Український математичний вісник
Том 1 **(2004)**, № 1, 47 – 60

УМВ

Проблема Стефана с поверхностным натяжением

М. А. Бородин

(*Представлена А.Е. Шишковым 23.06.2003*)

Аннотация. В работе изучается одна задача со свободной границей для параболического уравнения. Эта задача отличается от задачи Стефана одним из граничных условий, содержащим кривизну неизвестной границы. В случае двух пространственных переменных доказано существование глобального классического решения рассматриваемой задачи и дано описание свободной границы в терминах гладких функций.

2000 MSC. 35R35, 35B35, 35K05, 35K60.

1. Введение

Задача Стефана в классической постановке представляет собой математическую модель процесса распространения тепла в среде, находящейся в различных фазовых состояниях, например, жидком и твердом. В результате плавления или кристаллизации области, занятые жидкой и твердой фазами, будут изменяться. Поэтому будет изменяться поверхность, разделяющая эти фазы. Эта неизвестная поверхность называется свободной границей. Процесс распространения тепла в каждой из фаз описывается уравнением теплопроводности. Если обозначить через u^+ и u^- значения температур жидкой и твердой фаз на свободной границе, то законы сохранения массы и энергии приводят к двум условиям: условию Стефана, которое учитывает выделение тепла за счет скрытой теплоты плавления, и условию равенства температур u^+ и u^- температуре плавления, то есть

$$u^+ = u^- = 1, \tag{$*$}$$

Статья поступила в редакцию 15.05.2003
Грант ДФФД 01.07/00130
Ключевые слова и фразы. Задача со свободной границей, проблема Стефана, существование глобального решения.

ISSN 1810 – 3200.

где температура плавления предполагается равной единице. После этого из принципа максимума следует, что температура жидкой фазы больше единицы, а температура твердой фазы меньше единицы.

Попытки объяснить наличие зон переохлаждения при кристаллизации вещества приводит к поправке Гиббса-Томсона в условии $(*)$ на свободной границе, а именно,

$$u^+ = u^- = \sigma H, \tag{$**$}$$

где H - средняя кривизна поверхности кристаллизации, а σ - положительная константа, называемая поверхностным натяжением. Задачу с условием $(**)$ называют обычно проблемой Стефана с поверхностным натяжением. Условие с поверхностным натяжением делает невозможным применение принципа максимума и создает возможность для наличия зон переохлаждения. Трудность задачи при этом возрастает, так условие $(**)$ усиливает нелинейность задачи Стефана. Исследованию существования и регулярности решений посвящены работы [1]-[4]. В работе [1] доказано существование слабого решения для достаточно малого поверхностного натяжения, в [2]- существование глобального слабого решения в двухфазной задаче. Работа [3] посвящена исследованию существования локального по времени классического решения. В работе [4] приведен пример не существования классического решения.

Если процесс распространения тепла в жидкой и твердой фазах описывается эллиптическим уравнением, то такая математическая модель называется моделью Hele-Show. Исследованию вопросов существования, регулярности и единственности решения этой задачи посвящены работы [5]-[9].

В настоящей работе мы предлагаем метод, позволяющий доказывать существование глобального классического решения в двухфазной задаче Стефана с поверхностным натяжением для двух пространственных переменных.

Сформулируем проблему Стефана с поверхностным натяжением. Пусть

$$\begin{aligned} D &= \{x \in \mathbb{R}^2 : R_1 < |x| < R_2\}, \\ D_T &= D \times (0, T), \\ D_i &= \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| = R_i, i = 1, 2\}. \end{aligned}$$

Необходимо найти функцию $u(x,t)$, области Ω_T, G_T, удовлетворяющие следующим условиям:

$$\Delta u - a\frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad \text{в} \quad \Omega_T \cup G_T, \tag{1.1}$$

где $\Omega_T \cup \gamma_T \cup G_T = D_T$, $\gamma_T = \partial\Omega_T \cap D_T = \partial G_T \cap D_T$;

на известной границе ∂D_T

$$u(x,t) = g(x,t); \tag{1.2}$$

на неизвестной границе γ_T

$$u^+ = u^- = \sigma H, \quad \sum_{k=1}^{2} \left(\frac{\partial u^-}{\partial x_k} - \frac{\partial u^+}{\partial x_k} \right) cos(n,t) + \lambda cos(n,t) = 0, \tag{1.3}$$

где a, T, σ, λ - заданные положительные числа, σ- поверхностное натяжение, n- нормаль к поверхности γ_T, направленная в сторону возрастания функции $u(x,t)$, u^+, u^- - предельные значения функции $u(x,t)$ на γ_T, взятые со стороны Ω_T и G_T, H - кривизна кривой, полученной в сечении поверхности γ_T плоскостью $t = const$.

Начальные условия

$$u(x,0) = \psi(x), \quad \psi(x)\Big|_{\gamma_0} = \sigma H_0, \tag{1.4}$$

где γ_0 - простая замкнутая кривая, разделяющая область D на две области Ω_0 и G_0 так, что $D = \Omega_0 \cup \gamma_0 \cup G_0$, и ее уравнение задано в виде

$$\varrho = \varrho_0(\varphi), \;\; R_1 < \varrho_0(\varphi) < R_2, \;\; 0 \leq \varphi \leq 2\pi,$$

$$H_0 = \frac{\varrho_0^2(\varphi) + 2\varrho_0'^2(\varphi) - \varrho_0(\varphi)\varrho_0''(\varphi)}{\left[\varrho_0^2(\varphi) + \varrho_0'^2(\varphi)\right]^{3/2}}.$$

где (ϱ, φ) - полярные координаты.

Целью настоящей работы является доказательство существования глобального классического решения. Для этого используется идея метода, предложенного в работе [10]. Введем так называемую "эффективную"теплоемкость, включающую в себя скрытую теплоту фазового перехода, выделяющейся на поверхности раздела фаз. Это позволяет написать единое уравнение во всей области, причем условие на свободной границе является следствием этого уравнения ([11]-[12]). Действительно, предположим, что задача (1.1)-(1.4) имеет классическое решение и уравнение свободной границы задано в виде $\varrho = \varrho(\varphi,t)$, где $\varrho(\varphi,t)$ достаточно гладкая функция,

$$\Omega_T = \{(\varrho,\varphi,t) \in D_T : \varrho < \varrho(\varphi,t)\}, \;\; G_T = D_T \setminus \overline{\Omega}_T.$$

Умножим уравнение (1.1) на достаточно гладкую функцию $\eta(x,t)$, исчезающую на границе области D и при $t = T$, и проинтегрируем по частям. В результате получим

$$\int\limits_{D_T} [\nabla u \nabla \eta + a u_t \eta + \lambda \chi(\Omega_T)\eta_t] \ dxdt = 0,$$

где $\chi(\Omega_T)$- характеристическая функция области Ω_T. Для любого $\varepsilon > 0$ определим функцию $\chi_\varepsilon(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^1)$ следующим образом

$$\chi_\varepsilon(x) = 1 \ \ \forall x \leq 0, \ \ \chi_\varepsilon(x) = 0 \ \ \forall x \geq \varepsilon, \ \ \chi'_\varepsilon(x) \leq 0.$$

Обозначим через $u^\varepsilon(x,t)$ функцию, удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\int\limits_{D_T} \{\nabla u^\varepsilon \nabla \eta + a u^\varepsilon_t \eta + \lambda \chi_\varepsilon[\rho - \rho^\varepsilon(x,t)]\eta_t\} \ dxdt = 0.$$

где $\rho = \rho^\varepsilon(x,t)$ - уравнение свободной границы. Заметим,что в случае классической задачи Стефана $\chi_\varepsilon(\Omega_T) = \chi_\varepsilon(u^\varepsilon)$. Чтобы устранить зависимость аргумента характеристической функции от $\rho^\varepsilon(x,t)$ мы рассматриваем первое из условий (1.3) как дифференциальное уравнение относительно функции $\rho(x,t)$

$$\varrho''(\varphi,t) - \varrho(\varphi,t) = 2\frac{\varrho'^2\varphi,t}{\varrho(\varphi,t)} - \frac{1}{\sigma}\varrho^2(\varphi,t)u[\varrho(\varphi,t),\varphi,t]\left[1 + \frac{\varrho'^2(\varphi,t)}{\varrho^2(\varphi,t)}\right]^{3/2}.$$

Обратим дифференциальный оператор при дополнительном условии

$$\varrho(0,t) = \varrho(2\pi,t), \ \ \varrho'(0,t) = \varrho'(2\pi,t).$$

Это даст

$$\varrho(\varphi,t) = A\{\varphi, \varrho(\varphi,t), \varrho'(\varphi,t), u[\varrho(\varphi,t),\varphi,t]\} \equiv$$

$$\equiv \int\limits_0^\varphi f(\tau,t) sh(\varphi - \tau)d\tau - \frac{1}{2sh\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(\tau,t) ch(\pi + \varphi - \tau)d\tau,$$

где

$$f(\tau,t) = 2\frac{\varrho'^2(\varphi,t)}{\varrho(\varphi,t)} - \frac{1}{\sigma}\varrho^2(\varphi,t)u[\varrho(\varphi,t),\varphi,t]\left[1 + \frac{\varrho'^2(\varphi,t)}{\varrho^2(\varphi,t)}\right]^{3/2}.$$

После этого тождество (1.5) можно переписать в виде

$$\int\limits_{D_T} \{\nabla u^\varepsilon \nabla \eta + a u^\varepsilon_t \eta + \lambda \chi_\varepsilon[\varrho - A^\varepsilon(\varphi,t)]\eta_t\} \ dxdt = 0,$$

где обозначено через

$$A^{\varepsilon}(\varphi,t)=A\{\varphi,\varrho^{\varepsilon}(\varphi,t),\varrho^{\varepsilon\prime}(\varphi,t),u^{\varepsilon}[\varrho^{\varepsilon}(\varphi,t),\varphi,t]\}$$

Интегральное тождество будет выполнено, если функции $u^{\varepsilon}(\varrho,\varphi,t)$, $\varrho^{\varepsilon}(\varphi,t)$ удовлетворяют уравнению

$$\Delta u^{\varepsilon}-a\frac{\partial u^{\varepsilon}}{\partial t}=-\lambda\frac{\partial\chi_{\varepsilon}[\varrho-A^{\varepsilon}(\varphi,t)]}{\partial t}.$$

Так как в дальнейшем параметр ε будет устремлен к нулю, то предыдущее уравнение можно изменить следующим образом

$$\Delta u^{\varepsilon}-a\frac{\partial u^{\varepsilon}}{\partial t}=-\lambda\frac{\partial\chi_{\varepsilon}[\varrho+\varepsilon^{s}u^{\varepsilon}-A^{\varepsilon}(\varphi,t)]}{\partial t},\quad s>0,$$

сохранив за решением прежнее обозначение. Далее задача дискретизируется по времени и в правую часть уравнения добавляется некоторое регуляризирующее слагаемое, которое исчезнет после предельного перехода. Так строится аппроксимирующая задача. После этого в работе доказана разрешимость этой задачи, получены равномерные оценки и совершен предельный переход.

Главный результат сформулирован в теореме 3.3, в которой утверждается существование глобального классического решения при некоторых ограничениях на начальные данные задачи.

2. Построение аппроксимирующих задач. Априорные оценки

Рассечем цилиндр D_T плоскостями $t=kh, k=1,2,...,N, T=Nh$. и сформулируем аппроксимирующую задачу: требуется найти семейства функций $\{u_k^{\varepsilon}(x,h)\}$, $\{F_k^{\varepsilon}(x,h)\}$, $\{\varrho_k^{\varepsilon}(\varphi,h)\}$, удовлетворяющих следующим условиям:

$$\Delta u_k^{\varepsilon}-a\frac{u_k^{\varepsilon}-u_{k-1}^{\varepsilon}}{h}=-\lambda\frac{V_k^{\varepsilon}-V_0^{\varepsilon}}{h}+a\frac{F_{k-1}^{\varepsilon}}{h},\quad \text{в}\quad D, \tag{2.1}$$

$$u_k^{\varepsilon}(x,h)=g(x,kh)=g_k(x)\quad\text{на }\partial D,\ \ u_0^{\varepsilon}(x)=\psi(x)\ \text{ в } D, \tag{2.2}$$

$$\Delta F_k^{\varepsilon}-a\frac{F_k^{\varepsilon}}{h}=-\lambda\frac{V_k^{\varepsilon}-V_0^{\varepsilon}}{h},\quad\text{в}\quad D, \tag{2.3}$$

$$F_k^{\varepsilon}(x)=0\quad\text{на }\partial D,\ \ F_0^{\varepsilon}(x)=0\ \ \text{в } D,\ \ V_0^{\varepsilon}\equiv V_{-1}^{\varepsilon}, \tag{2.4}$$

$$\varrho_k^{\varepsilon}(\varphi)+\varepsilon^{s}u_k^{\varepsilon}[\varrho_k^{\varepsilon}(\varphi),\varphi,h]+h^{\sigma}=A_{k-1}^{\varepsilon}(\varphi,h)\equiv \tag{2.5}$$

$$\int\limits_0^{\varphi}f_{k-1}^{\varepsilon}(\tau,h)sh(\varphi-\tau)d\tau-\frac{1}{2sh\pi}\int\limits_0^{2\pi}f_{k-1}^{\varepsilon}(\tau,h)ch(\pi+\varphi-\tau)d\tau,$$

где обозначено через $u_k^\varepsilon(\varrho, \varphi, h) = u_k^\varepsilon(\varrho\cos\varphi, \varrho\sin\varphi, h)$,

$$f_k^\varepsilon(\varphi, h) = 2\frac{\varrho_k^{\varepsilon\prime 2}(\varphi, h)}{\varrho_k^\varepsilon(\varphi, h)} - \frac{1}{\sigma}\varrho_k^{\varepsilon 2}(\varphi, h)u_k^\varepsilon[\varrho_k^\varepsilon(\varphi, h), \varphi, h]\left[1 + \frac{\varrho_k^{\varepsilon\prime 2}(\varphi, h)}{\varrho_k^{\varepsilon 2}(\varphi, h)}\right]^{3/2},$$

$$V_k^\varepsilon = \chi_\varepsilon[\varrho + \varepsilon^s u_k^\varepsilon - A_{k-1}^\varepsilon(\varphi, h)] -$$

$$-\delta\int\limits_{R_1}^{\varrho} \tau^2\chi_\varepsilon'[\tau + \varepsilon^s u_k^\varepsilon(\tau, \varphi, h) - A_{k-1}^\varepsilon(\varphi, h)]d\tau,$$

где $\delta > 0$. Всюду в дальнейшем будем обозначать через $b = \frac{1}{\sigma}$. Предположим, что задача (2.1)-(2.5) разрешима. Обозначим через

$$w_k^\varepsilon = u_k^\varepsilon(\varrho, \varphi, h) - F_k^\varepsilon(\varrho, \varphi, h). \tag{2.6}$$

Вычтем (2.3) из (2.1) и учтем это обозначение. В результате получим

$$\Delta w_k^\varepsilon - a\frac{w_k^\varepsilon - w_{k-1}^\varepsilon}{h} = 0 \ \text{ в } D \tag{2.7}$$

$$w_k^\varepsilon = g_k(\varrho, \varphi, h) \quad \text{на } \partial D, \ \ w_0^\varepsilon = \psi(\varrho, \varphi) \ \text{ в } D. \tag{2.8}$$

Тогда, также как в [10], имеет место

Теорема 2.1. *Пусть выполнены следующие условия*

$$\psi(\varrho, \varphi) \in C^{2+\alpha}(\overline{D}), \ g_k(\varrho, \varphi) \in C^{2+\alpha}[0, 2\pi],$$

$$\|g_k(\varrho, \varphi, h)\|_{C^{2+\alpha}(\overline{D})} + \left\|\frac{g_k(\varrho, \varphi, h) - g_{k-1}(\varrho, \varphi, h)}{h}\right\|_{C^\alpha(\overline{D})} \le c,$$

для функций $\psi(\varrho, \varphi)$ и $g_k(\varrho, \varphi)$ на ∂D при $k = 0$ выполнены условия согласования. Тогда задача (2.7)-(2.8) имеет единственное решение и

$$\|w_k^\varepsilon(\varrho, \varphi, h)\|_{C^{2+\alpha}(\overline{D})} + \left\|\frac{w_k^\varepsilon(\varrho, \varphi, h) - w_{k-1}^\varepsilon(\varrho, \varphi, h)}{h}\right\|_{C^\alpha(\overline{D})} \le M,$$

где константа M не зависит от k, h.

Изучим теперь свойства семейства функций $\{F_k^\varepsilon\}$. Из (2.3) и (2.4), используя принцип максимума, получим

$$\max_{x\in\overline{D}, k\le N} |F_k^\varepsilon| \le \frac{\lambda}{a}\max_{x\in\overline{D}, k\le N} V_k^\varepsilon = \lambda_1(\varepsilon) \le \frac{c}{\varepsilon}.$$

Заметим, что $\chi'_\varepsilon[\varrho + \varepsilon^s u_k^\varepsilon(\varrho,\varphi) - A_{k-1}^\varepsilon(\varphi,h)]$ отлична от нуля, если

$$0 < \varrho + \varepsilon^s u_k^\varepsilon(\varrho,\varphi) - A_{k-1}^\varepsilon(\varphi) < \varepsilon.$$

Функции F_k^ε в области D удовлетворяют уравнению (2.3). Обозначим правую часть этого уравнения через $\frac{B_k^\varepsilon}{h}$ и продифференцируем по одной из переменных x_i. В результате получим

$$\Delta \frac{\partial F_k^\varepsilon}{\partial x_i} - \frac{a}{h}\frac{\partial F_k^\varepsilon}{\partial x_i} = \frac{1}{h}\frac{\partial B_k^\varepsilon}{\partial x_i}.$$

Построим интегральное представление для $\frac{\partial F_k^\varepsilon}{\partial x_i}$. Пусть $K_R(x_0)$ - круг с центром в точке x_0 и $K_R(x_0) \subset D$. Обозначим через

$$E(|x-x_0|) = K_0\left(\sqrt{\frac{a}{h}}|x-x_0|\right) - K_0\left(\sqrt{\frac{a}{h}}R\right)\frac{I_0\left(\sqrt{\frac{a}{h}}|x-x_0|\right)}{I_0\left(\sqrt{\frac{a}{h}}R\right)},$$

где $K_0(x)$ - функция Макдональда, $I_0(x)$ - функция Бесселя нулевого порядка. Тогда имеет место интегральное представление

$$\frac{\partial F_k^\varepsilon}{\partial x_i}(x_0) = -\frac{1}{2\pi}\oint\limits_{\partial K_R(x_0)} \frac{\partial F_k^\varepsilon}{\partial y_i}\frac{\partial E}{\partial n}ds_y + \int\limits_{K_R(x_0)} \frac{\partial B_k^\varepsilon}{\partial y_i}\frac{E(|y-x_0|)}{h}dy.$$

где n - внешняя нормаль. Как известно,

$$K_\nu(x) \le c\sqrt{\frac{\pi}{2x}}e^{-x} \quad \nu = 1,2,..., \quad \text{при} x \to +\infty.$$

Поэтому если предположить, что $R \ge h^\sigma, \sigma \in (0,1/2)$ и воспользоваться очевидным неравенством

$$x^m e^{-x} \le m^m e^{-m} \; \forall x \ge 0, \; \forall m > 0,$$

то получим

$$\left|\frac{\partial F_k^\varepsilon}{\partial x_i}(x_0)\right| \le c(m)h^{m_1}\max_{\overline{D}}|F_k^\varepsilon| + c\max_{\overline{K_R(x_0)}}\left|\frac{\partial B_k^\varepsilon}{\partial y_i}\right|,$$

$$m_1 = (1/2-\sigma)m - \sigma/2 - 1/4 > 0.$$

Если $\frac{\partial B_k^\varepsilon}{\partial y_i}(x) = 0$ всюду в $K_R(x_0)$, то последнее слагаемое в правой части будет отсутствовать. Такие же оценки могут быть получены для пространственных производных второго порядка и для разностных производных $\frac{F_k^\varepsilon - F_{k-1}^\varepsilon}{h}$. Обозначим через

$$\Omega_k^\varepsilon = \{(\varrho,\varphi) \in D : 0 > \varepsilon^s u_k^\varepsilon + \varrho - A_{k-1}^\varepsilon\}, \; \Omega_{k,k-1}^\varepsilon = \Omega_k^\varepsilon \cup \Omega_{k-1}^\varepsilon.$$

Теорема 2.2. *Пусть задача (2.1)-(2.5) разрешима. Тогда*

$$\forall(\varrho_0,\varphi_0)\in D : dist\{(\varrho_0,\varphi_0),\partial D\}\geq h^\sigma$$

имеют место оценки

$$\max_{(\varrho,\varphi)\in\Omega^\varepsilon_{k,0}}\left|\frac{\partial^l F^\varepsilon_k}{\partial\varrho^{l_1}\partial\varphi^{l_2}}\right|\leq c\max_{(\varrho,\varphi)\in\overline{D}}|F^\varepsilon_k|h^{m_1},$$

если $dist\{(\varrho,\varphi),\partial\Omega^\varepsilon_{k,0})\}\geq ch^\sigma$,

$$\max_{(\varrho,\varphi)\in\Omega^\varepsilon_{k,k-1}}\left|\frac{F^\varepsilon_k-F^\varepsilon_{k-1}}{h}\right|\leq c\max_{(\varrho,\varphi)\in\overline{D}}|F^\varepsilon_k|^{m_1},$$

если $dist\{(\varrho,\varphi),\partial\Omega^\varepsilon_{k,k-1}\}\geq ch^\sigma$, *где* $0<\sigma<1/2$, $l_1+l_2=l\leq 2$, *константы* $c,m_1>0$ *не зависят от* k,h,ε.

Преобразуем уравнение (2.1), учитывая (2.6), к виду

$$\Delta u^\varepsilon_k - a\frac{u^\varepsilon_k}{h} = -a\frac{w^\varepsilon_{k-1}}{h}-\lambda\frac{V^\varepsilon_k-V^\varepsilon_0}{h}$$

и продифференцируем по одной из переменных. Применяя затем принцип максимума к функциям

$$\left(\varepsilon^s\frac{\partial u^\varepsilon_k}{\partial\varrho}+1-\delta\varrho^2\right),\quad \left(\varepsilon^s u^\varepsilon_k+\varrho-A^\varepsilon_{k-1}(\varphi)\right)',$$

получим

Теорема 2.3. *Пусть выполнены условия теоремы 2.1, задача (2.1) - (2.5) разрешима, причем* $u^\varepsilon_k(\varrho,\varphi,h)\in C^{3+\alpha}(\overline{D})$. *Тогда, если* $R_2<3/2R_1$, *то для достаточного малого* ε *всюду в* $\overline{D}$

$$\varepsilon^s\frac{\partial u^\varepsilon_k(\varrho,\varphi)}{\partial\varrho}+1-\delta\varrho^2\geq 0.$$

где $0<s<1,\ 0<\delta R_2^2<1$,

$$\max_{(\varrho,\varphi)\in\overline{D}^\varepsilon_0}\left|\varepsilon^s\frac{\partial u^\varepsilon_k}{\partial\varphi}\right|\leq c_1\max_{[0,2\pi]}|(A^\varepsilon_k)'_\varphi|,\quad \max_{(\varrho,\varphi)\in\overline{D}^\varepsilon_0}\left|\varepsilon^s\frac{\partial u^\varepsilon_k}{\partial\varrho}\right|\leq c_2,$$

где константы c_0,c_1 *не зависят от* k,h,ε.

Из этой теоремы получим

Следствие 2.3.1. *Пусть выполнены условия теоремы 2.3. Тогда уравнения линий уровня*

$$\varepsilon^s u_k^\varepsilon + \varrho - A_{k-1}^\varepsilon(\varphi) = 0, \ \ \varepsilon^s u_k^\varepsilon + \varrho - A_{k-1}^\varepsilon(\varphi) = \varepsilon$$

могут быть заданы, соответственно, в виде

$$\varrho = r_k^\varepsilon(\varphi, h), \ \ \varrho = s_k^\varepsilon(\varphi, h),$$

причем имеют место оценки

$$0 \le s_k^\varepsilon(\varphi, h) - r_k^\varepsilon(\varphi, h) \le \frac{\varepsilon}{\delta R_1^2}, \ \max_{\overline{D},\, k\le N} |F_k^\varepsilon| + \max_{\overline{D},\, k\le N} |u_k^\varepsilon| \le c, \tag{2.9}$$

где константа c не зависит от h, k, ε.

Пусть $\omega_0^\varepsilon = \{(\varrho,\varphi) : 0 < \varepsilon^s u_0^\varepsilon + \varrho - A_0^\varepsilon(\varphi) < \varepsilon\}$, $D_0^\varepsilon = D \setminus \omega_0^\varepsilon$.

Следствие 2.3.2. *Пусть выполнены условия предыдущей теоремы. Тогда уравнение линии уровня*

$$\varepsilon^s u_k^\varepsilon + \varrho - A_{k-1}^\varepsilon(\varphi) = -h^\sigma$$

может быть задано в виде $\varrho = \varrho_k^\varepsilon(\varphi, h)$ и, для любых точек

$$P_1(\varrho_k^\varepsilon(\varphi_1, h), \varphi_1), \ P_2(r_k^\varepsilon(\varphi_2, h), \varphi_2),$$

принадлежащих D_0^ε и $dist\{P_i, \partial D\} \ge h^\sigma$, имеет место оценка

$$0 < c_1 h^\sigma \le dist(P_1, P_2) \le c_2 \frac{h^\sigma}{\delta}$$

а в области $\Omega_{k,\sigma}^\varepsilon = \{(\varrho,\varphi) : \varepsilon^s u_k^\varepsilon + \varrho - A_{k-1}^\varepsilon(\varphi) < -h^\sigma\}$ имеет место оценка

$$\|u_k^\varepsilon\|_{C^{2+\alpha}(\overline{\Omega}_{k,\sigma}^\varepsilon)} + \|\varrho_k^\varepsilon\|_{C^{2+\alpha}[0,2\pi]} \le c_3,$$

где константы c_1, c_2, c_3 не зависят от k, h, ε.

3. Разрешимость аппроксимационной задачи. Предельный переход

~~Функции~~ $\cancel{\{u_k^\varepsilon(\varrho,\varphi,h)\}}$ ~~в силу (2.9) равномерно ограничены. Обозначим~~ через

$$M_1 = \max_{\overline{D}, 1\le k\le N, \varepsilon>0, h>0} |\varrho_k^{\varepsilon 2}(\varphi, h) u_k^\varepsilon(\varrho, \varphi, h)|,$$

$$m_1 = \min_{\overline{D}, 1\le k\le N, \varepsilon>0, h>0} |\varrho_k^{\varepsilon 2}(\varphi, h) u_k^\varepsilon(\varrho, \varphi, h)|.$$

Функции A^{ε}_{k-1} являются периодическими решениями на $[0, 2\pi]$ уравнения

$$\frac{\partial}{\partial\varphi^2} A^{\varepsilon}_{k-1} - A^{\varepsilon}_{k-1} = f^{\varepsilon}_{k-1}.$$

Используя принцип максимума, получим

$$\max_{[0,2\pi],1\le k\le N} A^{\varepsilon}_{k-1}(\varphi, h) \le bM_1 \left[(1 + R_1^{-2} \max_{[0,2\pi],1\le k\le N} \left| \frac{\partial \varrho^{\varepsilon}_k}{\partial\varphi} \right|^2 \right]^{3/2},$$

$$\min_{[0,2\pi],1\le k\le N} A^{\varepsilon}_{k-1}(\varphi, h) \ge bm_1 - 2R_1^{-2} \max_{[0,2\pi],1\le k\le N} \left| \frac{\partial \varrho^{\varepsilon}_k}{\partial\varphi} \right|^2.$$

Пусть константа M такова, что

$$R_1 < q_1 R_1 \le bm_1 - 2R_1^{-2} M^1 \le$$
$$\le bM_1 (1 + R_1^{-2} M^2)^{3/2} \le q_2 R_2 < R_2, \;\; q_2 R_2 - q_1 R_1 > 0, \qquad (3.1)$$

где $q_1 > 1, 0 < q_2 < 1$- произвольные действительные числа.

Если неравенства (3.1) выполнены, то $\forall k = 1, 2, ..., N$, $\forall \varphi \in [0, 2\pi]$ имеет место

$$q_1 R_1 \le A^{\varepsilon}_k \le q_2 R_2, \quad \left| \frac{\partial A^{\varepsilon}_k}{\partial\varphi} \right| \le 2\pi(q_2 R_2 - q_1 R_1).$$

Поэтому для достаточно малых h и ε из того, что

$$q_1 R_1 \le A^{\varepsilon}_{k-1}(\varphi, h) = \varepsilon^s u^{\varepsilon}_k[\varrho^{\varepsilon}_k(\varphi, h), \varphi, h] + \varrho^{\varepsilon}_k(\varphi, h) + h^{\sigma} \le q_2 R_2,$$

$$\left| \frac{\partial}{\partial\varphi} \{\varepsilon^s u^{\varepsilon}_k[\varrho^{\varepsilon}_k(\varphi, h), \varphi, h] + \varrho^{\varepsilon}_k(\varphi, h) + h^{\sigma}\} \right| =$$
$$= \left| \frac{\partial A^{\varepsilon}_{k-1}}{\partial\varphi} \right| \le 2\pi(q_2 R_2 - q_1 R_1) < 2\pi(R_2 - R_1) \le M,$$

следует

$$R_1 \le \varrho^{\varepsilon}_k(\varphi, h) \le R_2, \quad \left| \frac{\partial \varrho^{\varepsilon}_k}{\partial\varrho} \right| \le M \;\; \forall k = 1, 2, ..., N, \;\; \forall \varphi \in [0, 2\pi].$$

Теорема 3.1. *Пусть выполнены условия теоремы 2.1, оценка (3.1) и*

$$R_1 \le \varrho^{\varepsilon}_0(\varphi, h) \le R_2, \;\; \max_{[0,2\pi]} \left| \frac{\partial \varrho^{\varepsilon}_0(\varphi, h)}{\partial\varphi} \right| \le M. \qquad (3.2)$$

Тогда если $R_2 < 3/2R_1$, $2\pi(R_2 - R_1) < M$, то $\forall h > 0$, $\forall \varepsilon > 0$ существует решение задачи (2.1)-(2.5), причем

$$u^{\varepsilon}_k(x, h), \;\; F^{\varepsilon}_k(x, h) \in C^{2+\alpha}(\overline{D}), \;\; \textit{функции } \varrho^{\varepsilon}_k(\varphi, h) \in C^2[0, 2\pi]$$

и удовлетворяют (3.2).

Докажем теперь разрешимость задачи (2.1)–(2.5). Эта задача может быть изучена последовательно, шаг за шагом, начиная с $k = 1$. Функции $\varrho_0^\varepsilon(\varphi), \psi(\varrho, \varphi)$ нам заданы, а $F_0^\varepsilon(\varrho, \varphi) \equiv 0$. Подставим указанные функции в правую часть уравнения (2.1). Для функции $u_1^\varepsilon(\varrho, \varphi, h)$ получим задачу Дирихле для квазилинейного эллиптического уравнения второго порядка. Разрешимость подобной задачи в пространствах $C^{2+\alpha}(\overline{D})$ хорошо известна. Найденную функцию $u_1^\varepsilon(\varrho, \varphi, h)$, а также функции $\varrho_0^\varepsilon(\varphi), \psi(\varrho, \varphi)$ подставим в уравнение (2.5). Разрешимость этого уравнения относительно функции $\varrho_1^\varepsilon(\varphi, h)$ следует из теории о неявных функциях, учитывая результаты теоремы 2.3. После этого в правую часть уравнения (2.3) при $k = 1$ подставляем найденные функции и находим функцию $F_1^\varepsilon(\varrho, \varphi, h)$, решив соответствующую линейную краевую задачу. Затем полагаем $k = 2$ в уравнении (2.1), подставляем в правую часть уравнения найденные функции $\{u_1^\varepsilon(\varrho, \varphi, h),\ F_1^\varepsilon(\varrho, \varphi, h),\ \varrho_1^\varepsilon(\varphi, h)\}$ и так далее.

Оценим разностные производные $\{\frac{u_k^\varepsilon - u_{k-1}^\varepsilon}{h}\}$. Преобразуем уравнение (2.1) к виду

$$\Delta(u_k^\varepsilon - u_{k-1}^\varepsilon) - a\frac{u_k^\varepsilon - u_{k-1}^\varepsilon}{h} = -a\frac{w_k^\varepsilon - w_{k-1}^\varepsilon}{h} - \lambda\frac{V_k^\varepsilon - V_{k-1}^\varepsilon}{h}.$$

Если функции $\frac{u_k^\varepsilon - u_{k-1}^\varepsilon}{h}$ принимают максимальное значение во внутренней точке области, то из уравнения следует

$$u_k^\varepsilon - u_{k-1}^\varepsilon \le \max_{\overline{D}, 1\le k\le N} |w_k^\varepsilon - w_{k-1}^\varepsilon| + c(\delta)\max_{\overline{D}, 1\le k\le N} |A_k^\varepsilon - A_{k-1}^\varepsilon|.$$

Из (2.5) следует

$$\max_{\overline{D}, 1\le k\le N} |A_k^\varepsilon - A_{k-1}^\varepsilon| \le 2\cosh 2\pi \max_{\overline{D}, 1\le k\le N} |f_k^\varepsilon - f_{k-1}^\varepsilon| \le$$

$$\le c_1 \max_{\overline{D}, 1\le k\le N} |\varrho_k^\varepsilon - \varrho_{k-1}^\varepsilon| + \le c_2 \max_{\overline{D}, 1\le k\le N} |\varrho_k^{\varepsilon\prime} - \varrho_{k-1}^{\varepsilon\prime}| + c_3 h,$$

где через c_1, c_2, c_3 обозначены следующие величины

$$c_1 = 2\frac{M^2}{R_1^2} + bc_4\left(1 + \frac{M^2}{R_1^2}\right)^{3/2},$$

$$c_2 = 2\frac{M}{R_1} + bc_5\left(1 + \frac{M^2}{R_1^2}\right)^{1/2}\frac{M}{R_1},\ c_3 = bc_6\left(1 + \frac{M^2}{R_1^2}\right)^{3/2},$$

константы c_4, c_5, c_6 не зависят от b, M, k, h, ε. После этого, используя уравнение (2.4), можно доказать утверждение

Теорема 3.2. *Пусть выполнены условия теоремы 3.1 и* $c_1 < 1$, $c_2 < 1$. *Тогда найдется такая константа* c, *которая не зависит от* k, h, ε, *что имеет место оценка*

$$\max_{\overline{D},1\le k\le N}|u_k^\varepsilon - u_{k-1}^\varepsilon| + \max_{\overline{D},1\le k\le N}|\varrho_k^\varepsilon(\varphi,h) - \varrho_{k-1}^\varepsilon(\varphi,h)| +$$

$$+\max_{\overline{D},1\le k\le N}|\varrho_k^{\varepsilon\prime}(\varphi,h) - \varrho_{k-1}^{\varepsilon\prime}(\varphi,h)| \le ch.$$

Представим уравнение (2.1) в виде

$$\Delta u_k^\varepsilon - a\frac{u_k^\varepsilon - u_{k-1}^\varepsilon}{h} = -\lambda\frac{V_k^\varepsilon - V_{k-1}^\varepsilon}{h} + \Delta F_{k-1}^\varepsilon.$$

Пусть $\eta(x,t) \in C^{2,1}(\overline{D_T})$, равна нулю на $\partial D \times (0,T)$ вместе со своими производными первого порядка. Умножим оба уравнения на $h\eta(x,kh) = \eta_k(x)$, проинтегрируем по области D_T и просуммируем по k от 1 до N. В результате получим

$$h\sum_{k=1}^N\int_D\left\{\nabla u_k^\varepsilon\nabla\eta_k + \frac{u_k^\varepsilon - u_{k-1}^\varepsilon}{h}\eta_k + \lambda V_k^\varepsilon\frac{\eta_{k+1}-\eta_k}{h}\right\}dx+$$

$$+\lambda\int_D V_0^\varepsilon\eta_1 dx + h\sum_{k=1}^N\int_D\frac{F_k^\varepsilon - F_{k-1}^\varepsilon}{h}\psi_{k+1}dx = 0,\ \psi_k = h\sum_{l=k}^N\Delta\eta_l.$$

Обозначим через $\{u(x,t,h,\varepsilon\}$, $\varrho(\varphi,t,h,\varepsilon)$ - кусочно-линейные интерполяции функций $u_k^\varepsilon(x,h)$, $\varrho_k^\varepsilon(\varphi,h)$, соответственно. Пусть

$$u(x,t) = \lim_{h,\varepsilon\to 0}u(x,t,h,\varepsilon),\ \ \varrho(\varphi,t) = \lim_{h,\varepsilon\to 0}\varrho(\varphi,t,h,\varepsilon).$$

Используя полученные результаты, совершим предельный переход в интегральном тождестве при $h,\varepsilon \to 0$. После этого устремим δ к нулю. В результате получим

Теорема 3.3. *Пусть выполнены условия теоремы 2.1, функции* $g(x,t), \psi(x))$ *положительны, уравнение* γ_0 *задано в виде*

$$\varrho = \varrho_0(\varphi) \in C^{2+\alpha},\ \alpha \in (0,1),\ R_1 < \varrho_0(\varphi) < R_2,\ \ 0 \le \varphi \le 2\pi.$$

Тогда если имеет место (3.1) и

$$R_2 < \frac{3}{2}R_1,\ \ 2\pi(R_2 - R_1) < M,\ 2\frac{M}{R_1} + bc\left(1 + \frac{M^2}{R_1^2}\right)^{3/2} < 1,$$

где $M = \max\limits_{[0,2\pi],1\le k\le N}\left|\frac{\partial\varrho_0}{\partial\varphi}\right|$, *константа* c *не зависит от* b *и* M, *то* $\forall T > 0$ *задача (1.1)-(1.4) разрешима, причем*

$$u(x,t) \in C(\overline{D_T}) \cap \{H^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{\Omega_T} \setminus \gamma_0) \times H^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{G_T} \setminus \gamma_0)\},$$

свободная граница представляет собой замкнутую кривую, задаваемую уравнением $\varrho = \varrho(\varphi, t)$, *где* (ϱ, φ) *- полярные координаты, причем*

$$\varrho(x,t) \in H^{2+\alpha,1+\alpha/2}\{[0,2\pi] \times (0,T)\}.$$

Литература

[1] Friedman A., Reitich F. *The Stefan problem with small surface tension.* //Trans. Amer. Matm. Soc., **328** (1991), pp.465-515.

[2] Luckhaus S. *Solutions for the two-phase problem with the Gibbs-Thomson law for melting temperature.*// Europ. J. Appl. Math. **1** (1990), pp.101-111.

[3] Радкевич Е.В. *Поправка Гиббса-Томсона и условия существования классического решения модифицированной задачи Стефана.* //ДАН СССР. 1991. — Т. 316, №6. — С. 1311-1315.

[4] Meirmaqnov A. M. *The Stefan problem with surface tension in the three dimensional case with spherical symmetry: non-existence of the classical solution.*// Europ. J. Appl. Math., **5** (1994), pp.1-20.

[5] Chen X., Hong J., Yi F. *Existence, uniqueness, and regularity of classical solutions of the Millins-Sekerka problem.*// Comm. Partial Differential Equations, **21** (1996), pp.1705-1727.

[6] Escher J., Simonett G. *Analiticity of the interface in free boundary problem.*// Math. Ann., **305** (1996), pp. 439-459.

[7] Escher J., Simonett G. *Classical solutions to Hele-Show models with surface tension.*//Adv. Differential Equations, **2** (1997), pp. 619-642.

[8] Escher J., Simonett G. *A center manifold analysis for the Mullins-Sekerka model.*// J. Differential Equations, **143** (1998), pp. 267-292.

[9] Bazaliy B. V. *The Stefan problem for the Laplace eguation with regard for the curvature of the free boundary.* // Ukr. Math. J., vol. **49**, No.10, 1997, pp. 1299-1315.

[10] Borodin M.A. *Existence of the clobal classical solution for a two-phase Stefan problem.* // SIAM J. Math. Anal., vol. **30**, No. 6(1999), pp. 1264-1281.

[11] Олейник О. А. *Об одном методе решения общей задачи Стефана.* // Докл. АН. СССР. — 1960. — **135**. — 5. — С. 1054-1057.

[12] Каменомостская С. Л. *О задаче Стефана.*// Матем. сб. — 1961. — **53**. — 4. — С. 489-514.

Сведения об авторах

М. А. Бородин Донецкий национальный университет, кафедра математической физики,
ул. Университетская 24, 83055, Донецк, Украина
E-Mail: borodin@dongu.donetsk.ua