), следует выполнение оценки*

$$u(x,t)\le K^{(6)}[A^{(1)}]^{1-\gamma}k\left(\frac{d}{|x'|+\sqrt{|t-t_0|}}\right)^{\beta\sigma} \tag{5.9}$$

где β,γ определяются равенствами (5.7), (5.8).

Эта теорема дает возможность просто получить основной результат раздела.

Теорема 5.3. *Предположим, что выполнены условия теоремы 5.1. Тогда существует постоянная K, зависящая лишь от n, ν_1, ν_2, T, C_0, такая, что для решения $u(x,t)$ задачи (1.1), (1.7) при $(x,t) \in Q$ справедлива оценка*

$$|u(x,t)| \leq K|k| \left(\frac{d}{|x'| + \sqrt{|t - t_0|}} \right)^{\sigma}. \tag{5.10}$$

Литература

[1] Скрыпник И.В. *О поточечных оценках некоторых емкостных потенциалов.* // Общая теория граничных задач. — Киев, 1983. — С. 198-206.

[2] Скрыпник И.В. *Методы исследования нелинейных эллиптических граничных задач.* — М.: Наука, 1990. — 448 с.

[3] Скрыпник И.В., Наумова М.А. *Поточечная оценка решения нелинейной эллиптической задачи в области с тонкой полостью* // Укр. мат. журн. — 1992. — Т. **44**, №3. — С. 1417-1432.

[4] Скрыпник И.В. *Поточечная оценка решений модельной нелинейной параболической задачи.*// Нелин. граничные задачи. — 1991. — №3. — С. 72-86.

[5] Скрыпник И.В. *Асимптотическое разложение решений квазилинейных параболических задач в перфорированных областях* // Укр. мат. журн. — 1993. — Т. **45**, №11. — С. 1542-1566.

[6] Скрыпник И.В. *Необходимое условие регулярности граничной точки для квазилинейного параболического уравнения* // Мат. сборник. — 1992. — Т. **183**, №7. — С. 3-22.

[7] Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа.* — М.: Наука, 1967. — 736 с.

[8] Nicolosi F., Skrypnik I.V., Skrypnik I.I. *Precise point-wise growth conditions for removable isolated singularities, Communications in PDE* (в печати).

Сведения об авторах

М.А. Наумова Донецкий национальный университет, кафедра дифференциальных уравнений, ул. Университетская 24, 83055 Донецк, Украина

И.В. Скрыпник ИПММ НАН Украины, ул. Р. Люксембург 74, 83114 Донецк, Украина
E-Mail: `scrypnikiamm.ac.donetsk.ua`