Український математичний вісник
Том 1 **(2004)**, № 1, 61 – 68

Про коректну розв'язність задачі Коші для вироджених параболічних рівнянь типу Колмогорова

Віталій С. Дронь, Степан Д. Івасишен

Анотація. У роботі розглядається рівняння другого порядку, яке узагальнює добре відоме рівняння дифузії з інерцією А.М. Колмогорова [1]. Рівняння містить три групи просторових змінних з різним числом змінних у кожній групі. Фундаментальний розв'язок задачі Коші для такого рівняння був побудований і вивчений у [2 – 4]. У [5,6] була встановлена коректна розв'язність задачі Коші та доведені теореми про інтегральне зображення розв'язку задачі Коші для однорідного виродженого параболічного рівняння типу Колмогорова не тільки другого, але й вищих порядків за умови, що коефіцієнти рівняння не залежать від просторових змінних.

У роботі одержано подібні результати для неоднорідного рівняння другого порядку з коефіцієнтами, залежними від усіх змінних. Остання теорема присвячена коректній розв'язності задачі Коші для даного рівняння у гельдерових просторах. Такі результати для невироджених рівнянь були одержані в [7], а для даного рівняння з не залежними від просторових змінних коефіцієнтами – у [8].

2000 MSC. 35K15.

1. Означення та основні припущення

Розглянемо рівняння

$$(\partial_t - \sum_{j=1}^{n_2} x_{1j}\partial_{x_{2j}} - \sum_{j=1}^{n_3} x_{2j}\partial_{x_{3j}} - \sum_{k,j=1}^{n_1} a_{kj}(t,x)\partial^2_{x_{1k}x_{1j}} - \sum_{j=1}^{n_1} a_j(t,x)\partial_{x_{1j}} -$$

$$-a_0(t,x))u(t,x) = f(t,x), \quad (t,x) \in \Pi_{(0,T]}. \tag{1}$$

де n_i, $i \in \{1,2,3\}$, – задані натуральні числа, такі, що $1 \le n_3 \le n_2 \le n_1$, $n \equiv n_1 + n_2 + n_3$, $x \equiv (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^n$, $x_i \equiv (x_{i1}, \ldots, x_{in_i}) \in \mathbb{R}^{n_i}$, $i \in \{1,2,3\}$; T – задане додатне число, $\Pi_H \equiv H \times \mathbb{R}^n$ при $H \subset \mathbb{R}$.

На коефіцієнти рівняння ставитимуться такі умови.

Стаття надійшла в редакцію 17.04.2003

ISSN 1810 – 3200.

$\mathbf{A}_1$. $\exists\delta>0\ \ \forall(t,x)\in\Pi_{[0,T]}\ \forall\sigma\in\mathbb{R}^{n_1}:\quad \mathrm{Re}\sum\limits_{k,j=1}^{n_1}a_{kj}(t,x)\sigma_k\sigma_j\ge\delta|\sigma|^2.$

$\mathbf{A}_2$. Коефіцієнти a_{kj}, a_j, $\{k,j\}\subset\{1,...,n_1\}$, a_0 та їхні похідні за x_2 та x_3 є неперервними обмеженими в $\Pi_{[0,T]}$ функціями і задовольняють в $\Pi_{[0,T]}$ за x_1 рівномірну умову Гельдера.

$\mathbf{A}_3$. Похідні за x_1 від a_{kj} і a_j, $\{k,j\}\subset\{1,...,n_1\}$, до другого і першого порядків відповідно задовольняють умову $\mathbf{A}_2$.

За умов $\mathbf{A}_1$ і $\mathbf{A}_2$ доведено [3] існування фундаментального розв'язку задачі Коші для рівняння (1). Це є така функція $Z(t,x;\tau,\xi)$, $0\le\tau<t\le T$, $\{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n$, що для довільного $\tau\in[0,T)$ і довільних неперервних обмежених функцій $\varphi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{C}$ вираз $\int\limits_{\mathbb{R}^n}Z(t,x;\tau,\xi)\varphi(\xi)d\xi$, $(t,x)\in\Pi_{(\tau,T]}$, визначає в $\Pi_{(\tau,T]}$ розв'язок однорідного рівняння (1) за початкової умови

$$u(t,x)|_{t=\tau}=\varphi(x),\quad x\in\mathbb{R}^n. \tag{2}$$

Умова (2) задовольняється у сенсі рівномірної збіжності на кожному компакті з $\mathbb{R}^n$. В [3] був побудований фундаментальний розв'язок Z, який задовольняє оцінки

$$|D_{x_1}^{m_1}D_{x_2}^{m_2}D_{x_3}^{m_3}Z(t,x;\tau,\xi)|\le$$
$$\le C(t-\tau)^{-N-(|m_1|+3|m_2|+5|m_3|)/2}\exp\{-c\rho(t-\tau,x,\xi)\},$$

$$0\le\tau<t\le T,\quad \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,\ |m_1|+2(|m_2|+|m_3|)\le 2, \tag{3}$$

з деякими $C>0$ і $c>0$. Тут

$$N\equiv(n_1+3n_2+5n_3)/2; m\equiv(m_1,m_2,m_3)\in\mathbb{Z}_+^n,$$
$$m_l\equiv(m_{l1},...,m_{ln_l})\in\mathbb{Z}_+^{n_l}, l\in\{1,2,3\},\mathbb{Z}_+^n$$

– множина всіх n-вимірних мультиіндексів, $|m_l|\equiv\sum\limits_{j=1}^{n_l}m_{lj}$, $l\in\{1,2,3\}$; $D_{x_l}^{m_l}\equiv D_{x_{l1}}^{m_{l1}}...D_{x_{ln_l}}^{m_{ln_l}}$; $\rho(t,x,\xi)\equiv\sum\limits_{l=1}^{3}t^{1-2l}\sum\limits_{j=1}^{n_l}|\overline{x}_{lj}(t)-\xi_{lj}|^2$, де $\overline{x}_{1j}(t)\equiv x_{1j}$, $j\in\{1,...,n_1\}$; $\overline{x}_{2j}(t)\equiv x_{2j}+tx_{1j}$, $j\in\{1,...,n_2\}$; $\overline{x}_{3j}(t)\equiv x_{3j}+tx_{2j}+\frac{1}{2}t^2x_{1j}$, $j\in\{1,...,n_3\}$; $\overline{x}_l(t)\equiv(\overline{x}_{l1}(t),...,\overline{x}_{ln_l}(t))$, $l\in\{1,2,3\}$; $\overline{x}(t)\equiv(\overline{x}_1(t),\overline{x}_2(t),\overline{x}_3(t))$.

В [4] уточнено структуру фундаментального розв'язку, одержано оцінки його усереднень за групами просторових змінних. За умов $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$ і $\mathbf{A}_3$ в [2] встановлено деякі властивості функції Z, зокрема, властивість нормальності та формулу згортки.

2. Коректна розв'язність задачі Коші у вагових просторах

Нехай $k_l(t,a_l) \equiv (c_0 a_l)/(c_0 - a_l t^{2l-1})$, $t \in [0,T]$, $l \in \{1,2,3\}$, якщо числа $c_0 > 0$ і $a_l \geq 0$, $l \in \{1,2,3\}$, такі, що $c_0 < c$, де c – стала з (3), $T < \min\limits_{1\leq l\leq 3}(c_0/(la_l))^{1/(2l-1)}$; $k(t) \equiv (k_1(t,a_1), k_2(t,a_2), k_3(t,a_3))$; $s_1(t) \equiv k_1(t,a_1) + 2t^2 k_2(t,a_2) + \frac{3}{4}t^4 k_3(t,a_3)$, $s_2(t) \equiv 2k_2(t,a_2) + 3t^2 k_3(t,a_3)$, $s_3(t) \equiv 3k_3(t,a_3)$; $s(t) \equiv (s_1(t), s_2(t), s_3(t))$.

Нехай $u(t,x)$, $(t,x) \in \Pi_{[0,T]}$, — задана неперервна комплекснозначна функція. Для довільного $t \in [0,T]$ означимо такі норми:

$$||u(t,\cdot)||_0^{k(t),\tau} \equiv \sup_{x\in\mathbb{R}^n}(|u(t,x)| \exp\{-[k(t), \overline{x}(\tau)]\}),$$

де $[a,x] \equiv \sum\limits_{l=1}^{3} a_l |x_l|^2$, якщо $a \equiv (a_1,a_2,a_3)$ і $x \equiv (x_1,x_2,x_3)$; τ може набувати лише значень t або 0.

Нехай $1 \leq p \leq \infty$ і $u(t,x)$, $(t,x) \in \Pi_{[0,T]}$, – задана комплекснозначна функція, вимірна за x при довільному $t \in [0,T]$. Для кожного $t \in [0,T]$ і такого ж, як вище, τ означимо норми

$$||u(t,\cdot)||_p^{k(t),\tau} \equiv ||u(t,x)\exp\{-[k(t), \overline{x}(\tau)]\}||_{L_p(\mathbb{R}^n)}.$$

Формальною заміною у вищеозначених нормах функції k на функцію s вводяться норми $||u(t,\cdot)||_0^{s(t),0}$ і $||u(t,\cdot)||_p^{s(t),0}$, $1 \leq p \leq \infty$.

Надалі використовуватимемо такі простори:

Φ_0^a – простір усіх неперервних функцій $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, для яких скінченною є норма

$$||\varphi||_0^a \equiv ||\varphi||_0^{k(0),0} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n}(|\varphi(x)| \exp\{-[a,x]\});$$

Φ_p^a, $(1 \leq p \leq \infty)$ – простір усіх вимірних функцій $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, для яких скінченною є норма

$$||\varphi||_p^a \equiv ||\varphi||_p^{k(0),0} \equiv ||\varphi(x)\exp\{-[a,x]\}||_{L_p(\mathbb{R}^n)};$$

Ψ – простір вимірних функцій $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, які задовольняють умову

$$||\varphi||_1^{-s(T),0} \equiv ||\psi(x)\exp\{[s(T),x]\}||_{L_1(\mathbb{R}^n)} < \infty.$$

Для функції $f : \Pi_{(0,T]} \to \mathbb{C}$ використовуватимемо наступні умови, в яких p – довільно фіксоване число з $[1,\infty)$ або $p = \infty$, а

$$\Phi_f(t,\tau,x) \equiv \int_{\mathbb{R}^n} (t-\tau)^{-N} \exp\{-c\rho(t-\tau,x,\xi)\}|f(\tau,\xi)|d\xi,$$

$$0 < \tau < t \leq T, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

де c – стала в експоненті з оцінок (3).

$\mathbf{B}_1$. Функція f неперервна і на кожному компакті $K \subset \Pi_{(0,T]}$ задовольняє рівномірну щодо t умову Гельдера за групами x_1, x_2 і x_3 просторових змінних відповідно з показниками $\beta_1 \in (0,1]$, $\beta_2 \in (1/3,1]$ і $\beta_3 \in (3/5,1]$.

$\mathbf{B}_{20}$. Для довільного $t \in (0,T]$ скінченними є величини $||f(t,\cdot)||_0^{k(t),0}$ і $F_{20}(t) \equiv \int\limits_0^t ||f(\tau,\cdot)||_0^{k(\tau),0} d\tau$.

$\mathbf{B}_{2p}$. Для довільного $t \in (0,T]$ скінченними є величини $||f(t,\cdot)||_p^{k(t),0}$ і $F_{2p}(t) \equiv \int\limits_0^t ||f(\tau,\cdot)||_p^{k(\tau),0} d\tau$.

$\mathbf{B}_{30}$. Для довільних t і τ таких, що $0 < \tau < t \leq T$, скінченними є величини $||\Phi_f(t,\tau,\cdot)||_0^{k(t),t}$ і $F_{30}(t) \equiv \int\limits_0^t ||\Phi_f(t,\tau,\cdot)||_0^{k(t),t} d\tau$, причому $F_{30}(t) \to 0$, $t \to 0+$.

$\mathbf{B}_{3p}$. Для довільних t і τ таких, що $0 < \tau < t \leq T$, скінченними є величини $||\Phi_f(t,\tau,\cdot)||_p^{k(t),t}$ і $F_{3p}(t) \equiv \int\limits_0^t ||\Phi_f(t,\tau,\cdot)||_p^{k(t),t} d\tau$, причому $F_{3p}(t) \to 0$, $t \to 0+$.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови* $\mathbf{A}_1$ *і* $\mathbf{A}_2$. *Якщо* $\varphi \in \Phi_0^a$, *а* f *задовольняє умови* $\mathbf{B}_1$ *і* $\mathbf{B}_{20}$ *або* $\mathbf{B}_{30}$, *то функція*

$$u(t,x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;0,\xi)\varphi(\xi)d\xi + \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;\tau,\xi)f(\tau,\xi)d\xi,$$
$$(t,x) \in \Pi_{(0,T]}, \quad (4)$$

є регулярним розв'язком рівняння (1), для якого за умови $\mathbf{B}_{20}$ *справджується оцінка*

$$\exists C > 0 \;\; \forall t \in (0,T]: \quad ||u(t,\cdot)||_0^{s(t),0} \leq C(||\varphi||_0^a + F_{20}(t)),$$

а за умови $\mathbf{B}_{30}$ *– оцінка*

$$\exists C > 0 \;\; \forall t \in (0,T]: \quad ||u(t,\cdot)||_0^{k(t),t} \leq C(||\varphi||_0^a + F_{30}(t))$$

і в обох випадках виконується співвідношення $u(t,\cdot) \overset{K}{\Longrightarrow} 0, \quad t \to 0+,$ K *– довільний компакт в* $\mathbb{R}^n$.

Якщо додатково виконується умова $\mathbf{A}_3$ *і невід'ємні числа* a_l, $l \in \{1,2,3\}$, *які входять у вирази для функцій* k_l *і* s_l, $l \in \{1,2,3\}$, *вибрані так, щоб виконувалася нерівність*

$$T < \min_{l \in M} (c_0/s_l(T))^{1/(2l-1)}, \quad (5)$$

то цей розв'язок єдиний.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови* $\mathbf{A}_1$ *і* $\mathbf{A}_2$. *Якщо* $\varphi \in \Phi_p^a$, $1 \leq p \leq \infty$, *а* f *задовольняє умови* $\mathbf{B}_1$ *і* $\mathbf{B}_{2p}$ *або* $\mathbf{B}_{3p}$, *то функція (4) є регулярним розв'язком рівняння (1), для якого за умови* $\mathbf{B}_{2p}$ *справджується оцінка*

$$\exists C > 0 \ \ \forall t \in (0, T] : \quad ||u(t, \cdot)||_p^{s(t),0} \leq C(||\varphi||_p^a + F_{2p}(t)),$$

а за умови $\mathbf{B}_{3p}$ *– оцінка*

$$\exists C > 0 \ \ \forall t \in (0, T] : \quad ||u(t, \cdot)||_p^{k(t),t} \leq C(||\varphi||_p^a + F_{3p}(t))$$

і в обох випадках при $1 \leq p < \infty$ $\lim\limits_{t \to 0} ||u(t, \cdot) - \varphi(\cdot)||_p^{s(t),0} = 0,$ *а при* $p = \infty$ $u(t, \cdot) \to \varphi, \ \ t \to 0,$ *слабко, тобто*

$$\forall \psi \in \Psi : \quad \int\limits_{\mathbb{R}^n} \overline{u(t, x)} \psi(x) dx \to \int\limits_{\mathbb{R}^n} \overline{\varphi(x)} \psi(x) dx, \quad t \to 0+ .$$

Якщо додатково виконуються умови $\mathbf{A}_3$ *і (5), то цей розв'язок єдиний.*

Позначимо через M^a простір усіх комплекснозначних узагальнених борельових мір, які задовольняють умову

$$||\mu||^a \equiv \int\limits_{\mathbb{R}^n} \exp\{-[a, x]\} d|\mu|(x) < \infty,$$

де $|\mu|$ – повна варіація μ; а через Ψ_0 – простір неперервних функцій $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ таких, що $|\psi(x)| \exp\{[s(T), x]\} \to 0$, $|x| \to \infty$.

Теорема 3. *Нехай виконуються умови* $\mathbf{A}_1$ *і* $\mathbf{A}_2$. *Якщо* $\mu \in M^a$, *а* f *задовольняє умови* $\mathbf{B}_1$ *і* $\mathbf{B}_{21}$ *або* $\mathbf{B}_{31}$, *то функція*

$$u(t, x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t, x; 0, \xi) d\mu(\xi) + \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t, x; \tau, \xi) f(\tau, \xi) d\xi,$$
$$(t, x) \in \Pi_{(0,T]}, \quad (6)$$

є регулярним розв'язком рівняння (1), для якого за умови $\mathbf{B}_{21}$ *справджується оцінка*

$$\exists C > 0 \ \ \forall t \in (0, T] : \quad ||u(t, \cdot)||_1^{s(t),0} \leq C(||\mu||^a + F_{21}(t)),$$

а за умови $\mathbf{B}_{31}$ *– оцінка*

$$\exists C > 0 \ \ \forall t \in (0, T] : \quad ||u(t, \cdot)||_1^{k(t),t} \le C(||\mu||^a + F_{31}(t))$$

і в обох випадках $u(t, \cdot) \to \mu$, $t \to 0+$, *слабко, тобто для довільної функції* $\psi \in \Psi_0$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi(x)\overline{u(t,x)}dx \to \int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi(x)d\overline{\mu(x)}, \quad t \to 0+ .$$

Якщо додатково виконуються умови $\mathbf{A}_3$ *і (5), то цей розв'язок єдиний.*

Сформулюємо ще теорему, яка є у певному розумінні оберненою до теорем 2 і 3.

Теорема 4. *Нехай виконуються умови* $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_3$ *та (5) і нехай* f *задовольняє умови* $\mathbf{B}_1$ *та* $\mathbf{B}_{3p}$ *з деяким* $p \in [1, \infty]$. *Якщо* u *– розв'язок рівняння (1), який задовольняє умову*

$$\exists C > 0 \ \ \forall t \in (0, T] : \quad ||u(t, \cdot)||_p^{k(t),t} \le C, \tag{7}$$

то при $1 < p \le \infty$ *існує єдина функція* $\varphi \in \Phi_p^a$, *а при* $p = 1$ *– єдина узагальнена міра* $\mu \in M^a$ *такі, що розв'язок* u *зображується відповідно у вигляді (4) або (6).*

При доведенні теорем 1-4 використовуються методика з [5, 6] і результати з [2-4].

З теорем 2–4 випливає такий підсумковий результат.

Наслідок 1. *Розглянемо рівняння (1) з деякою функцією* f, *яка задовольняє умови* $\mathbf{B}_1$ *та* $\mathbf{B}_{3p}$, $1 < p \le \infty$. *Умова (7) є необхідною і достатньою для таких тверджень:*

1) Φ_p^a *є множиною початкових значень розв'язків рівняння (1);*

2) розв'язок u *рівняння (1) зображується у вигляді (4) з* $\varphi \in \Phi_p^a$ *і при* $1 < p < \infty$ $\lim\limits_{t\to 0} ||u(t, \cdot) - \varphi(\cdot)||_p^{s(t),0} = 0$, *а при* $p = \infty$ $u(t, \cdot) \to \varphi$, $t \to 0$, *слабко.*

Наслідок 2. *Нехай функція* f *у рівнянні (1) задовольняє умови* $\mathbf{B}_1$ *та* $\mathbf{B}_{31}$. *Тоді умова (7) з* $p = 1$ *є необхідною і достатньою для таких тверджень:*

1) M^a *є множиною початкових значень розв'язків рівняння (1);*

2) розв'язок u *рівняння (1) зображується у вигляді (6) з* $\mu \in M^a$ *і* $u(t, \cdot) \to \mu$, $t \to 0$, *слабко.*

3. Коректна розв'язність задачі Коші у гельдерових просторах

Для функцій $w : \Pi_{[0,T]} \to \mathbb{C}$ покладемо

$$||w||^{(\beta_1,\beta_2,\beta_3)} \equiv \sup_{(t,x)\in\Pi_{[0,T]}} |w(t,x)| + \sup_{\substack{\{(t,x),(t,x')\}\subset\Pi_{[0,T]}\\ x\neq x'}} \frac{|w(t,x)-w(t,x')|}{d[x,x';\beta_1,\beta_2,\beta_3]};$$

$$||w||^{(p_1+\beta_1,3p_2+\beta_2,5p_3+\beta_3)} \equiv ||w||^{(\beta_1,\beta_2,\beta_3)} + \sum_{l=1}^{3} \sum_{0<|m_l|\le p_l} ||\partial_{x_l}^{m_l} w||^{(\beta_1,\beta_2,\beta_3)},$$

де $\beta_1 \in (0,1)$, $\beta_2 \in (0,3)$, $\beta_3 \in (0,5)$; $p_1 \in \{0,1,2\}$, $p_2 \in \{0,1\}$, $p_3 \in \{0,1\}$;

$d[x,x';\beta_1,\beta_2,\beta_3] \equiv \left(\sum_{l=1}^{3}\sum_{j=1}^{n_l} |x_{lj}-x'_{lj}|^{2\beta_l/(2l-1)}\right)^{1/2}$ – спеціальна відстань між точками x і x' з $\mathbb{R}^n$.

Означимо такі простори функцій:

$C^{(\beta_1,\beta_2,\beta_3)}, (\beta_1 \in (0,1), \beta_2 \in (0,3), \beta_3 \in (0,5))$ – простір усіх функцій $w : \Pi_{[0,T]} \to \mathbb{C}$, для яких скінченною є норма $||w||^{(\beta_1,\beta_2,\beta_3)}$;

$C^{(p_1+\beta_1,3p_2+\beta_2,5p_3+\beta_3)}$ – простір функцій $w : \Pi_{[0,T]} \to \mathbb{C}$, які разом зі своїми похідними $\partial_{x_l}^{m_l} w$, $|m_l| \le p_l$, $l \in \{1,2,3\}$, належать до простору $C^{(\beta_1,\beta_2,\beta_3)}$, тобто є скінченною норма $||w||^{(p_1+\beta_1,3p_2+\beta_2,5p_3+\beta_3)}$;

$H^{(p_1+\alpha_1,3p_2+\alpha_2,5p_3+\alpha_3)}$, $p_1 \in \{0,1,2\}$, $p_2 \in \{0,1\}$, $p_3 \in \{0,1\}$ – простір функцій $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, які мають похідні вигляду $\partial_{x_l}^{m_l}$, $|m_l| \le p_l$, $l \in \{1,2,3\}$, і скінченну норму

$$|\varphi|^{(p_1+\alpha_1,3p_2+\alpha_2,5p_3+\alpha_3)} \equiv |\varphi|^{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)} + \sum_{l=1}^{3} \sum_{0<|m_l|\le p_l} |\partial_{x_l}^{m_l} \varphi|^{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)},$$

де

$$|\varphi|^{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)} \equiv \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |\varphi(x)| + \sup_{\substack{\{x,x'\}\subset\mathbb{R}^n\\ x\neq x'}} \frac{|\varphi(x)-\varphi(x')|}{d[x,x';\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]}.$$

Теорема 5. *Нехай коефіцієнти рівняння (1) задовольняють умови* $\mathbf{A}_1$ *і* $\mathbf{A}_2$, $f \in C^{(\alpha,\alpha+1,\alpha+3)}$, $\alpha \in (0,1)$, *а функція* $\varphi \in H^{(2+\alpha,3+\alpha,5+\alpha)}$ *така, що* $L\varphi \in C^{(\alpha,\alpha+1,\alpha+3)}$ *та*

$$\exists C > 0 : \quad ||L\varphi||^{(\alpha,\alpha+1,\alpha+3)} \le C|\varphi|^{(2+\alpha,3+\alpha,5+\alpha)}.$$

Тоді виразом (4) визначається єдиний розв'язок задачі Коші (1), (2) з $\tau = 0$, *який належить до простору* $C^{(2+\alpha,3+\alpha,5+\alpha)}$ *і для якого правильна оцінка*

$$||u||^{(2+\alpha,3+\alpha,5+\alpha)} \le C(||f||^{(\alpha,\alpha+1,\alpha+3)} + |\varphi|^{(2+\alpha,3+\alpha,5+\alpha)}).$$

Для доведення теореми 5 використано методику з [7].

Література

[1] Kolmogorov A.N., *Zufällige Bewegungen (Zur Theorie der Brownschen Bewegung)*, Ann. Math., 1934, vol.**35**, pp.116-117

[2] Дронь В.С., Івасишен С.Д. *Властивості фундаментальних розв'язків і теореми єдиності розв'язків задачі Коші для одного класу ультрапараболічних рівнянь.* // Укр. мат. журн. — 1998. — Т. **50**, №11. — С. 1482-1496.

[3] Eidelman S.D., Ivasyshen S.D., Malytska H.P. *A modified Levi method: development and application.*// Доп. НАН України. — 1998. — №5. — С. 14-19.

[4] Дронь В.С., Івасишен С.Д. *Структура та оцінки фундаментального розв'язку задачі Коші для одного класу вироджених параболічних рівнянь типу Колмогорова.* // Науковий вісник Чернівецького ун-ту. — 2001. — №111. — С. 41-50.

[5] Ивасишен С.Д., Андросова Л.Н. *Об интегральном представлении решений одного класса вырожденных параболических уравнений типа Колмогорова.* // Дифференциальные уравнения. — 1991. — Т. **27**, №3. — С. 479-487.

[6] Івасишен С.Д., Возняк О.Г. *Про фундаментальні розв'язки задачі Коші для одного класу вироджених параболічних рівнянь.* // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 1998. — Т. **41**, №2. — С. 13-19.

[7] Ивасишен С.Д., Эйдельман С.Д. $\overrightarrow{2b}$*-параболические системы.* // Труды семинара по функц. анализу. — 1968. — №1. — С. 3-175.

[8] Дронь В.С. *Про коректну розв'язність у вагових просторах Гельдера задачі Коші для одного класу вироджених параболічних рівнянь типу Колмогорова.* // Науковий вісник Чернівецького ун-ту. — 2000. — Т. **76**. — С. 32-41.

Відомості про авторів

В. С. Дронь,
С. Д. Івасишен

Чернівецький національний університет
ім. Ю. Федьковича, вул. Коцюбинського 2,
58002 Чернівці, Україна
E-Mail: `ivasyshmath.chnu.cv.ua`