Український математичний вісник
Том 2 **(2005)**, № 4, 550 – 582

Узагальнена теорія де Рама–Ходжа–Скрипника: диференціально-геометричні і спектральні аспекти та деякі застосування

Ярема А. Прикарпатський, Анатолій М. Самойленко, Анатолій К. Прикарпатський

Анотація. Вивчаються диференціально-геометричні та топологічні структури операторів трансмутації Дельсарта та асоційовані з ними рівняння типу Гельфанда–Левітана–Марченка за допомогою диференціальних узагальнених комплексів де Рама–Ходжа–Скрипника. Встановлено відповідності між спектральною теорією та спеціальними властивостями конгруентності типу Березанського для операторів, перестановочних за Дельсартом. Наведено деякі застосування до спеціальних багатовимірних диференціальних операторів, включаючи тривимірний оператор Лапласа, двовимірний класичний оператор Дірака і його багатовимірне афінне розширення, асоційоване з самодуальними рівняннями Янга–Мілса. Обговорюються солітонні розв'язки асоційованої множини динамічних систем.

2000 MSC. 34A30, 34B05, 34B15.

Ключові слова та фрази. Оператори трансмутації Дельсарта, диференціальний комплекс де Рама–Ходжа, перетворення Дарбу, рівняння Гельфанда–Левітана–Марченка, оператор Дірака, оператор Лапласа, солітоноподібні розв'язки.

Автори присвячують свою працю пам'яті видатного українського математика академіка Ігоря В. Скрипника, чиє серце передчасно перестало битись 2 лютого 2005 року і чий унікальний талант постійно надихав багатьох учнів, колег та послідовників і завжди буде надійним супутником на шляху їх творчих звершень.

1. Аспекти узагальненої теорії де Рама–Ходжа та асоційовані бінарні перетворення типу Дельсарта–Дарбу

Диференціально-геометричний аналіз перетворень типу Дельсарта–Дарбу розвивається для диференціальних операторних виразів, що діють в функціональному просторі $\mathcal{H} = L_2(\mathrm{T};H)$, де $\mathrm{T} = \mathbb{R}^2$ і

Стаття надійшла в редакцію 22.02.2005

ISSN 1810 – 3200.

$H := L_2(\mathbb{R}^2;\mathbb{C}^2)$, і які, як виявилось, мають глибокий зв'язок з класичною теорією де Рама–Ходжа–Скрипника [30,34–38], розвинутою в середині минулого століття для множини комутуючих операторів, визначених, взагалі, на гладкому компактному m-вимірному метричному просторі M. Для розгляду нашої проблеми опису диференціально-геометричної і спектральної структури трансмутацій типу Дельсарта–Дарбу, що діють в $\mathcal{H}$, ми спочатку зупинимося на підставах узагальненої теорії де Рама–Ходжа, розвинутої раніше І. В. Скрипником [34–37] для вивчення спеціальних диференціальних комплексів. Розглянемо гладкий метричний простір M, що є відповідним чином компактифованою формою простору $\mathbb{R}^m$, $m \in \mathbb{Z}_+$. Тоді можна визначити на $M_\mathrm{T} := \mathrm{T} \times M$ стандартну алгебру Грасмана $\Lambda(M_\mathrm{T};\mathcal{H})$ диференціальних форм на $\mathrm{T}\times M$ і розглянути оператор узагальненого зовнішнього анти-диференціювання $d_\mathcal{L} : \Lambda(M_\mathrm{T};\mathcal{H}) \to \Lambda(M_\mathrm{T};\mathcal{H})$, який діє наступним чином: для будь-яких $\beta^{(k)} \in \Lambda^k(M_\mathrm{T};\mathcal{H})$, $k = \overline{0,m}$,

$$d_\mathcal{L}\beta^{(k)} := \sum_{j=1}^{2} dt_j \wedge \mathrm{L}_j(t;x|\partial)\beta^{(k)} + \\ + \sum_{i=1}^{m} dx_i \wedge \mathrm{A}_i(t;x;\partial)\beta^{(k)} \in \Lambda^{k+1}(M_\mathrm{T};\mathcal{H}), \quad (1.1)$$

де $\mathrm{A}_i \in C^2(\mathrm{T};\mathcal{L}(H))$, $i = \overline{1,m}$, є деякі диференціальні операторні відображення і

$$\mathrm{L}_j(t;x|\partial) := \partial/\partial t_j - L_j(t;x|\partial) \quad (1.2)$$

$j = \overline{1,2}$, є відповідно визначені лінійні диференціальні оператори в $\mathcal{H}$, що комутують один з одним, тобто

$$[\mathrm{L}_1, \mathrm{L}_2] = 0, \ [\mathrm{A}_k, \mathrm{A}_i] = 0 \text{ та } [\mathrm{L}_j, \mathrm{A}_i] = 0 \quad (1.3)$$

для всіх $j = \overline{1,2}$ та $i,k = \overline{1,m}$. Ми покладемо, в загальному випадку, що диференціальні вирази

$$L_j(t;x|\partial) := \sum_{|\alpha|=0}^{n_j(L)} a_\alpha^{(j)}(t;x)\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha}, \quad (1.4)$$

з коефіцієнтами $a_\alpha^{(j)} \in C^1(\mathrm{T};C^\infty(M;\operatorname{End}\mathbb{C}^N))$, $|\alpha| = \overline{0,n_j(L)}$, $n_j(L) \in \mathbb{Z}_+$, $j = \overline{0,1}$, є деякими замкненими нормальними щільно визначеними операторами в просторі Гільберта H для будь-яких $t \in \mathrm{T}$. Легко зауважити, що анти-диференціювання $d_\mathcal{L}$, визначене в (1.1) є узагальненням звичайного зовнішнього анти-диференціювання

$$d = \sum_{j=1}^{m} dx_j \wedge \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{s=1}^{2} dt_s \wedge \frac{\partial}{\partial t_s} \quad (1.5)$$

для якого, очевидно, мають місце комутаційні умови

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_k}\right] = 0, \quad \left[\frac{\partial}{\partial t_s}, \frac{\partial}{\partial t_l}\right] = 0, \quad \left[\frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial t_s}\right] = 0 \tag{1.6}$$

для всіх $j, k = \overline{1,m}$ та $s, l = \overline{1,2}$. Якщо тепер підставити в (1.5) $\partial/\partial x_j \longrightarrow \mathrm{A}_j$, $\partial/\partial t_s \longrightarrow \mathrm{L}_s$, $j = \overline{1,m}$, $s = \overline{1,2}$, то отримуємо антидиференціювання

$$d_{\mathcal{A}} := \sum_{j=1}^{m} dx_j \wedge \mathrm{A}_j(t;x|\partial) + \sum_{j=1}^{2} dt_s \wedge \mathrm{L}_s(t;x|\partial), \tag{1.7}$$

в якому диференціальні вирази $\mathrm{A}_j, \mathrm{L}_s : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ для всіх $j, k = \overline{1,m}$ та $s, l = \overline{1,2}$, задовольняють комутаційні співвідношення $[\mathrm{A}_j, \mathrm{A}_k] = 0$, $[\mathrm{L}_s, \mathrm{L}_s] = 0$, $[\mathrm{A}_j, \mathrm{L}_s] = 0$, і тоді операція (1.7) визначає на $\Lambda(M_{\mathrm{T}}; \mathcal{H})$ антидиференціювання по відношенню до якого коланцюговий комплекс

$$\mathcal{H} \longrightarrow \Lambda^0(M_{\mathrm{T}};\mathcal{H}) \xrightarrow{d_{\mathcal{A}}} \Lambda^1(M_{\mathrm{T}};\mathcal{H}) \xrightarrow{d_{\mathcal{A}}} \cdots \xrightarrow{d_{\mathcal{A}}} \Lambda^{\mathrm{m}+2}(M_{\mathrm{T}};\mathcal{H}) \xrightarrow{d_{\mathcal{A}}} 0 \tag{1.8}$$

є, очевидно, точним, тобто $d_{\mathcal{A}} d_{\mathcal{A}} \equiv 0$. Оскільки антидиференціювання в (1.1) є частковим випадком (1.7), ми отримуємо, що відповідний до нього коланцюговий комплекс (1.8) є також точним.

Нижче ми скористаємося ідеями, розвинутими в [30,34–37]. Диференціальну форму $\beta \in \Lambda(M_{\mathrm{T}};\mathcal{H})$ називатимемо $d_{\mathcal{A}}$-замкненою, якщо $d_{\mathcal{A}}\beta = 0$, форму $\gamma \in \Lambda(M_{\mathrm{T}};\mathcal{H})$ назвемо точною або $d_{\mathcal{A}}$-гомологічною нулю, якщо існує на M_{T} така форма $\omega \in \Lambda(M_{\mathrm{T}};\mathcal{H})$, що $\gamma = d_{\mathcal{A}}\omega$.

Розглянемо тепер стандартну [4, 30, 38, 39] алгебраїчну $*$-операцію Ходжа

$$* : \Lambda^{\mathrm{k}}(M_{\mathrm{T}};\mathcal{H}) \longrightarrow \Lambda^{\mathrm{m}+2-\mathrm{k}}(M_{\mathrm{T}};\mathcal{H}), \tag{1.9}$$

$k = \overline{0, m+2}$, наступним чином: якщо форма $\beta \in \Lambda^{\mathrm{k}}(M_{\mathrm{T}};\mathcal{H})$, тоді форма $*\beta \in \Lambda^{\mathrm{m}+2-\mathrm{k}}(M_{\mathrm{T}};\mathcal{H})$ є така, що:

- $(m-k+2)$-вимірний об'єм $|*\beta|$ форми $*\beta$ дорівнює k-вимірному об'єму $|\beta|$ форми β;
- $(m+2)$-вимірна міра $\bar{\beta}^{\intercal} \wedge *\beta > 0$ при фіксованій орієнтації на M_{T}.

Визначимо також на просторі $\Lambda(M_{\mathrm{T}};\mathcal{H})$ наступний природній скалярний добуток: для будь-яких векторнозначних форм $\beta, \ \gamma \in \Lambda^{\mathrm{k}}(M_{\mathrm{T}};\mathcal{H})$, $k = \overline{0,m}$,

$$(\beta, \gamma) := \int\limits_{M_{\mathrm{T}}} \bar{\beta}^{\intercal} * \gamma. \tag{1.10}$$

Маючи скалярний добуток (1.10), можна природнім чином збудувати гільбертів простір

$$\mathcal{H}_\Lambda(M_\mathrm{T}) := \overset{m+2}{\underset{k=0}{\oplus}} \mathcal{H}_\Lambda^k(M_\mathrm{T}), \tag{1.11}$$

який буде корисним для нашого подальшого розгляду. Зазначимо тут, що $*$-операція Ходжа задовольняє наступну властивість, яку легко перевірити: для будь-яких $\beta, \gamma \in \mathcal{H}_\Lambda^k(M_\mathrm{T})$, $k = \overline{0, m}$,

$$(\beta, \gamma) = (*\beta, *\gamma), \tag{1.12}$$

тобто операція Ходжа $* : \mathcal{H}_\Lambda(M_\mathrm{T}) \longrightarrow \mathcal{H}_\Lambda(M_\mathrm{T})$ є унітарною і стандартна спряжена до неї операція по відношенню до скалярного добутку (1.10) задовольняє умову $(*)' = (*)^{-1}$.

Позначимо через $d'_\mathcal{L}$ формально спряжений вираз до слабої диференціальної операції (1.1). З допомогою операцій $d'_\mathcal{L}$ і $d_\mathcal{L}$ в $\mathcal{H}_\Lambda(M_\mathrm{T})$ можна природньо визначити [4, 30, 34, 38, 39] узагальнений оператор Лапласа-Ходжа $\Delta_\mathcal{L} : \mathcal{H}_\mathcal{L}(M_\mathrm{T}) \longrightarrow \mathcal{H}_\mathcal{L}(M_\mathrm{T})$ як

$$\Delta_\mathcal{L} = d'_\mathcal{L} d_\mathcal{L} + d'_\mathcal{L} d_\mathcal{L}. \tag{1.13}$$

Візьмемо форму $\beta \in \mathcal{H}_\Lambda(M_\mathrm{T})$, що задовольняє рівність

$$\Delta_\mathcal{L} \beta = 0. \tag{1.14}$$

Таку форму називають [4,30,34,39] гармонічною. Можна перевірити, що гармонічна форма $\beta \in \mathcal{H}_\Lambda(M_\mathrm{T})$ задовольняє наступні дві спряжені умови:

$$d'_\mathcal{L} \beta = 0, \quad d_\mathcal{L} \beta = 0, \tag{1.15}$$

що легко слідує з (1.13) та (1.14).

Легко перевірити, що наступні диференціальні оператори в $\mathcal{H}_\Lambda(M_\mathrm{T})$

$$d^*_\mathcal{L} := *d'_\mathcal{L}(*)^{-1} \tag{1.16}$$

також визначають нову зовнішню операцію антидиференціювання в $\mathcal{H}_\Lambda(M_\mathrm{T})$.

Лема 1.1. *Відповідний дуальний до* (1.8) *коланцюговий комплекс*

$$\mathcal{H} \longrightarrow \Lambda^0(M_\mathrm{T}; \mathcal{H}) \xrightarrow{d^*_\mathcal{L}} \Lambda^1(M_\mathrm{T}; \mathcal{H}) \xrightarrow{d^*_\mathcal{L}} \cdots \xrightarrow{d^*_\mathcal{L}} \Lambda^{m+2}(M_\mathrm{T}; \mathcal{H}) \xrightarrow{d^*_\mathcal{L}} 0 \tag{1.17}$$

є точним.

Доведення. Доведення слідує завдяки властивості $d^*_\mathcal{L} d^*_\mathcal{L} = 0$, що виконується згідно з визначенням (1.16). □

Позначимо надалі через $\mathcal{H}^k_{\Lambda(\mathcal{L})}(M_{\mathrm{T}})$, $k=\overline{0,m+2}$, групи когомологій $d_{\mathcal{L}}$-замкнених і через $\mathcal{H}^k_{\Lambda(\mathcal{L}^*)}(M_{\mathrm{T}})$, $k=\overline{0,m+2}$, $k=\overline{0,m+2}$, групи когомологій $d^*_{\mathcal{L}}$-замкнених диференціальних форм, відповідно, і через $\mathcal{H}^k_{\Lambda(\mathcal{L}^*\mathcal{L})}(M_{\mathrm{T}})$, $k=\overline{0,m+2}$, абелеві групи гармонічних диференціальних форм у гільбертових підпросторах $\mathcal{H}^k_{\Lambda}(M_{\mathrm{T}})$, $k=\overline{0,m+2}$.

Перед тим як формулювати наступні результати, визначимо стандартний ланцюг [1, 2] позитивного і негативного гільбертових просторів диференціальних форм, оснащених вкладеннями Гільберта–Шмідта

$$\mathcal{H}^k_{\Lambda,+}(M_{\mathrm{T}})\subset\mathcal{H}^k_{\Lambda}(M_{\mathrm{T}})\subset\mathcal{H}^k_{\Lambda,-}(M_{\mathrm{T}}), \tag{1.18}$$

відповідний спадковий оснащений ланцюг гармонічних форм:

$$\mathcal{H}^k_{\Lambda(\mathcal{L}^*\mathcal{L}),+}(M_{\mathrm{T}})\subset\mathcal{H}^k_{\Lambda(\mathcal{L}^*\mathcal{L})}(M_{\mathrm{T}})\subset\mathcal{H}^k_{\Lambda(\mathcal{L}^*\mathcal{L}),-}(M_{\mathrm{T}}) \tag{1.19}$$

та ланцюги відповідних груп когомологій:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^k_{\Lambda(\mathcal{L}),+}(M_{\mathrm{T}}) &\subset \mathcal{H}^k_{\Lambda(\mathcal{L})}(M_{\mathrm{T}})\subset\mathcal{H}^k_{\Lambda(\mathcal{L}),-}(M_{\mathrm{T}}),\\ \mathcal{H}^k_{\Lambda(\mathcal{L}^*),+}(M_{\mathrm{T}}) &\subset \mathcal{H}^k_{\Lambda(\mathcal{L}^*)}(M_{\mathrm{T}})\subset\mathcal{H}^k_{\Lambda(\mathcal{L}^*),-}(M_{\mathrm{T}})\end{aligned} \tag{1.20}$$

для всіх $k=\overline{0,m+2}$. Припустимо також, що оператор Лапласа–Ходжа (1.13) є редукованим на простір $\mathcal{H}^0_{\Lambda}(M)$. Тепер, використовуючи обгрунтування, подібно як в [4, 30, 39], можна сформулювати певне узагальнення [30, 35–37] теореми де Рама–Ходжа.

Твердження 1.1. *Групи гармонічних форм $\mathcal{H}^k_{\Lambda,+}(M_{\mathrm{T}})$, $k=\overline{0,m+2}$, є, відповідно, ізоморфними до груп когомологій $(H^k(M_{\mathrm{T}};\mathbb{C}))^{|\Sigma|}$, $k=\overline{0,m+2}$, де $H^k(M_{\mathrm{T}};\mathbb{C})$ є k-ю когомологічною групою многовиду M_{T} з комплексними коефіцієнтами, множина $\Sigma\subset\mathbb{C}^p$, $p\in\mathbb{Z}_+$, є множиною відповідних "спектральних" параметрів, що визначають лінійний простір незалежних $d^*_{\mathcal{L}}$-замкнених 0-форм з $\mathcal{H}^0_{\Lambda(\mathcal{L}),-}(M_{\mathrm{T}})$, і, тим більше, наступні розклади на прямі суми*

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^k_{\Lambda,+}(M_{\mathrm{T}}) &= \mathcal{H}^k_{\Lambda(\mathcal{L}^*\mathcal{L}),+}(M_{\mathrm{T}})\oplus\Delta_{\mathcal{L}}\mathcal{H}^k_{\Lambda,+}(M_{\mathrm{T}}) =\\ &= \mathcal{H}^k_{\Lambda(\mathcal{L}^*\mathcal{L}),+}(M_{\mathrm{T}})\oplus d_{\mathcal{L}}\mathcal{H}^{k-1}_{\Lambda,+}(M_{\mathrm{T}})\oplus d'_{\mathcal{L}}\mathcal{H}^{k+1}_{\Lambda,+}(M_{\mathrm{T}})\end{aligned} \tag{1.21}$$

справедливі для будь-яких $k=\overline{0,m+2}$.

Інший варіант твердження, подібного до поданого вище, був сформульований в [34, 35] і є наступним узагальненням теореми де Рама–Ходжа.

Теорема 1.1. *Узагальнені групи когомологій $\mathcal{H}^k_{\Lambda(\mathcal{L}),+}(M_{\mathrm{T}})$, $k=\overline{0,m+2}$, є ізоморфні, відповідно, до груп когомологій $(H^k(M_{\mathrm{T}};\mathbb{C}))^{|\Sigma|}$, $k=\overline{0,m+2}$.*

Доведення. Доведення цієї теореми грунтується на деяких спеціальних наслідках [19, 34–37] з тотожностей типу Лагранжа. □

Визначимо наступний замкнений підпростір

$$\mathcal{H}_0^* := \left\{\varphi^{(0)}(\eta) \in \mathcal{H}^0_{\Lambda(\mathcal{L}^*),-}(M_{\mathrm{T}}) : d^*_{\mathcal{L}}\varphi^{(0)}(\eta) = 0,\ \varphi^{(0)}(\eta)|_\Gamma = 0,\ \eta \in \Sigma\right\} \tag{1.22}$$

для деякої гладкої $(m+1)$-вимірної гіперповерхні $\Gamma \subset M_{\mathrm{T}}$ та $\Sigma \subset (\sigma(L)\cap\bar{\sigma}(L))\times\Sigma_\sigma \subset \mathbb{C}^p$, де $\mathcal{H}^0_{\Lambda(\mathcal{L}^*),-}(M_{\mathrm{T}})$ є, як вище, відповідно оснащена [1, 2] група когомологій нульового порядку з коланцюга, заданого в (1.20), $\sigma(L)$ і $\sigma(L^*)$ є, відповідно, взаємні узагальнені спектри множин диференціальних операторів $\mathcal{L}$ і $\mathcal{L}^*$ в H при $t = 0 \in \mathrm{T}$. Таким чином, розмірність $\dim \mathcal{H}_0^* = \operatorname{card}\Sigma := |\Sigma|$ вважається відомою. Наступна лема була вперше сформульована І. В. Скрипником [34, 35] і має фундаментальне значення для доведення теореми 1.1.

Лема 1.2. *Існує множина диференціальних* $(k{+}1)$*-форм* $Z^{(k+1)}[\varphi^{(0)}(\eta), d_{\mathcal{L}}\psi^{(k)}] \in \Lambda^{k+1}(M_{\mathrm{T}};\mathbb{C})$, $k = \overline{0, m+2}$, *і множина* k*-форм* $Z^{(k)}[\varphi^{(0)}(\eta), \psi^{(k)}] \in \Lambda^k(M_{\mathrm{T}};\mathbb{C})$, $k = \overline{0, m+2}$, *параметризованих множиною* $\Sigma \ni \eta$, *і які є напівлінійними за* $(\varphi^{(0)}(\eta), \psi^{(k)}) \in \mathcal{H}_0^* \times \mathcal{H}^k_{\Lambda,+}(M_{\mathrm{T}})$, *що*

$$Z^{(k+1)}[\varphi^{(0)}(\eta), d_{\mathcal{L}}\psi^{(k)}] = dZ^k[\phi^{(0)}(\eta\ ), \psi^{(k)}] \tag{1.23}$$

для всіх $k = \overline{0, m+2}$ *і* $\eta \in \Sigma$.

Доведення. Доведення грунтується на наступній тотожності типу Лагранжа, яка узагальнює тотожність з Частини 1, і яка справедлива для будь-якої пари $(\varphi^0(\eta), \psi^{(k)}) \in \mathcal{H}_0^* \times \mathcal{H}^k_{\Lambda,+}(M_{\mathrm{T}})$:

$$\begin{aligned}
0 = \langle d^*_{\mathcal{L}}\phi^{(0)}(\eta), *(\psi^{(k)} \wedge \overline{\gamma})\rangle &= \langle *d'_{\mathcal{L}}(*)^{-1}\varphi^{(0)}(\eta), *(\psi^{(k)} \wedge \overline{\gamma})\rangle = \\
&= \langle *d'_{\mathcal{L}}(*)^{-1}\phi^{(0)}(x), *(\psi^{(k)} \wedge \overline{\gamma})\rangle = \\
= \langle (*)^{-1}\varphi^{(0)}(\eta), d_{\mathcal{L}}\psi^{(k)} \wedge \overline{\gamma}\rangle &+ Z^{(k+1)}[\psi^{(0)}(\eta), d_{\mathcal{L}}\psi(k)] \wedge \overline{\gamma} = \\
= \langle (*)_{-1}\varphi^{(0)}(\eta), d_{\mathcal{L}}\psi^{(k)} \wedge \overline{\gamma}\rangle &+ dZ^{(k)}[\varphi^{(0)}(\eta), \psi^{(k)}] \wedge \overline{\gamma},
\end{aligned} \tag{1.24}$$

де $Z^{(k+1)}[\varphi^{(0)}(\eta), d_{\mathcal{L}}\psi^{(k)}] \in \Lambda^{k+1}(M_{\mathrm{T}};\mathbb{C})$, $k = \overline{0, m+2}$, і $Z^{(k)}[\varphi^{(0)}(\eta), \psi^{(k)}] \in \Lambda^k(M_{\mathrm{T}};\mathbb{C})$, $k = \overline{0, m+2}$, є деякі напівлінійні диференціальні форми на M_{T}, параметризовані параметром $\lambda \in \Sigma$, та $\overline{\gamma} \in \Lambda^{m+1-k}(M_{\mathrm{T}};\mathbb{C})$ є довільною постійною $(m+1-k)$-формою. Таким чином, напівлінійні диференціальні $(k+1)$-форми $Z^{(k+1)}[\varphi^{(0)}(\eta), d_{\mathcal{L}}\psi^{(k)}] \in \Lambda^{k+1}(M_{\mathrm{T}};\mathbb{C})$ і k-форми $Z^{(k)}[\varphi^{(0)}(\eta), \psi^{(k)}] \in \Lambda^k(M_{\mathrm{T}};\mathbb{C})$, $k = \overline{0, m+2}$, $\lambda \in \Sigma$, побудовані вище, є саме тими, які потрібні в лемі. □

Грунтуючись на лемі 1.2, можна побудувати ізоморфізм груп когомологій, про який йдеться в теоремі 1.1, сформульованій вище. А саме, слідуючи [34, 35], візьмемо деякий сингулярний симпліціальний [30, 31, 38, 39] комплекс $\mathcal{K}(M_{\mathrm{T}})$ нашого компактного метричного простору M_{T} і введемо множину лінійних відображень $B_\lambda^{(k)} : \mathcal{H}^k_{\Lambda,+} M_{\mathrm{T}} \longrightarrow C_k(M_{\mathrm{T}};\mathbb{C})$, $k = \overline{0, m+2}$, $\lambda \in \Sigma$, де $C_k(M_{\mathrm{T}};\mathbb{C})$, $k = \overline{0, m+2}$, є довільною абелевою групою над полем $\mathbb{C}$, що генерована, відповідно, всіма k-ланцюгами сингулярних симплексів $S^{(k)} \subset M_{\mathrm{T}}$, $k = \overline{0, m+2}$, з симпліціального комплексу $\mathcal{K}(M_{\mathrm{T}})$ наступним чином:

$$B_\lambda^{(k)}(\psi^{(k)}) := \sum_{S^{(k)} \in C_k(M_{\mathrm{T}};\mathbb{C})} S^{(k)} \int\limits_{S^{(k)}} Z^{(k)}[\varphi^{(0)}(\lambda), \psi^{(k)}], \tag{1.25}$$

де $\psi^{(k)} \in \mathcal{H}^k_{\Lambda,+}(M_{\mathrm{T}})$, $k = \overline{0, m+2}$. Справедлива наступна теорема [34, 35], що грунтується на побудованих відображеннях (1.25).

Теорема 1.2. *Множина операторів* (1.25)*, параметризована параметром* $\lambda \in \Sigma$*, реалізує ізоморфізм груп когомологій, сформульований в теоремі* 1.1

Доведення. Доведення цієї теореми можна отримати, переходячи в (1.25) до відповідних когомологічних $\mathcal{H}^k_{\Lambda(\mathcal{L}),+}(M_{\mathrm{T}})$ і гомологічних $H_k(M_{\mathrm{T}};\mathbb{C})$ груп тростору M_{T} для кожного $k = \overline{0, m+2}$. Якщо взяти елемент $\psi^{(k)} := \psi^{(k)}(\mu) \in \mathcal{H}^k_{\Lambda(\mathcal{L}),+}(M_{\mathrm{T}})$, $k = \overline{0, m+2}$, який розв'язує рівняння $d_{\mathcal{L}}\psi^{(k)}(\mu) = 0$ з $\mu \in \Sigma_k$, що є деякою множиною асоційованих "спектральних" параметрів, що позначають елементи підпростору $\mathcal{H}^k_{\Lambda(\mathcal{L}),-}(M_{\mathrm{T}})$, тоді легко отримати з (1.25) і тотожності (1.23), що $dZ^{(k)}[\varphi^{(0)}(\lambda),\ \psi^{(k)}(\mu)] = 0$ для всіх $(\lambda, \mu) \in \Sigma \times \Sigma_k$, $k = \overline{0, m+2}$. Це, зокрема, означає, згідно з лемою Пуанкаре [12,30,38], що існують диференціальні $(k-1)$-форми $\Omega^{(k-1)}[\varphi^{(0)}(\lambda), \psi^{(k)}(\mu] \in \Lambda^{k-1}(M;\mathbb{C})$, $k = \overline{0, m+2}$, такі, що

$$Z^{(k)}[\varphi^{(0)}(\lambda), \psi^{(k)}(\mu)] = d\Omega^{(k-1)}[\varphi^{(0)}(\lambda), \psi^{(k)}(\mu)] \tag{1.26}$$

для всіх пар $(\varphi^{(0)}(\lambda), \psi^{(k)}(\mu)) \in \mathcal{H}_0^* \times \mathcal{H}^k_{\Lambda(\mathcal{L}),+}(M_{\mathrm{T}})$, параметризованих елементами $(\lambda, \mu) \in \Sigma \times \Sigma_k$, $k = \overline{0, m+2}$. Як результат переходу в правій частині (1.25) до груп гомологій $H_k(M_{\mathrm{T}};\mathbb{C})$, $k = \overline{0, m+2}$, отримуємо, користуючись теоремою Стокса [12, 30, 38], що відображення

$$B_\lambda^{(k)} : \mathcal{H}^k_{\Lambda(\mathcal{L}),+}(M_{\mathrm{T}}) \longrightarrow H_k(M_{\mathrm{T}};\mathbb{C}) \tag{1.27}$$

є ізоморфізмами для кожного $k = \overline{0, m+2}$ та $\lambda \in \Sigma$. Користуючись далі дуалізмом Пуанкаре [4,30,38] між групами гомологій $H_k(M_{\mathrm{T}};\mathbb{C})$,

$k = \overline{0, m+2}$, і групами когомологій $H^k(M;\mathbb{C})$, $k = \overline{0, m+2}$, відповідно, отримуємо твердження, про яке говориться в теоремі 1.2. $\square$

2. Спектральна структура операторів трансмутації типу Дельсарта–Дарбу в багатовимірному випадку

Візьмемо до уваги тепер, що диференціальні оператори $\mathrm{L}_j : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, $j = \overline{1,2}$, мають спеціальний вигляд (1.2). Припустимо також, що диференціальні вирази (1.4) є нормальними замкненими операторами, визначеними на щільному підпросторі $D(L) \subset L_2(M;\mathbb{C}^N)$. Тоді, згідно з теоремою 1.2, можна знайти таку пару $(\varphi^{(0)}(\lambda), \psi^{(0)}(\mu)dx) \in \mathcal{H}_0^* \times \mathcal{H}^k_{\Lambda(\mathcal{L}),+}(M_{\mathrm{T}})$, параметризовану елементами $(\lambda,\mu) \in \Sigma \times \Sigma_k$, для якої справедлива рівність

$$B_\lambda^{(m)}(\psi^{(0)}(\mu)dx) = S^{(m)}_{(t;x)} \int\limits_{\partial S^{(m)}_{(t;x)}} \Omega^{(m-1)}[\varphi^{(0)}(\lambda), \psi^{(0)}(\mu)\, dx], \tag{2.1}$$

де $S^{(m)}_{(t;x)} \in H_m(M_{\mathrm{T}};\mathbb{C})$ є деяким довільним фіксованим елементом, параметризованим довільно вибраною точкою $(t;x) \in M_{\mathrm{T}} \cap \partial S^{(m)}_{(t;x)}$. Розглянемо наступні інтегральні вирази

$$\begin{aligned} \Omega_{(t;x)}(\lambda,\mu) &:= \int\limits_{\sigma^{(m-1)}_{(t;x)}} \Omega^{(m-1)}[\varphi^{(0)}(\lambda), \psi^{(0)}(\mu)\, dx], \\ \Omega_{(t_0;x_0)}(\lambda,\mu) &:= \int\limits_{\sigma^{(m-1)}_{(t_0;x_0)}} \Omega^{(m-1)}[\phi^{(0)}(\lambda), \psi_{(0)}(\mu)\, dx], \end{aligned} \tag{2.2}$$

з точкою $(t_0;x_0) \in M_{\mathrm{T}} \cap \partial S^{(m)}_{(t_0;x_0)}$, взятою фіксованою, межами $\sigma^{(m-1)}_{(t;x)} := \partial S^{(m)}_{t;x}$, $\sigma^{(m-1)}_{(t_0;x_0)} := \partial S^{(m)}_{t_0;x_0}$, гомологічними одна одній $(t;x_0) \longrightarrow (t;x) \in M_{\mathrm{T}}$, $(\lambda,\mu) \in \Sigma \times \Sigma_k$, і проінтерпретуємо їх як ядра [1, 2, 5] відповідних оборотних інтегральних операторів типу Гільберта–Шмідта $\Omega_{(t;x)}, \Omega_{(t_0;x_0)} : L_2^{(\rho)}(\Sigma;\mathbb{C}) \longrightarrow L_2^{(\rho)}(\Sigma;\mathbb{C})$, де ρ є деякою фінітною борелівською мірою на множині параметрів Σ. Визначимо тепер оборотні операторні вирази

$$\mathbf{\Omega}_\pm : \psi^{(0)}(\mu) \longrightarrow \tilde{\psi}^{(0)}(\mu) \tag{2.3}$$

для $\psi^{(0)}(\mu)\, dx \in \mathcal{H}^m_{\Lambda(\mathcal{L}),+}(M_{\mathrm{T}})$ і деяких $\tilde{\psi}^{(0)}(\mu)\, dx \in \mathcal{H}^m_{\Lambda(\mathcal{L}),+}(M_{\mathrm{T}})$, $\mu \in \Sigma$, де, за визначенням, для будь-яких $\eta \in \Sigma$

$$\tilde{\psi}^{(0)}(\eta) := \psi^{(0)}(\eta) \cdot \Omega^{-1}_{(t;x)} \cdot \Omega_{(t_0;x_0)} =$$

$$= \int\limits_{\Sigma} d\rho(\mu) \int\limits_{\Sigma} d\rho(\xi)\, \psi^{(0)}(\mu)\Omega^{-1}_{(t;x)}(\mu,\xi)\Omega_{(t_0;x_0)}(\xi,\eta), \qquad (2.4)$$

будучи мотивованим виразом (2.1). А саме, розглянемо наступну діаграму

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}^m_{\Lambda(\mathcal{L}),+}(M_{\mathrm{T}}) & \xrightarrow{\Omega_{\pm}} & \mathcal{H}^m_{\Lambda(\tilde{\mathcal{L}}),+}(M_{\mathrm{T}}), \\ B^{(m)}_{\lambda}\downarrow & \swarrow \tilde{B}^{(m)}_{\lambda} & \\ H_m(M_{\mathrm{T}};\mathbb{C}) & & \end{array} \qquad (2.5)$$

яка, припускається, є комутативною для деякого іншого коланцюгового комплексу

$$\mathcal{H} \longrightarrow \Lambda^0(M_{\mathrm{T}};\mathcal{H}) \xrightarrow{d_{\tilde{\mathcal{L}}}} \Lambda^1(M_{\mathrm{T}};\mathcal{H}) \xrightarrow{d_{\tilde{\mathcal{L}}}} \cdots \xrightarrow{d_{\tilde{\mathcal{L}}}} \Lambda^{m+2}(M_{\mathrm{T}};\mathcal{H}) \xrightarrow{d_{\tilde{\mathcal{L}}}} 0. \qquad (2.6)$$

Тут, за визначенням, узагальнене антидиференціювання $d_{\tilde{\mathcal{L}}}$ є

$$d_{\tilde{\mathcal{L}}} := \sum_{j=1}^{2} dt_j \wedge \tilde{\mathrm{L}}_j(t;x|\partial) \qquad (2.7)$$

з операторами

$$\begin{gathered} \tilde{\mathrm{L}}_j = \partial/\partial t_j - \tilde{L}_j(t;x|\partial), \\ \tilde{L}_j(t;x|\partial) := \sum_{|\alpha|=0}^{n_j(\tilde{L})} \tilde{a}^{(j)}_{\alpha}(t;x)\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^{\alpha}}, \end{gathered} \qquad (2.8)$$

де коефіцієнти $\tilde{a}^{(j)}_{\alpha} \in C^1(\mathrm{T};C^{\infty}(M;\mathrm{End}\,\mathbb{C}^N), |\alpha| = \overline{0,n_j(\tilde{L})},\ \ n_j(\tilde{L}) := n_j(L) \in \mathbb{Z}_+,\ j = \overline{1,2}$. Відповідні ізоморфізми $\tilde{B}^{(m)}_{\lambda} : \mathcal{H}^m_{\Lambda(\mathcal{L}),+}(M_{\mathrm{T}}) \longrightarrow H_m(M_{\mathrm{T}};\mathbb{C})$, $\lambda \in \Sigma$, діють, за визначенням, наступним чином:

$$\tilde{B}^{(m)}_{\lambda}(\tilde{\psi}^{(0)}(\mu)\,dx) = S^{(m)}_{(t;x)} \int\limits_{\partial S^{(m)}_{(t;x)}} \tilde{\Omega}^{(m-1)}[\tilde{\varphi}^{(0)}(\lambda), \tilde{\psi}^{(0)}(\mu)\,dx], \qquad (2.9)$$

де $\tilde{\varphi}^{(0)}(\lambda) \in \tilde{\mathcal{H}}^*_0 \subset \mathcal{H}^0_{\Lambda(\mathcal{L}^*),-}(M_{\mathrm{T}}),\ \ \lambda \in (\sigma(\tilde{L}) \cap \bar{\sigma}(\tilde{L}^*)) \times \Sigma_{\sigma}$,

$$\tilde{\mathcal{H}}^*_0 := \left\{\tilde{\varphi}^{(0)}(\lambda) \in \mathcal{H}^m_{\Lambda(\mathcal{L}^*),-}(M_{\mathrm{T}}) : d^*_{\tilde{\mathcal{L}}}\tilde{\varphi}^{(0)}(x) = 0,\ \tilde{\varphi}^{(0)}(\lambda)|_{\tilde{\Gamma}} = 0,\ \lambda \in \Sigma\right\} \qquad (2.10)$$

для деякої гіперповерхні $\tilde{\Gamma} \subset M_{\mathrm{T}}$. Відповідно визначаємо наступний замкнений підпростір

$$\tilde{\mathcal{H}}_0 := \left\{\tilde{\psi}^{(0)}(\mu) \in \mathcal{H}^0_{\Lambda(\mathcal{L}^*),-}(M_{\mathrm{T}}) : d^*_{\tilde{\mathcal{L}}}\tilde{\psi}^{(0)}(\lambda) = 0,\ \tilde{\psi}^{(0)}(\mu)|_{\tilde{\Gamma}} = 0,\ \mu \in \Sigma\right\} \qquad (2.11)$$

для гіперповерхні $\tilde{\Gamma} \subset M_{\mathrm{T}}$, що введена вище.

Припустимо тепер, що елементи (2.4) належать до замкненого підпростору (2.11), тобто

$$d_{\tilde{\mathcal{L}}}\tilde{\psi}^{(0)}(\mu) = 0. \tag{2.12}$$

Визначимо подібно до (2.11) замкнений підпростір $\tilde{\mathcal{H}}_0^* \subset \mathcal{H}^m_{\Lambda(\mathcal{L}^*),-}(M_{\mathrm{T}})$ наступним чином:

$$\mathcal{H}_0 := \left\{\psi^{(0)}(\lambda) \in \mathcal{H}^0_{\Lambda(\mathcal{L}^*),-}(M_{\mathrm{T}}) : d_{\mathcal{L}}\psi^{(0)}(\lambda) = 0,\ \psi^{(0)}(\lambda)|_{\Gamma} = 0,\ \lambda \in \Sigma\right\} \tag{2.13}$$

для всіх $\mu \in \Sigma$. Тоді, завдяки комутативності діаграми (2.5), існують відповідні два оборотні відображення

$$\mathbf{\Omega}_{\pm} : \mathcal{H}_0 \to \tilde{\mathcal{H}}_0, \tag{2.14}$$

залежно від шляху їх розширення на весь простір Гільберта $\mathcal{H}^m_{\Lambda,-}(M_{\mathrm{T}})$. Розширимо тепер оператори (2.14) на весь гільбертів простір $\mathcal{H}^m_{\Lambda,-}(M_{\mathrm{T}})$ за допомогою стандартного методу [27, 33] варіації сталих, враховуючи, що ядра $\Omega_{(t;x)}(\lambda,\mu),\ \Omega_{(t_0;x_0)}(\lambda,\mu) \in L_2^{(p)}(\Sigma;\mathbb{C}) \otimes L_2^{(p)}(\Sigma;\mathbb{C}),\ \lambda,\mu \in \Sigma$. Можна записати наступні співвідношення:

$$\begin{aligned}
\Omega_{(t;x)}(\lambda,\mu) - \Omega_{(t_0;x_0)}(\lambda,\mu) &= \int\limits_{\partial S^{(m)}_{(t;x)}} \Omega^{(m-1)}[\varphi^{(0)}(x), \psi^{(0)}(\mu)\,dx] - \\
&- \int\limits_{\partial S^{(m)}_{(t_0;x_0)}} \Omega^{(m-1)}[\varphi^{(0)}(\lambda), \psi^{(0)}(\mu)\,dx] = \\
&= \int\limits_{S^{(m)}_{\pm}\left(\sigma^{(m-1)}_{(t;x)},\sigma^{(m-1)}_{(t_0;x_0)}\right)} d\Omega^{(m-1)}[\varphi^{(0)}(\lambda), \psi^{(0)}(\mu)\,dx] = \\
&= \int\limits_{S^{(m)}_{\pm}\left(\sigma^{(m-1)}_{(t;x)},\sigma^{(m-1)}_{(t_0;x_0)}\right)} Z^{(m)}[\varphi^{(0)}(\lambda), \psi^{(0)}(\mu)\,dx],
\end{aligned} \tag{2.15}$$

де, за визначенням, m-вимірні відкриті поверхні $S^{(m)}_{\pm}\big(\sigma^{(m-1)}_{(t;x)}, \sigma^{(m-1)}_{(t_0;x_0)}\big) \subset M_{\mathrm{T}}$ є гладко напнуті без самоперетинів між двома гомологічними циклами $\sigma^{(m-1)}_{(t;x)} = \partial S^{(m)}_{(t;x)}$ і $\sigma^{(m-1)}_{(t_0;x_0)} = \partial S^{(m)}_{(t_0;x_0)} \in C_{m-1}(M_{\mathrm{T}};\mathbb{C})$ таким чином, що границя $\partial\big(S^{(m)}_{+}\big(\sigma^{(m-1)}_{(t_0;x_0)}, \sigma^{(m-1)}_{(t_0;x_0)}\big) \cup S^{(m)}_{-}\big(\sigma^{(m-1)}_{(t;x)}, \sigma^{(m-1)}_{(t_0;x_0)}\big)\big) = \oslash$. Використовуючи співвідношення (2.15), легко знайти наступні інтегральні вирази в $\mathcal{H}_-$:

$$\mathbf{\Omega}_{\pm} = \mathbf{1} - \int\limits_{\Sigma} d\rho(\eta)\tilde{\psi}^{(0)}(\xi)\Omega^{-1}_{(t_0;x_0)}(\xi,\eta)\times$$

$$\times \int\limits_{S^{(m)}_{\pm}\left(\sigma^{(m-1)}_{(t;x)},\sigma^{(m-1)}_{(t_0;x_0)}\right)} Z^{(m)}[\varphi^{(0)}(\eta),(\cdot)\,dx], \quad (2.16)$$

визначені для фіксованих пар $(\varphi^{(0)}(\xi),\psi^{(0)}(\eta))\in\mathcal{H}_0^*\times\mathcal{H}_0$ і $(\tilde{\varphi}^{(0)}(\xi),\tilde{\psi}^{(0)}(\mu))\in\tilde{\mathcal{H}}_0^*\times\tilde{\mathcal{H}}_0$, $\lambda,\mu\in\Sigma$, як обмежені оборотні оператори типу Вольтерра [3, 5, 13, 21] у просторі Гільберта $\mathcal{H}$. Більше того, для диференціальних операторів $\tilde{\mathrm{L}}_j:\mathcal{H}\longrightarrow\mathcal{H}$, $j=\overline{1,2}$, легко отримати наступні вирази:

$$\tilde{\mathrm{L}}_j=\mathbf{\Omega}_{\pm}\mathrm{L}_j\mathbf{\Omega}_{\pm}^{-1}, \quad (2.17)$$

де ліва частина (2.17) не залежить від знаків "$\pm$" правої частини. Таким чином, інтегральні оператори Вольтерра (2.16) є операторами трасмутації Дельсарта–Дарбу, що відображають задану множину $\mathcal{L}$ диференціальних операторів в нову множину $\tilde{\mathcal{L}}$ диференціальних операторів, перетворених з допомогою виразів Дельсарта (2.17).

Припустимо тепер, що всі диференціальні оператори $L_j(t;x|\partial)$, $j=\overline{1,2}$, розглянуті вище, не залежать від змінної $t\in\mathrm{T}$. Тоді, очевидно, можна взяти

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_0 &:= \big\{\psi_\mu^{(0)}(\xi)\in L_{2.-}(M;\mathbb{C}^N): L_j\psi_\mu^{(0)}(\xi)=\mu_j\psi_\mu^{(0)}(\xi),\ j=\overline{1,2},\\
&\qquad \psi_\mu^{(0)}(\xi)|_{\tilde{\Gamma}}=0,\ \mu=(\mu_1,\ \mu_2)\in\sigma(\tilde{L})\cap\overline{\sigma}(L^*),\ \xi\in\Sigma_\sigma\big\},\\
\tilde{\mathcal{H}}_0 &:= \big\{\tilde{\psi}_\mu^{(0)}(\xi)\in L_{2.-}(M;\mathbb{C}^N): \tilde{L}_j\tilde{\psi}_\mu^{(0)}(\xi)=\mu_j\tilde{\psi}_\mu^{(0)}(\xi),\ j=\overline{1,2},\\
&\qquad \tilde{\psi}_\mu^{(0)}(\xi)|_{\tilde{\Gamma}}=0,\ \mu=(\mu_1,\ \mu_2)\in\sigma(\tilde{L})\cap\overline{\sigma}(L^*),\ \xi\in\Sigma_\sigma\big\},\\
\mathcal{H}_0^* &:= \big\{\varphi_\lambda^{(0)}(\eta)\in L_{2.-}(M;\mathbb{C}^N): L_j^*\varphi_\lambda^{(0)}(\eta)=\bar{\lambda}_j\varphi_\lambda^{(0)}(\eta),\ j=\overline{1,2},\\
&\qquad \varphi_\lambda^{(0)}(\eta)|_{\tilde{\Gamma}}=0,\ \lambda=(\lambda_1,\ \lambda_2)\in\sigma(\tilde{L})\cap\overline{\sigma}(L^*),\ \eta\in\Sigma_\sigma\big\},\\
\tilde{\mathcal{H}}_0^* &:= \big\{\tilde{\varphi}_\lambda^{(0)}(\eta)\in L_{2.-}(M;\mathbb{C}^N): \tilde{L}_j^*\tilde{\varphi}_\lambda^{(0)}(\eta)=\bar{\lambda}_j\varphi_\lambda^{(0)}(\eta),\ j=\overline{1,2},\\
&\qquad \tilde{\varphi}_\lambda^{(0)}(\eta)|_{\tilde{\Gamma}}=0,\ \lambda=(\lambda_1,\lambda_2)\in\sigma(\tilde{L})\cap\overline{\sigma}(L^*),\ \eta\in\Sigma_\sigma\big\},
\end{aligned} \quad (2.18)$$

і збудувати відповідні оператори трансмутації Дельсарта–Дарбу

$$\begin{aligned}
\mathbf{\Omega}_{\pm} = 1 - \int\limits_{\sigma(\tilde{L})\cap\overline{\sigma}(L^*)} d\rho_\sigma(\lambda)\int\limits_{\Sigma_\sigma\times\Sigma_\sigma} d\rho_{\Sigma_\sigma}(\xi)\,d\rho_{\Sigma_\sigma}(\eta)\times\\
\times \int\limits_{S^{(m)}_{\pm}\left(\sigma^{(m-1)}_{(t_0;x_0)},\sigma^{(m-1)}_{(t_0;x_0)}\right)} dx\,\tilde{\psi}_\lambda^{(0)}(\xi)\Omega_{x_0}^{-1}(\lambda;\xi;\eta)\bar{\varphi}_\lambda^{(0),\intercal}(\eta)(\cdot),
\end{aligned} \quad (2.19)$$

що діють в просторі Гільберта $L_{2,+}(M;\mathbb{C}^N)$, де для будь-яких параметрів $(\lambda;\xi,\eta) \in (\sigma(\tilde{L}) \cap \overline{\sigma}(L^*) \times \Sigma_\sigma^2$ ядра

$$\Omega_{(x_0)}(\lambda;\xi,\eta) := \int\limits_{\sigma_{x_0}^{(m-1)}} \Omega^{(m-1)}[\varphi_\lambda^{(0)}(\xi), \psi_\lambda^{(0)}(\eta)\,dx] \tag{2.20}$$

належать до $L_2^{(\rho)}(\Sigma_\sigma;\mathbb{C}) \otimes L_2^{(\rho)}(\Sigma_\sigma;\mathbb{C})$. Більше того, оскільки $\partial\mathbf{\Omega}_\pm/\partial t_j = 0$, $j = \overline{1,2}$, легко отримати множину диференціальних виразів

$$\tilde{L}_j(x|\partial) := \mathbf{\Omega}_\pm L_j(x|\partial)\mathbf{\Omega}_\pm^{-1}, \tag{2.21}$$

що комутують, очевидно, одне з одним.

Оператори Вольтерра (2.19) володіють деякими додатковими властивостями. А саме, визначимо наступний інтегральний оператор типу Фредгольма в H :

$$\mathbf{\Omega} := \mathbf{\Omega}_+^{-1}\mathbf{\Omega}_-, \tag{2.22}$$

який можна записати в наступній формі:

$$\mathbf{\Omega} = \mathbf{1} + \Phi(\mathbf{\Omega}), \tag{2.23}$$

де оператор $\Phi(\mathbf{\Omega}) \in \mathcal{B}_\infty(H)$ є компактним. Більше того, враховуючи співвідношення (2.21), легко отримати, що мають місце наступні комутаторні умови

$$[\mathbf{\Omega}, L_j] = 0 \tag{2.24}$$

для $j = \overline{1,2}$.

Позначимо через $\hat{\Phi}(\mathbf{\Omega}) \in H_- \otimes H_-$ і $\hat{K}_+(\mathbf{\Omega})$, $\hat{K}_-(\mathbf{\Omega}) \in H_- \otimes H_-$ ядра відповідних [1, 2] операторів $\Phi(\mathbf{\Omega}) \in \mathcal{B}_\infty(H)$ і $\mathbf{\Omega}_\pm - \mathbf{1} \in \mathcal{B}_\infty(H)$. Тоді, враховуючи факт, що $\operatorname{supp} K_+(\mathbf{\Omega}) \cap \operatorname{supp} K_-(\mathbf{\Omega}) = \sigma_x^{(m-1)} \cup \sigma_{x_0}^{(m-1)}$, отримуємо з (2.22) та (2.23) відоме лінійне інтегральне рівняння типу Гельфанда–Левітана–Марченка

$$\hat{K}_+(\mathbf{\Omega}) + \hat{\Phi}(\mathbf{\Omega}) + \hat{K}_+(\mathbf{\Omega})\hat{\Phi}(\mathbf{\Omega}) = \hat{K}_-(\mathbf{\Omega}), \tag{2.25}$$

яке дозволяє знайти факторизуюче ядро оператора Фредгольма (2.22) $\hat{K}_+(\mathbf{\Omega})(x;y) \in H_- \otimes H_-$ для всіх $y \in \operatorname{supp} K_+(\mathbf{\Omega})$. Умови (2.24) можна переписати наступним чином:

$$(L_{j,ext} \otimes \mathbf{1})\hat{\Phi}(\mathbf{\Omega}) = (1 \otimes L_{j,ext}^*)\hat{\Phi}(\mathbf{\Omega}), \tag{2.26}$$

де $L_{j,ext} \in \mathcal{L}(H_-)$, $j = \overline{1,2}$, і їх спряження $L_{j,ext}^* \in \mathcal{L}(H_-)$, $j = \overline{1,2}$, є відповідними розширеннями [1, 2, 28] диференціальних операторів L_j і $L_j^* \in \mathcal{L}(H)$, $j = \overline{1,2}$.

Беручи до уваги співвідношення (2.21), можна записати [1, 28] умови на відповідні ядра подібно до (2.26):

$$(\tilde{L}_{j,ext} \otimes \mathbf{1})\hat{K}_{\pm}(\mathbf{\Omega}) = (\mathbf{1} \otimes L^{*}_{j,ext})\hat{K}_{\pm}(\mathbf{\Omega}), \tag{2.27}$$

де, як і вище, $\tilde{L}_{j,ext} \in \mathcal{L}(H_{-})$, $j = \overline{1,2}$, є відповідно оснащені розширення диференціальних операторів $\tilde{L}_j \in \mathcal{L}(H)$, $j = \overline{1,2}$.

Перейдемо тепер до аналізу питання про загальну диференціальну структуру трансформованих операторних виразів (2.17). Очевидно, що знайдені вище умови (2.25) та (2.26) на ядра $\hat{K}_{\pm}(\mathbf{\Omega}) \in \mathcal{H}_{-} \otimes \mathcal{H}_{-}$ операторів трансмутації Дельсарта–Дарбу є необхідними для того, щоб існували операторні вирази (2.17) і були диференціальними. Поставимо тепер питання, чи ці умови є достатніми? Для вивчення цього питання розглянемо оператори Вольтерра (2.16) та (2.19) з ядрами, що задовольняють умови (2.25) та (2.26), вважаючи, що відповідно орієнтовані поверхні $S^{(m)}_{\pm}(\sigma_{(t;x)^{(m-1)}}, \sigma_{(t_0;x_0)^{(m-1)}}) \in C_m(M_{\mathrm{T}};\mathbb{C})$ задані, наприклад, наступним чином:

$$\begin{aligned} S^{(m)}_{+}\big(\sigma^{(m-1)}_{(t;x)}, \sigma^{(m-1)}_{(t_0;x_0)}\big) &= \big\{(t';x') \in M_{\mathrm{T}} : t' = P(t;x|x'),\ t \in \mathrm{T}\big\}, \\ S^{(m)}_{-}\big(\sigma^{(m-1)}_{(t;x)}, \sigma^{(m-1)}_{(t_0;x_0)}\big) &= \big\{(t';x') \in M_{\mathrm{T}} : t' = P(t;x|x') \in \mathrm{T}\backslash[t_0,t]\big\}, \end{aligned} \tag{2.28}$$

де відображення $P \in C^{\infty}(M_{\mathrm{T}} \times M;\mathrm{T})$ є гладким і таким, що межі $\partial S^{(m)}_{\pm}\big(\sigma^{(m-1)}_{(t;x)}, \sigma^{(m-1)}_{(t_0;x_0)}\big) = \pm\big(\sigma^{(m-1)}_{(t;x)} - \sigma^{(m-1)}_{(t_0;x_0)}\big)$ з циклами $\sigma^{(m-1)}_{(t;x)}$ та $\sigma^{(m-1)}_{(t_0;x_0)} \in \mathcal{K}(M_{\mathrm{T}})$, гомологічними одне одному для будь-яких вибраних точок $(t_0;x_0)$ та $(t;x) \in M_{\mathrm{T}}$. Тоді легко бачити з допомогою простих, але дещо громіздких обчислень, які грунтуються на міркуваннях з [11] та [9], що результуючі вирази для правої частини

$$\tilde{\mathrm{L}} = \mathrm{L} + [\mathrm{K}_{\pm}(\mathbf{\Omega}), \mathrm{L}] \cdot \mathbf{\Omega}^{-1}_{\pm} \tag{2.29}$$

є точно рівними один одному диференціальними виразами, якщо таким був вираз для оператора $\mathrm{L} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$.

Стосовно обернених операторів $\mathbf{\Omega}^{-1}_{\pm} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, присутніх в (2.29), можна тут зауважити, що завдяки фукціональній симетрії між замкненими підпросторами $\mathcal{H}_0$ та $\tilde{\mathcal{H}}_0 \subset \tilde{\mathcal{H}}_{-}$, визначаючі співвідношення (2.14) та (2.4) є зворотніми, тобто існують обернені операторні відображення $\mathbf{\Omega}^{-1}_{\pm} : \tilde{\mathcal{H}}_0 \to \mathcal{H}_0$, такі, що

$$\mathbf{\Omega}^{-1}_{\pm} : \tilde{\psi}^{(0)}(\lambda) \longrightarrow \psi^{(0)}(\lambda) := \tilde{\psi}^{(0)}(\lambda) \cdot \tilde{\Omega}^{-1}_{(t;x)} \tilde{\Omega}_{(t;x)} \tag{2.30}$$

для деяких відповідних ядер $\tilde{\Omega}_{(t;x)}(\lambda,\mu)$ і $\tilde{\Omega}_{(t_0;x_0)}(\lambda,\mu) \in L^{(\rho)}_2(\Sigma;\mathbb{C}) \otimes L^{(\rho)}_2(\Sigma;\mathbb{C})$, природньо асоційованих з перетвореним диференціальним виразом $\tilde{\mathrm{L}} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Таким чином, завдяки виразам (2.30) можна записати подібно до (2.19) відповідні обернені інтегральні оператори:

$$\mathbf{\Omega}_{\pm}^{-1} = \mathbf{1} - \int\limits_{\Sigma} d\rho(\xi) \int\limits_{\Sigma} d\rho(\eta)\, \psi^{(0)}(\xi) \tilde{\Omega}_{t_0;x_0}^{-1}(\xi,\eta) \times$$
$$\times \int\limits_{S_{\pm}^{(m)}\left(\sigma_{(t;x)}^{(m-1)}, \sigma_{(t_0;x_0)}^{(m-1)}\right)} \tilde{Z}^{(m)}[\tilde{\varphi}^{(0)}(\eta), (\cdot)\, dx], \quad (2.31)$$

визначені для фіксованих пар $(\tilde{\varphi}^{(0)}(\xi), \tilde{\psi}^{(0)}(\eta)) \in \tilde{\mathcal{H}}_0^* \times \tilde{\mathcal{H}}_0$ і $(\varphi^{(0)}(\xi), \psi^{(0)}(\eta)) \in \mathcal{H}_0^* \times \mathcal{H}_0$, $\xi, \eta \in \Sigma$, і будучи обмеженими оборотними операторами типу Вольтерра в просторі Гільберта $\mathcal{H}$. А саме, умови сумісності $\mathbf{\Omega}_{\pm}\mathbf{\Omega}_{\pm}^{-1} = \mathbf{1} = \mathbf{\Omega}_{\pm}^{-1}\mathbf{\Omega}_{\pm}$ повинні бути виконані тотожньо в $\mathcal{H}$, тягнучи за собою деякі обмеження, що визначають міру ρ та Σ, а також можливі асимптотичні умови на коефіцієнтні функції диференціального виразу $\mathrm{L} \in \mathcal{L}$. Такого типу обмеження були вже відзначені раніше в [16, 40, 41], де, зокрема, розглядалися зв'язки з локальною та нелокальною проблемами Рімана.

В рамках загальної конструкції, викладеної вище, можна дати природню інтерпретацію так званих трансформацій Беклунда для кофіцієнтних функцій заданого диференціального операторного виразу $\mathrm{L} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. А саме, слідуючи символічному розгляду в [17], ми переінтерпретуємо підхід, запропонований там, для побудови перетворень Беклунда, використовуючи техніку, що грунтується на теорії операторів трансмутації Дельсарта. Визначимо два різні трансформовані за Дельсартом–Дарбу диференціальні операторні вирази

$$\mathrm{L}_1 = \mathbf{\Omega}_{1,\pm}\mathrm{L}\mathbf{\Omega}_{1,\pm}^{-1}, \qquad \mathrm{L}_2 = \mathbf{\Omega}_{2,\pm}\mathrm{L}\mathbf{\Omega}_{2,\pm}^{-1}, \quad (2.32)$$

де $\mathbf{\Omega}_{1,+}, \mathbf{\Omega}_{2,-}$ є деякими операторами Вольтерра трансмутацій Дельсарта в $\mathcal{H}$ з борелівськими спектральними мірами ρ_1 і ρ_2 на Σ такими, що справедливі наступні умови

$$\mathbf{\Omega}_{1,+}^{-1}\mathbf{\Omega}_{1,-} = \mathbf{\Omega} = \mathbf{\Omega}_{2,+}^{-1}\mathbf{\Omega}_{2,-}. \quad (2.33)$$

Використовуючи тепер умови (2.32) і співвідношення (2.33), легко знайти, що оператор $\mathrm{B} := \mathbf{\Omega}_{2,-}\mathbf{\Omega}_{1,+}^{-1}$ задовольняє наступні операторні рівняння

$$\mathrm{L}_2\mathrm{B} = \mathrm{B}\mathrm{L}_1, \quad \mathbf{\Omega}_{2,\pm}\mathrm{B} = \mathrm{B}\mathbf{\Omega}_{1,\pm}, \quad (2.34)$$

які мотивують наступне визначення.

Означення 2.1. *Оборотне символьне відображення* $\hat{\mathrm{B}} : \mathcal{L}(\mathcal{H}) \longrightarrow \mathcal{L}\ (\mathcal{H})$ *будемо називати перетворенням Дарбу–Беклунда оператора* $\mathrm{L}_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ *в оператор* $\mathrm{L}_2 \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, *якщо справедлива умова*

$$[\mathrm{Q}\hat{\mathrm{B}}, \mathrm{L}_1] = 0 \tag{2.35}$$

для деякого лінійного диференціального виразу $\mathrm{Q} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$.

Умову (2.35) можна реалізувати наступним чином. Візьмемо будь-який диференціальний вираз $\mathrm{q} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, що задовольняє символьне рівняння

$$[\mathrm{qB}, \mathrm{L}] = 0. \tag{2.36}$$

Тоді, використовуючи перетворення, подібне до (2.32), з (2.33) знаходимо, що

$$[\mathrm{Q}\hat{\mathrm{B}}, \mathrm{L}_1] = 0, \tag{2.37}$$

де завдяки (2.34)

$$\mathrm{Q}\hat{\mathrm{B}} := \boldsymbol{\Omega}_{1,+} q \hat{\mathrm{B}} \boldsymbol{\Omega}_{1,+}^{-1} = \boldsymbol{\Omega}_{1,+} \mathrm{q} \boldsymbol{\Omega}_{2,+}^{-1} \hat{\mathrm{B}}. \tag{2.38}$$

Отже, вираз $\mathrm{Q} = \boldsymbol{\Omega}_{1,+} q \boldsymbol{\Omega}_{2,+}^{-1}$ виявляється теж диференціальним завдяки умовам (2.34).

Міркування, що стосується символьного відображення $\hat{\mathrm{B}} : \mathcal{L}(\mathcal{H}) \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$, приводить до ефективного знаряддя для побудови автоперетворення Беклунда для коефіцієнтів диференціальних операторних виразів $\mathrm{L}_1, \mathrm{L}_2 \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, що має багато застосувань [5, 20, 25, 29, 33] в спектральній і солітонній теоріях.

Повернемось тепер до вивчення структури трансформацій Дельсарта–Дарбу для пучків поліноміальних диференціальних операторів

$$\mathrm{L}(\lambda; x|\partial) := \sum_{j=0}^{n(L)} L_j(x|\partial)\lambda^j, \tag{2.39}$$

де $n(L) \in \mathbb{Z}_+$ і $\lambda \in \mathbb{C}$ є комплекснозначним параметром. Потрібно знайти відповідні до (2.39) перетворення Дельсарта–Дарбу $\boldsymbol{\Omega}_{\lambda,\pm}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, такі, що для деяких пучків поліноміальних диференціальних операторів $\tilde{\mathrm{L}}(\lambda; x|\partial) \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ справедливі наступні трасмутаційні умови Дельсарта–Лайонса [8]

$$\tilde{\mathrm{L}} \boldsymbol{\Omega}_{\lambda,\pm} = \boldsymbol{\Omega}_{\lambda,\pm} \mathrm{L} \tag{2.40}$$

для майже всіх $\lambda \in \mathbb{C}$. Для знаходження таких перетворень розглянемо залежний від параметру $\tau \in \mathbb{R}$ диференціальний оператор $\mathrm{L}_\tau(x|\partial) \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_\tau)$, де

$$\mathrm{L}_\tau(x|\partial) := \sum_{j=0}^{n(L)} L_j(x|\partial)\partial^j/\partial\tau^j, \tag{2.41}$$

діє в функціональному просторі $\mathcal{H}_\tau = C^{q(L)}(\mathbb{R}_\tau;\mathcal{H})$ для деякого $q(L) \in \mathbb{Z}_+$. Тоді можна легко побудувати відповідні перетворення Дельсарта–Дарбу $\mathbf{\Omega}_{\tau,\pm} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_\tau)$ типу Вольтерра для деякого диференціального виразу

$$\tilde{\mathrm{L}}_\tau(x|\partial) := \sum_{j=0}^{n(L)} \tilde{L}_j(x|\partial)\partial^j/\partial\tau^j, \tag{2.42}$$

якщо справджуються наступні [8] перестановочні умови Дельсарта–Ліонса

$$\tilde{\mathrm{L}}_\tau \mathbf{\Omega}_{\tau,\pm} = \mathbf{\Omega}_{\tau,\pm}\mathrm{L}_\tau \tag{2.43}$$

в просторі $\mathcal{H}_\tau$. Отже, використовуючи результати, отримані вище, можна записати, що

$$\begin{aligned}\mathbf{\Omega}_{\tau,\pm} = \mathbf{1} - \int_\Sigma d\rho_\Sigma(\xi) \int_\Sigma d\rho_\Sigma(\eta)\, \tilde{\psi}_\tau^{(0)}(\lambda;\xi)\Omega^{-1}_{(\tau_0;x_0)}(\lambda;\xi,\eta)\times \\ \times \int\limits_{S_\pm^{(m)}\left(\sigma^{(m-1)}_{(\tau;x)},\sigma^{(m-1)}_{(\tau_0;x_0)}\right)} Z^{(m)}[\varphi_\tau^{(0)}(\lambda;\eta),(\cdot)\,dx],\end{aligned} \tag{2.44}$$

визначається за допомогою наступних замкнутих підпросторів $\mathcal{H}_{\tau,0} \subset \mathcal{H}_{\tau,-}$ та $\mathcal{H}^*_{\tau,0} \subset \mathcal{H}^*_{\tau,-}$:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{\tau,0} := \big\{&\psi_\tau^{(0)}(\lambda;\xi) \in \mathcal{H}_{\tau,-} : \mathrm{L}_\tau\psi_\tau^{(0)}(\lambda;\xi) = 0, \\ &\psi_\tau^{(0)}(\lambda;\xi)|_{\tau=0} = \psi^{(0)}(\lambda;\xi) \in \mathcal{H},\ \mathrm{L}\psi^{(0)}(\lambda;\xi) = 0, \\ &\psi^{(0)}(\lambda;\xi)|_\Gamma = 0,\ \lambda \in \mathbb{C},\ \xi \in \Sigma\big\}, \\ \mathcal{H}^*_{\tau,0} := \big\{&\varphi_\tau^{(0)}(\lambda;\eta) \in \mathcal{H}^*_{\tau,-} : \mathrm{L}_\tau\varphi_\tau^{(0)}(\lambda;\eta) = 0, \\ &\varphi_\tau^{(0)}(\lambda;\eta)|_{\tau=0} = \varphi^{(0)}(\lambda;\eta) \in \mathcal{H}^*,\ \mathrm{L}\varphi^{(0)}(\lambda;\eta) = 0, \\ &\varphi^{(0)}(\lambda;\eta)|_\Gamma = 0,\ \lambda \in \mathbb{C},\ \eta \in \Sigma\big\}.\end{aligned} \tag{2.45}$$

Пригадуючи тепер, що оператори $L_j \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, $j = \overline{0, r(L)}$, не залежать від параметра $\tau \in \mathbb{R}$, можна з (2.44) легко визначити

$$\begin{aligned}\mathbf{\Omega}_\pm = \mathbf{1} - \int_\Sigma d\rho_\Sigma(\xi) \int_\Sigma d\rho_\Sigma(\eta)\, \tilde{\psi}^{(0)}(\lambda;\xi)\Omega^{-1}_{(x_0)}(\lambda;\xi,\eta)\times \\ \times \int\limits_{S_\pm^{(m)}\left(\sigma^{(m-1)}_{(x)},\sigma^{(m-1)}_{(x_0)}\right)} Z_0^{(m)}[\varphi^{(0)}(\lambda;\eta),(\cdot)\,dx],\end{aligned} \tag{2.46}$$

де ми поклали $\sigma_x^{(m-1)} := \sigma_{(\tau_0;x)}^{(m-1)}$, $\sigma_{x_0}^{(m-1)} := \sigma_{(\tau_0;x_0)}^{(m-1)} \in C_{m-1}(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})$ і

$$Z_0^{(m)}\big[\varphi^{(0)}(\lambda;\eta),\psi^{(0)}dx\big] := Z^{(m)}\big[\varphi_\tau^{(0)}(\lambda;\eta),\psi_\tau^{(0)}dx\big]|_{d\tau=0}. \tag{2.47}$$

Відповідно до (2.46) замкнені підпростори $\mathcal{H}_0 \in \mathcal{H}_-$ і $\mathcal{H}_0^* \in \mathcal{H}_-^*$ задаються наступним чином:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_0 &:= \big\{\psi^{(0)}(\lambda;\xi) \in \mathcal{H}_- : \mathrm{L}\psi^{(0)}(\lambda;\xi) = 0, \\ &\qquad \psi^{(0)}(\lambda;\xi)|_\Gamma = 0,\ \lambda \in \mathbb{C},\ \xi \in \Sigma\big\}, \\ \mathcal{H}_{\tau,0}^* &:= \big\{\varphi^{(0)}(\lambda;\eta) \in \mathcal{H}_-^* : \mathrm{L}\varphi^{(0)}(\lambda;\eta) = 0, \\ &\qquad \varphi^{(0)}(\lambda;\eta)|_\Gamma = 0,\ \lambda \in \mathbb{C},\ \eta \in \Sigma\big\}. \end{aligned} \tag{2.48}$$

Тим самим, використовуючи вирази (2.46), можна побудувати перетворений за Дельсартом–Дарбу лінійний диференціальний пучок $\tilde{\mathrm{L}} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, коефіцієнти якого пов'язані з коефіцієнтами пучка $\mathrm{L} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ через деякі співвідношення типу Беклунда, які корисні для застосувань (див. [15, 16, 18, 32, 33]) в теорії солітонів.

3. Оператори трансмутації Дельсарта–Дарбу для спеціальних багатовимірних диференціальних виразів та їх застосування

3.1. Збурений самоспряжений оператор Лапласа в $\mathbb{R}^n$

Розглянемо оператор Лапласа $-\Delta_m$ в $H := L(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})$, збурений оператором множення на функцію $q \in W_2^2(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})$, тобто оператор

$$L(x|\partial) := -\Delta_m + q(x), \tag{3.1}$$

де $x \in \mathbb{R}^m$. Оператор (3.1) є, очевидно, самоспряженим в H. Застосовуючи результати з розділу 1 до диференціального виразу (3.1) в просторі Гільберта H, можна записати наступні оборотні оператори трансмутації Дельсарта–Дарбу:

$$\begin{aligned} \mathbf{\Omega}_\pm = \mathbf{1} - \int\limits_{\sigma(L)} d\rho_\sigma(\xi) \int\limits_{\sigma(L)} d\rho_\sigma(\xi) \int\limits_{\Sigma_\sigma} d\rho_{\Sigma_\sigma}(\xi) \int\limits_{\Sigma_\sigma} d\rho_{\Sigma_\sigma}(\eta) \times \\ \times\, \tilde{\psi}^{(0)}(\lambda;\xi)\Omega_{(x_0)}^{-1}(\lambda;\xi,\eta) \int\limits_{S_\pm^{(m)}\left(\sigma_{(x)}^{(m-1)},\sigma_{(x_0)}^{(m-1)}\right)}^{(0)} dy\,[\bar{\varphi}^{(0)\intercal}(\lambda;\eta),(\cdot)], \end{aligned} \tag{3.2}$$

де $\sigma_x^{(m-1)} \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^m)$ є тут замкнена, можливо не компактна, симпліціальна гіперповерхня в $\mathbb{R}^m$, параметризована біжучою точкою

$x \in \sigma_x^{(m-1)}$, і $\sigma_{x_0}^{(m-1)} \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^m)$ є відповідна гомологічна до $\sigma_x^{(m-1)}$ симпліціальна гіперповерхня в $\mathbb{R}^m$, параметризована точкою $x_0 \in \sigma_{x_0}^{(m-1)}$. Існують два m-вимірні підпростори, що пов'язують їх, скажімо $S_\pm^{(m)}\big(\sigma_x^{(m-1)}, \sigma_{x_0}^{(m-1)}\big) \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^m)$, і такі, що $S_+^{(m)}\big(\sigma_x^{(m-1)}, \sigma_{x_0}^{(m-1)}\big) \cup S_-^{(m)}\big(\sigma_x^{(m-1)}, \sigma_{x_0}^{(m-1)}\big) = \mathbb{R}^m$. Беручи до уваги ці підпростори, можна переписати компактно оператори трансмутації Дельсарта–Дарбу (3.2) для (3.1) як

$$\mathbf{\Omega}_\pm = \mathbf{1} + \int\limits_{S_\pm^{(m)}\left(\sigma_x^{(m-1)}, \sigma_{x_0}^{(m-1)}\right)} dy\, \hat{K}_\pm(\mathbf{\Omega})(x;y)(\cdot), \tag{3.3}$$

де, як і раніше, $x \in \sigma_x^{(m-1)}$ і ядра $\hat{K}_\pm(\mathbf{\Omega}) \in H_- \otimes H_-$ задовольняють рівняння (2.27), або, еквівалентно,

$$\begin{aligned} - \Delta_m(x;\partial)\hat{K}_\pm(\mathbf{\Omega})(x;y) + \Delta_m(y;\partial)\hat{K}_\pm(\mathbf{\Omega})(x;y) = \\ = (q(y) - \tilde{q}(x))\hat{K}_\pm(\mathbf{\Omega})(x;y) \end{aligned} \tag{3.4}$$

для всіх $x, y \in \operatorname{supp} \hat{K}_\pm(\mathbf{\Omega})$. Візьмемо для простоти не компактну замкнену симпліціальну гіперповерхню $\sigma_x^{(m-1)} = \sigma_{x,\gamma}^{(m-1)} := \{y \in \mathbb{R}^m : \langle x - y, \gamma\rangle = 0\}$ і вироджений симпліціальний цикл $\sigma_{x_0}^{(m-1)} := x_0 = \infty \in \mathbb{R}^m$, де $\gamma \in \mathbb{S}^{m-1}$ є довільним версором, $\|\gamma\| = 1$. Тоді, очевидно,

$$S_\pm^{(m)}\big(\sigma_{x,\gamma}^{(m-1)}, \sigma_\infty^{(m-1)}\big) := S_{\pm\gamma,x}^{(m)} = \big\{y \in \mathbb{R}^m : \langle x - y, \pm\gamma\rangle \geq 0\big\} \tag{3.5}$$

і наші оператори трансмутації (3.3) приймуть форму

$$\mathbf{\Omega}_{\pm\gamma} = \mathbf{1} + \int\limits_{S_{\pm\gamma,x}^{(m)}} dy\, \hat{K}_{\pm\gamma}(\mathbf{\Omega})(x;y)(\cdot), \tag{3.6}$$

де $\operatorname{supp} \hat{K}_{\pm\gamma}(\mathbf{\Omega}) = S_{\pm\gamma,x}^{(m)}$, $S_{+\gamma,x}^{(m)} \cap S_{-\gamma,x}^{(m)} = \sigma_{x,\gamma}^{(m-1)} \cup \sigma_\infty^{(m-1)}$ і $S_{+\gamma,x}^{(m)} \cup S_{-\gamma,x}^{(m)} = \mathbb{R}^m$ для будь-якого напрямку $\gamma \in \mathbb{S}^{m-1}$.

Оборотні оператори трансмутації Вольтерра, подібні до (3.6), були побудовані раніше Л. Д. Фаддєєвим [9] для самоспряженого збуреного оператора Лапласа (3.1) в $\mathbb{R}^3$. Він назвав їх [9] операторами перетворення з вольтеррівським напрямком $\gamma \in \mathbb{S}^{m-1}$. Легко бачити, що вирази Л. Д. Фаддєєва (3.6) є дуже спеціальним випадком загального виразу (3.3), отриманого вище.

Визначимо тепер, використовуючи (3.3), наступний оператор Фредгольма в просторі Гільберта H :

$$\mathbf{\Omega} := (\mathbf{1} + K_+(\mathbf{\Omega}))^{-1}(\mathbf{1} + K_-(\mathbf{\Omega})) = \mathbf{1} + \Phi(\mathbf{\Omega}) \tag{3.7}$$

з компактною частиною $\Phi(\mathbf{\Omega}) \in \mathcal{B}_\infty(H)$. Тоді справедлива комутаційна тотожність

$$[L, \Phi(\mathbf{\Omega})] = \mathbf{0} \tag{3.8}$$

разом з рівнянням типу Гельфанда–Левітана–Марченка

$$\hat{K}_+(\mathbf{\Omega}) + \hat{\Phi}(\mathbf{\Omega}) + \hat{K}_+(\mathbf{\Omega})\hat{\Phi}(\mathbf{\Omega}) = \hat{K}_-(\mathbf{\Omega}) \tag{3.9}$$

для відповідних ядер $\hat{K}_\pm(\mathbf{\Omega})$ та $\hat{\Phi}(\mathbf{\Omega}) \in H_- \otimes H_-$.

В [9] була ретельно проаналізована спектральна структура ядер $\hat{K}_\pm(\mathbf{\Omega}) \in H_- \otimes H_-$ в (3.6), використовуючи аналітичні властивості відповідних функцій Гріна оператора (3.1). Як можна бачити з (3.2), ці властивості сильно залежать від структури спектральних мір ρ_σ на $\sigma(L)$ і ρ_{Σ_σ} на Σ_σ і від аналітичної поведінки ядра $\Omega_\infty(\lambda; \xi, \eta) \in L_2^{(\rho)}(\Sigma_\sigma; \mathbb{C}) \otimes L_2^{(\rho)}(\Sigma_\sigma; \mathbb{C})$, $\xi, \eta \in \Sigma_\sigma$, для всіх $\lambda \in \sigma(L)$. В [9] було також встановлено для будь-якого напрямку $\gamma \in \mathbb{S}^{m-1}$ залежність ядер $\hat{K}_\pm(\mathbf{\Omega}) \in H_- \otimes H_-$ від регуляризованого визначника резольвенти $R_\mu(L) \in \mathcal{B}(H)$ оператора (3.1), де $\mu \in \mathbb{C}/\sigma(L)$ є регулярною точкою. Цю залежність можна також прояснити, якщо використати підхід розділу 2.

3.2. Двовимірний оператор Дірака

Визначимо в $H := L_2(\mathbb{R}^2; \mathbb{C}^2)$ двовимірний оператор типу Дірака

$$\tilde{\mathrm{L}}_1(x; \partial) := \begin{pmatrix} \partial/\partial x_1 & \tilde{u}_1(x) \\ \tilde{u}_2(x) & \partial/\partial x_2 \end{pmatrix}, \tag{3.10}$$

де $x := (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, і коефіцієнти $\tilde{u}_j \in W_2^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{C})$, $j = \overline{1,2}$. Трансформаційні властивості оператора (3.11) були вивчені в [23] ретельно Л. П. Нижником. Зокрема, ним побудовано деякий спеціальний клас операторів трансмутації типу Дельсарта–Дарбу у вигляді

$$\mathbf{\Omega}_\pm = \mathbf{1} + \int\limits_{S_\pm^{(2)}\left(\sigma_x^{(1)}, \sigma_\infty^{(1)}\right)} dy\, \hat{K}_\pm(\mathbf{\Omega})(x; y)(\cdot), \tag{3.11}$$

де для двох ортонормованих версорів γ_1 та $\gamma_2 \in \mathbb{S}^1$, $\|\gamma_1\| = 1 = \|\gamma_2\|$,

$$\begin{aligned} S_+^{(2)}\left(\sigma_x^{(1)}, \sigma_\infty^{(1)}\right) &:= \{y \in \mathbb{R}^2 : \langle x - y, \gamma_1 \rangle \geq 0\} \cap \{y \in \mathbb{R}^2 : \langle x - y, \gamma_2 \rangle \geq 0\}, \\ S_-^{(2)}\left(\sigma_x^{(1)}, \sigma_\infty^{(1)}\right) &:= \{y \in \mathbb{R}^2 : \langle x - y, \gamma_1 \rangle \leq 0\} \cup \{y \in \mathbb{R}^2 : \langle x - y, \gamma_2 \rangle \leq 0\}. \end{aligned} \tag{3.12}$$

У випадку, коли $\langle x,\gamma_j\rangle = x_j \in \mathbb{R}$, $j=\overline{1,2}$, відповідне ядро

$$\hat{K}_+(\mathbf{\Omega}) = \begin{pmatrix} K^{(1)}_{+,11}\delta_{\langle y-x,\gamma_1\rangle} + K^{(0)}_{+,11}(x;y) & K^{(1)}_{+,12}\delta_{\langle y-x,\gamma_2\rangle} + K^{(0)}_{+,12} \\ K^{(1)}_{+,21}\delta_{\langle y-x,\gamma_1\rangle} + K^{(0)}_{+,21}(x;y) & K^{(1)}_{+,22}\delta_{\langle y-x,\gamma_2\rangle} + K^{(0)}_{+,22} \end{pmatrix} \tag{3.13}$$

є сингулярною з особливістю типу дельта-функції Дірака, локалізованою на променях $\langle y-x,\gamma_2\rangle = 0$ і $\langle y-x,\gamma_1\rangle = 0$, з всіма регулярними коефіцієнтами $K^{(l)}_{+,ij} \in C^1(\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2;\mathbb{C})$ для всіх $i,j=\overline{1,2}$ та $l=\overline{0,1}$. Така властивість трансмутаційних ядер для випадку збуреного оператора Лапласа (3.1) спостерігалася також в [9], де воно мотивувалось необхідними умовами диференціальності для перетвореного оператора $\tilde{L}(x;\partial) \in \mathcal{L}(H)$. Як легко можна переконатися, ці самі причини існування сингулярностей містяться в (3.13).

Розглянемо тепер загальний вираз типу (3.3) для відповідних підпросторів $S^{(2)}_{\pm}(\sigma^{(1)}_x,\sigma^{(1)}_\infty)$, що напинають замкнений некомпактний цикл $\sigma^{(1)}_x \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^2)$ і нескінченну точку $\sigma^{(1)}_\infty := \infty \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^2)$. Біжуча точка $x\in\sigma^{(1)}_x$ береться довільною. Ядра $\hat{K}_\pm(\mathbf{\Omega}) \in H_-\times H_-$ в (3.11) задовольняють стандартні умови (2.26) та (2.27), тобто

$$\begin{gathered} (\tilde{\mathrm{L}}_{1,ext}\otimes\mathbf{1})\hat{K}_\pm(\mathbf{\Omega}) = (\mathbf{1}\otimes \mathrm{L}^*_{1,ext})\hat{K}_\pm(\mathbf{\Omega}), \\ [\mathrm{L}_1,\Phi(\mathbf{\Omega})]=0 \end{gathered} \tag{3.14}$$

для деякого матричного диференціального оператора Дірака $\mathrm{L}_1 \in \mathcal{L}(H)$ в формі (3.11). Разом з цим оператором Дірака в [23,24] вивчався наступний матричний диференціальний оператор другого порядку

$$\tilde{\mathrm{L}}_2(x;\partial) := \mathbf{1}\frac{\partial}{\partial t} + \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \pm \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \tilde{v}_2 & -2\frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x_2} \\ -2\frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial x_1} & \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \pm \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \tilde{v}_1 \end{pmatrix} \tag{3.15}$$

в параметричному просторі $\mathcal{H} := C^1(\mathbb{R};H)$, для якого було розвинута теорія розсіяння і подане її застосування до побудови солітоноподібних точних розв'язків для так званої нелінійної динамічної системи Деві–Стюартсона з частковими похідними. Останнє грунтувалося на факті, що два оператори $\tilde{\mathrm{L}}_1$ і $\tilde{\mathrm{L}}_2 \in \mathcal{L}(H)$ комутують один з одним. А саме, розглянемо оператори Вольтерра $\mathbf{\Omega}_\pm \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, що реалізують наступні трансмутації Дельсарта–Дарбу:

$$\tilde{\mathrm{L}}_1\mathbf{\Omega}_\pm = \mathbf{\Omega}_\pm \mathrm{L}_1, \quad \tilde{\mathrm{L}}_2\mathbf{\Omega}_\pm = \mathbf{\Omega}_\pm \mathrm{L}_2. \tag{3.16}$$

Тут ми поклали

$$
\begin{aligned}
\mathrm{L}_1(x;\partial) &:= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} \end{pmatrix}, \\
\mathrm{L}_2(x;\partial) &:= \mathbf{1}\frac{\partial}{\partial t} + \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \pm \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \alpha_2(x_2) & 0 \\ 0 & \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \pm \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \alpha_1(x_1) \end{pmatrix},
\end{aligned} \tag{3.17}
$$

де $\alpha_j \in W_2^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$, $j=\overline{1,2}$, є деякі задані функції. Очевидно, що оператори (3.17) комутують один з одним. Тоді, якщо оператори $\mathbf{\Omega}_\pm \in \mathcal{L}(H)$ існують і задовольняють (3.16), то тоді також справджуються наступні комутаційні умови

$$
[\tilde{\mathrm{L}}_1, \tilde{\mathrm{L}}_2] = 0, \tag{3.18}
$$

що стверджувалося вище і ефективно використовувалося раніше в [23, 24].

Пригадаємо тепер, що для існування оборотних операторів $\mathbf{\Omega}_\pm \in \mathcal{L}(H)$ мусять задовольнятися додаткові умови на ядра (3.14) і

$$
\begin{gathered}
(\tilde{\mathrm{L}}_{2,ext} \otimes \mathbf{1})\hat{K}_\pm(\mathbf{\Omega}) = (\mathbf{1} \otimes \mathrm{L}^*_{2,ext})\hat{K}_\pm(\mathbf{\Omega}), \\
[\mathrm{L}_2, \Phi(\mathbf{\Omega})] = 0,
\end{gathered} \tag{3.19}
$$

де, як і раніше, оператор $\Phi(\mathbf{\Omega}) \in \mathcal{B}_\infty(H)$, визначений виразом (3.7) як

$$
\mathbf{\Omega} := \mathbf{1} + \Phi(\mathbf{\Omega}). \tag{3.20}
$$

Завдяки очевидній комутаційній умові (3.18) множина рівнянь (3.14) та (3.19) є сумісна і приводить до виразу типу (3.11), де ядро $\hat{K}_+(\mathbf{\Omega}) \in H_- \otimes H_-$ задовольняє множину диференціальних рівнянь, що узагальнють рівняння з [23, 24]:

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial K_{+,11}}{\partial x_1} + \frac{\partial K_{+,11}}{\partial y_1} + \tilde{u}_1 K_{+,21} = 0, \quad \frac{\partial K_{+,12}}{\partial x_1} + \frac{\partial K_{+,12}}{\partial y_1} + \tilde{u}_1 K_{+,22} = 0, \\
\frac{\partial K_{+,21}}{\partial x_2} + \frac{\partial K_{+,21}}{\partial x_1} + \tilde{u}_2 K_{+,11} = 0, \quad \frac{\partial K_{+,22}}{\partial x_2} + \frac{\partial K_{+,22}}{\partial y_2} + \tilde{u}_2 K_{+,12} = 0,
\end{gathered} \tag{3.21}
$$

$$
\begin{aligned}
\pm \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x_2} K_{+,21} = \frac{\partial K_{+,11}}{\partial t} &+ \Big[\Big(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial y_1^2}\Big) \pm \Big(\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2}{\partial y_2^2}\Big)\Big] K_{+,11} \\
&+ (\alpha_2(x_2) - \tilde{v}_2(x)) K_{+,11},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\pm \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x_2} K_{+,21} = \frac{\partial K_{+,22}}{\partial t} &+ \Big[\Big(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial y_1^2}\Big) \pm \Big(\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2}{\partial y_2^2}\Big)\Big] K_{+,22} \\
&+ (\alpha_1(x_1) - \tilde{v}_1(x)) K_{+,22},
\end{aligned}
$$

$$\mp 2\frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x_2}K_{+,22} = \frac{\partial K_{+,12}}{\partial t} + \Big[\Big(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial y_1^2}\Big) \pm \Big(\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2}{\partial y_2^2}\Big)\Big]K_{+,12} + (\alpha_1(x_1) - \tilde{v}_2(x))K_{+,22},$$

$$2\frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial x_1}K_{+,22} = \frac{\partial K_{+,21}}{\partial t} + \Big[\Big(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial y_1^2}\Big) \pm \Big(\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2}{\partial y_2^2}\Big)\Big]K_{+,21} + (\alpha_2(x_2) - \tilde{v}_1(x))K_{+,11}.$$

Більше того, виконуються наступні умови

$$\begin{aligned} &\tilde{u}_1(x) = -K^{(0)}_{+,12}\big|_{y=x}, && \tilde{u}_2(x) = -K^{(0)}_{+,21}\big|_{y=x}, \\ &\tilde{v}_2(x)|_{x_1=-\infty} = \alpha_2(x_2), && \tilde{v}_1(x)|_{x_2=-\infty} = \alpha_1(x_1) \end{aligned} \tag{3.22}$$

для всіх $x \in \mathbb{R}^2$ та $y \in \operatorname{supp} \hat{K}_+(\mathbf{\Omega})$, де ми врахували розклад

$$\hat{K}_+(\mathbf{\Omega}) = \sum_{s=0}^{p(K_+)} K_+^{(s)} \delta^{(s-1)}_{\sigma_x^{(1)}} \tag{3.23}$$

для деякого скінченного цілого $p(K_+) \in \mathbb{Z}_+$ стосовно функції Дірака $\delta_{\sigma_x^{(1)}} : W_2^q(\mathbb{R}^2;\mathbb{C}) \to \mathbb{R}$, $q \in \mathbb{Z}_+$, та її похідних, з носієм (див. [11, Розділ 3]), що збігається із замкненим циклом $\sigma_x^{(1)} \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^2)$.

Зауваження 3.1. Стосовно спеціального випадку (3.13), обговореного раніше в [23, 24], то легко отримується, що $p(K_+) = 1$ і $\sigma_x^{(1)} = \partial(\cap_{j=\overline{1,2}}\{y \in \mathbb{R}^2 : \langle y - x, \gamma_j\rangle = 0\}) \subset \operatorname{supp} \hat{K}_+(\mathbf{\Omega})$. Раніше було також показано, що рівняння типу (3.21) і (3.22) мають розв'язки, якщо має розв'язки рівняння Гельфанда–Левітана–Марченка (2.25).

Використовуючи тепер точні форми "одягнених" операторів L_1 і $\mathrm{L}_2 \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, легко отримати з (3.14) та (3.19) відповідну множину диференціальних рівнянь для компонент ядра $\hat{\Phi}(\mathbf{\Omega}) \in H_- \otimes H_-$:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \Phi_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \Phi_{11}}{\partial y_1} = 0, && \frac{\partial \Phi_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \Phi_{12}}{\partial y_1} = 0, \\ &\frac{\partial \Phi_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \Phi_{21}}{\partial y_2} = 0, && \frac{\partial \Phi_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \Phi_{22}}{\partial y_2} = 0, \end{aligned} \tag{3.24}$$

$$\frac{\partial \Phi_{11}}{\partial t} \pm \Big(\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2}{\partial y_2^2}\Big)\Phi_{11} + (\alpha_2(y_2) - \alpha_2(x_2))\Phi_{11} = 0,$$

$$\frac{\partial \Phi_{12}}{\partial t} \pm \Big(\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2}{\partial y_2^2}\Big)\Phi_{12} + (\alpha_1(y_1) - \alpha_2(x_2))\Phi_{12} = 0,$$

$$\frac{\partial \Phi_{21}}{\partial t} + \Big(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial y_1^2}\Big)\Phi_{21} + (\alpha_2(y_2) - \alpha_1(x_1))\Phi_{21} = 0,$$
$$\frac{\partial \Phi_{22}}{\partial t} + \Big(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial y_1^2}\Big)\Phi_{22} + (\alpha_1(y_1) - \alpha_1(x_1))\Phi_{22} = 0$$

для всіх $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$. Отримані вище рівняння (3.24) узагальнюють рівняння, знайдені раніше в [23, 24] і використані для інтегрування добре відомого диференціального рівняння Деві–Стюартсона [10, 25, 40] і знаходження так званих солітонних розв'язків. Стосовно нашого узагальненого випадку, ядро (3.23) є розв'язком наступних рівнянь типу Гельфанда–Левітана–Марченка:

$$\begin{aligned} &K_+^{(0)}(x;y) + \Phi^{(0)}(x;y) + \int\limits_{S_+^{(2)}\left(\sigma_x^{(1)},\sigma_\infty^{(1)}\right)} K_+^{(0)}(x;\xi)\Phi^{(0)}(\xi;y)\, d\xi + \\ &\qquad\qquad + \int\limits_{\sigma_x^{(1)}} K_+^{(1)}(x;\xi)\Phi^{(0)}(\xi;y)\, d\sigma_x^{(1)} = 0, \\ &K_+^{(1)}(x;y) + \Phi^{(1)}(x;y) + \int\limits_{S_+^{(2)}\left(\sigma_x^{(1)},\sigma_\infty^{(1)}\right)} K_+^{(0)}(x;\xi)\Phi^{(1)}(\xi;y)\, d\xi + \\ &\qquad\qquad + \int\limits_{\sigma_x^{(1)}} K_+^{(1)}(x;\xi)\Phi^{(1)}(\xi;y)\, d\sigma_x^{(1)} = 0, \end{aligned} \tag{3.25}$$

де $y \in S_+^{(2)}(\sigma_x^{(1)}, \sigma_\infty^{(1)})$ для всіх $x \in \mathbb{R}^2$ і, за означенням,

$$\hat{\Phi}(\mathbf{\Omega}) := \Phi^{(0)} + \Phi^{(1)}\delta_{\sigma_x^{(1)}} \tag{3.26}$$

є відповідним до (3.23) розкладом ядра . Оскільки ядро (3.26) є сингулярним, диференціальні рівняння (3.24) мусять бути трактовані в сенсі розподілів [11].

Беручи до уваги точну форму "одягнених" диференціальних операторів $\mathrm{L}_j \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, $j = \overline{1,2}$, заданих через (3.11) і (3.15), легко отримуємо, що умова комутативності (3.18) приводить до умови комутативності $\tilde{\mathrm{L}}_j \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, $j = \overline{1,2}$, є еквівалентною до згаданої вище динамічної системи Деві–Стюартсона

$$\begin{aligned} d\tilde{u}_1/dt &= -(\tilde{u}_{1,xx} + \tilde{u}_{1,yy}) + 2(\tilde{v}_1 - \tilde{v}_2), \\ d\tilde{u}_2/dt &= \tilde{u}_{2,xx} + \tilde{u}_{2,yy} + 2(\tilde{v}_2 - \tilde{v}_1), \\ \tilde{v}_{1,x} &= (\tilde{u}_1\tilde{u}_2)_y, \quad \tilde{v}_{2,x} = (\tilde{u}_1\tilde{u}_2)_x \end{aligned} \tag{3.27}$$

на функціональному нескінченно-вимірному многовиді $M_u \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^2;\mathbb{C})$. Точні солітоноподібні розв'язки для (3.27) задаються виразами (3.22), де ядро $K_+^{(1)}(\mathbf{\Omega})$ розв'язує систему лінійних рівнянь (3.25). З іншого боку, існує точний вираз (2.4), який розв'язує множину "одягнених" рівнянь

$$\tilde{\mathrm{L}}_1\tilde{\psi}^{(0)}(\eta) = 0, \qquad \tilde{\mathrm{L}}_2\tilde{\psi}^{(0)}(\eta) = 0. \tag{3.28}$$

Оскільки ядра $\Omega(\lambda,\mu) \in L_2^{(\rho)}(\Sigma;\mathbb{C}) \otimes L_2^{(\rho)}(\Sigma;\mathbb{C})$ для $\lambda,\mu \in \Sigma$, $(t;x) \in M_{\mathrm{T}} \cap S_+^{(2)}(\sigma_x^{(1)},\sigma_\infty^{(1)})$ задані за допомогою точних виразів (2.2), то можна знайти з допомогою простих обчислень відповідні аналітичні вирази для функцій $(\tilde{u}_1,\tilde{u}_2) \in M_u$, що розв'язують динамічну систему (3.27). Цю процедуру часто називають перетворенням типу Дарбу і яку було використано в [33] як частковий випадок конструкції вище для знаходження солітоноподібних розв'язків динамічної системи Деві–Стюартсона (3.27) і асоційованого з нею модифікованого двовимірного потоку Кортевега–де Фріза на M_u. Більше того, як це можна зауважити з техніки, використаної для побудови операторів трасмутації Дельсарта–Дарбу $\mathbf{\Omega}_\pm \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, множина розв'язків (3.27), отримана за допомогою перетворень Дарбу, збігається повністю з відповідною множиною розв'язків, отриманих за допомогою розв'язку асоційованої множини інтегральних рівнянь Гельфанда–Левітана–Марченка (3.24) та (3.25).

3.3. Узагальнений афінний диференціальний комплекс де Рама–Ходжа і асоційовані узагальнені самодуальні потоки Янга–Мілса

Розглянемо наступну множину афінних диференціальних виразів в $\mathcal{H} := C^1(\mathbb{R}^{m+1};H)$, $H := L_2(\mathbb{R}^m;\mathbb{C}^N)$:

$$\mathrm{L}_i(\lambda) := \mathbf{1}\frac{\partial}{\partial p_i} - \lambda\frac{\partial}{\partial x_i} + A_i(x;p|t), \tag{3.29}$$

де $x \in \mathbb{R}^m$, $(t,p) \in \mathbb{R}^{m+1}$, матриці $A_i \in C^1(\mathbb{R}^{m+1};S(\mathbb{R}^m;\mathrm{End}\,\mathbb{C}^N))$, $i = \overline{1,m}$, і параметр $\lambda \in \mathbb{C}$. Можна тепер легко побудувати точний узагальнений диференціальний комплекс де Рама-Ходжа на $M_{\mathrm{T}} := \mathbb{R}^{m+1}\times\mathbb{R}^m$ як

$$\mathcal{H} \longrightarrow \Lambda(M_{\mathrm{T}};\mathcal{H}) \stackrel{d_{\mathcal{L}(\lambda)}}{\longrightarrow} \Lambda^1(M_{\mathrm{T}};\mathcal{H}) \longrightarrow \stackrel{d_{\mathcal{L}(\lambda)}}{\cdots} \longrightarrow \Lambda^{2m+1}(M_{\mathrm{T}};\mathcal{H}) \stackrel{d_{\mathcal{L}(\lambda)}}{\longrightarrow} 0, \tag{3.30}$$

де, за означенням, диференціювання

$$d_{\mathcal{L}(\lambda)} := dt \wedge \mathrm{B}(\lambda) + \sum_{i=1}^m dp_i \wedge \mathrm{L}_i(\lambda) \tag{3.31}$$

і афінна матриця

$$\mathrm{B}(\lambda) := \partial/\partial t - \sum_{s=0}^{n(B)+q} B_s(x;p|t)\lambda^{n(B)-s} \tag{3.32}$$

з матрицями $B_s \in C^1(\mathbb{R}^{m+1}; S(\mathbb{R}^m; \mathrm{End}\,\mathbb{C}^N))$, $s = \overline{0, n(B)+q}$, $n(B)$, $q \in \mathbb{Z}_+$. Диференціальний комплекс (3.30) буде точним для всіх $\lambda \in \mathbb{C}$ тоді і тільки тоді, коли справедливі наступні [15] узагальнені самодуальні рівняння Янга–Мілса

$$\begin{gathered} \partial A_i/\partial p_j - \partial A_j/\partial p_i - [A_i, A_j] = 0, \quad \partial A_i/\partial x_j - \partial A_j/\partial x_i = 0, \\ \partial B_0/\partial x_i = 0, \quad \partial B_{n(B)+q}/\partial p_i = 0, \\ \partial B_s/\partial x_i = \partial B_{s-1}/\partial p_i + [A_i, B_{s-1}] = 0, \\ \partial A_i/\partial t + \partial B_{n(B)}/\partial p_i - \partial B_{n(B)+1}/\partial x_i + [A_i, B_{n(B)}] = 0 \end{gathered} \tag{3.33}$$

для всіх $i, j = \overline{1, m}$ і $s = \overline{0, n(B)} \vee \overline{n(B)+q, n(B)+2}$. Припустимо тепер, що виконані умови (3.33) на M_{T}. Тоді, роблячи заміну $\mathbb{C} \ni \lambda \to \partial/\partial\tau : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, $\tau \in \mathbb{R}$, знаходимо наступну множину чисто диференціальних виразів

$$\begin{aligned} \mathrm{L}_{i(\tau)} &:= \mathbf{1}\frac{\partial}{\partial p_i} - \frac{\partial^2}{\partial\tau\partial x_i} + A_i(x;p|t), \\ \mathrm{B}_{(\tau)} &:= \partial/\partial t - \sum_{s=0}^{n(B)+q} B_s(x;p|t)\Big(\frac{\partial}{\partial\tau}\Big)^{n(B)-s}, \end{aligned} \tag{3.34}$$

де матриці A_i, $i = \overline{1, m}$, і B_s, $s = \overline{0, n(B)+q}$, не залежать від змінної $\tau \in \mathbb{R}$. З допомогою операторних виразів (3.34) можна тепер побудувати новий диференціальний комплекс, пов'язаний з комплексом (3.30):

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{(\tau)} \longrightarrow \Lambda(M_{\mathrm{T},\tau}; \mathcal{H}_{(\tau)}) \xrightarrow{d_{\mathcal{L}}} \Lambda^1(M_{\mathrm{T},\tau}; \mathcal{H}_{(\tau)}) \longrightarrow \overset{d_{\mathcal{L}}}{\cdots} \longrightarrow \\ \longrightarrow \Lambda^{2m+2}(M_{\mathrm{T},\tau}; \mathcal{H}_{(\tau)}) \xrightarrow{d_{\mathcal{L}}} 0, \end{aligned} \tag{3.35}$$

де, за означенням, $\mathcal{H}_{(\tau)} := C^1(\mathbb{R}^{m+1}; H_{(\tau)})$, $H_{(\tau)} := L_2(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_\tau; \mathbb{C}^N)$ і

$$d_{\mathcal{L}} := dt \wedge \mathrm{B}_{(\tau)} + \sum_{i=1}^{m} dp_i \wedge \mathrm{L}_{i(\tau)}. \tag{3.36}$$

Завдяки умові (3.33) справедлива наступна важлива лема.

Лема 3.1. *Диференціальний комплекс* (3.35) *є точним.*

Таким чином, можна побудувати стандартний узагальнений розклад типу де Рама–Ходжа простору Гільберта

$$\mathcal{H}_{\Lambda}(M_{\mathrm{T},\tau}) := \overset{k=2m+2}{\underset{k=0}{\oplus}} \mathcal{H}^{k}_{\Lambda}(M_{\mathrm{T},\tau}), \tag{3.37}$$

а також відповідний ланцюжок Гельфанда, оснащений за Гільбертом–Шмідтом

$$\mathcal{H}_{\Lambda,+}(M_{\mathrm{T},\tau}) \subset \mathcal{H}_{\Lambda}(M_{\mathrm{T},\tau}) \subset \mathcal{H}_{\Lambda,-}(M_{\mathrm{T},\tau}). \tag{3.38}$$

Використовуючи тепер результати, отримані в розділі 1, можна визначити замкнені підпростори Дельсарта $\mathcal{H}_{0(\tau)}$ і $\tilde{\mathcal{H}}_{0(\tau)} \subset \mathcal{H}_{(\tau)-}$, асоційовані з точним комплексом (3.35):

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_{0(\tau)} := \Big\{&\psi^{(0)}_{(\tau)}(\xi) \in \mathcal{H}^{0}_{\Lambda,-}(M_{\mathrm{T},\tau}) : \mathrm{L}_{j(\tau)}\psi^{(0)}_{(\tau)}(\xi) = 0,\ \mathrm{B}_{(\tau)}\psi^{(0)}_{(\tau)}(\xi) = 0,\\
&\psi^{(0)}_{(\tau)}(\xi)|_{\Gamma} = 0,\ \psi^{(0)}_{(\tau)}(\xi)|_{t=0} = e^{\lambda\tau}\psi^{(0)}_{\lambda}(\eta) \in \mathcal{H}^{0}_{\Lambda,-}(M_{\mathbb{R}^m,\tau}),\\
&\mathrm{L}_{j}(\lambda)\psi^{(0)}_{\lambda}(\eta) = 0,\ \xi = (\lambda;\eta) \in \Sigma : = \mathbb{C} \times \Sigma^{(m)}_{\mathbb{C}}\Big\},\\
\tilde{\mathcal{H}}_{0(\tau)} := \Big\{&\tilde{\psi}^{(0)}_{(\tau)}(\xi) \in \mathcal{H}^{0}_{\Lambda,-}(M_{\mathrm{T},\tau}) : \tilde{\mathrm{L}}^{(0)}_{j(\tau)}\tilde{\psi}^{(0)}_{(\tau)}(\xi) = 0,\ \tilde{\mathrm{B}}_{(\tau)}\tilde{\psi}^{(0)}_{(\tau)}(\xi) = 0,\\
&\tilde{\psi}^{(0)}_{(\tau)}(\xi)|_{\tilde{\Gamma}} = 0,\ \tilde{\psi}^{(0)}_{(\tau)}(\xi)|_{t=0} = e^{\lambda\tau}\tilde{\psi}^{(0)}_{\lambda}(\eta) \in \mathcal{H}^{0}_{\Lambda,-}(M_{\mathbb{R}^m,\tau}),\\
&\tilde{\mathrm{L}}_{j}(\lambda)\tilde{\psi}^{(0)}_{\lambda}(\eta) = 0,\ \xi = (\lambda;\eta) \in \Sigma : = \mathbb{C} \times \Sigma^{(m)}_{\mathbb{C}}\Big\},
\end{aligned} \tag{3.39}$$

де Γ і $\tilde{\Gamma} \subset M_{\mathrm{T},\tau}$ є деякими гладкими гіперповерхнями. Подібні вирази відповідають також спряженим замкненим підпросторам $\mathcal{H}^{*}_{0(\tau)}$ і $\tilde{\mathcal{H}}^{*}_{0(\tau)} \subset \mathcal{H}^{*}_{\tau,-}$:

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{H}}_{0(\tau)} := \Big\{&\varphi^{(0)}_{(\tau)}(\xi) \in \mathcal{H}^{0}_{\Lambda,-}(M_{\mathrm{T},\tau}) : \mathrm{L}^{*}_{j(\tau)}\varphi^{(0)}_{(\tau)}(\xi) = 0,\ \mathrm{B}_{(\tau)}\varphi^{(0)}_{(\tau)}(\xi) = 0,\\
&\varphi^{(0)}_{(\tau)}(\xi)|_{\Gamma} = 0,\ \varphi^{(0)}_{(\tau)}(\xi)|_{t=0} = e^{-\bar{\lambda}\tau}\varphi^{(0)}_{\lambda}(\eta) \in \mathcal{H}^{0}_{\Lambda,-}(M_{\mathbb{R}^m,\tau}),\\
&\mathrm{L}^{*}_{j}(\lambda)\varphi^{(0)}_{\lambda}(\eta) = 0,\ \xi = (\lambda;\eta) \in \Sigma : = \mathbb{C} \times \Sigma^{(m)}_{\mathbb{C}}\Big\},\\
\tilde{\mathcal{H}}_{0(\tau)} := \Big\{&\tilde{\varphi}^{(0)}_{(\tau)}(\xi) \in \mathcal{H}^{0}_{\Lambda,-}(M_{\mathrm{T},\tau}) : \tilde{\mathrm{L}}^{*}_{j(\tau)}\tilde{\varphi}^{(0)}_{(\tau)}(\xi) = 0,\ \tilde{\mathrm{B}}^{*}_{(\tau)}\tilde{\varphi}^{(0)}_{(\tau)}(\xi) = 0,\\
&\tilde{\varphi}^{(0)}_{(\tau)}(\xi)|_{\tilde{\Gamma}} = 0,\ \tilde{\varphi}^{(0)}_{(\tau)}(\xi)|_{t=0} = e^{-\bar{\lambda}\tau}\tilde{\varphi}^{(0)}_{\lambda}(\eta) \in \mathcal{H}^{0}_{\Lambda,-}(M_{\mathbb{R}^m,\tau}),\\
&\tilde{\mathrm{L}}^{*}_{j}(\lambda)\tilde{\varphi}^{(0)}_{\lambda}(\eta) = 0,\ \xi = (\lambda;\eta) \in \Sigma : = \mathbb{C} \times \Sigma^{(m)}_{\mathbb{C}}\Big\}.
\end{aligned} \tag{3.40}$$

Враховуючи замкнені підпростори (3.40) і (3.39), можна відповідно побудувати ядро типу Дарбу $\tilde{\Omega}_{(t,x;\tau)}(\eta,\xi) \in L^{(\rho)}_{2}(\Sigma^{(m)}_{\mathbb{C}};\mathbb{C}) \otimes L^{(\rho)}_{2}(\Sigma^{(m)}_{\mathbb{C}};\mathbb{C})$,

$\eta, \xi \in \Sigma_{\mathbb{C}}^{(m)}$, і далі відповідні відображення трансмутацій Дельсарта $\mathbf{\Omega}_{\pm} \in \mathcal{L}(H_{(\tau)})$. А саме, припустимо, що справедливі наступні умови

$$\psi_{(\tau)}^{(0)}(\xi) := \tilde{\psi}_{(\tau)}^{(0)}(\xi) \cdot \tilde{\Omega}_{(t,p;x;\tau)}^{-1} \tilde{\Omega}_{(t_0,p_0,x_0;\tau)} \tag{3.41}$$

для будь-якого $\xi \in \mathbb{C} \times \Sigma_{\mathbb{C}}^{(m)}$, де

$$\begin{gathered} \tilde{\Omega}_{(t,x;\tau)}(\mu,\xi) := \int\limits_{\sigma_{(t;x;\tau)}} \tilde{\Omega}_{(\tau)}^{(2m+1)}[e^{-\bar{\lambda}\tau}\tilde{\varphi}^{(0)}(\mu), e^{\lambda\tau}\tilde{\psi}^{(0)}(\eta)\, dx \wedge dp \wedge dt], \\ \tilde{Z}_{(\tau)}^{(2m+1)}\Big[e^{-\bar{\lambda}\tau}\tilde{\varphi}^{(0)}(\mu), \sum_{i=1}^{m} e^{\lambda\tau}\tilde{\psi}^{(0)}(\xi_{(i)}) \wedge d\tau \wedge dx \overset{m}{\underset{j\neq i}{\wedge}} dp_j\Big] := \\ := d\tilde{\Omega}_{(\tau)}^{(2m)}\Big[e^{-\bar{\lambda}\tau}\tilde{\varphi}^{(0)}(\mu), \sum_{i=1}^{m} e^{\lambda\tau}\tilde{\psi}^{(0)}(\xi_{(i)}) \wedge d\tau \wedge dx \overset{m}{\underset{j\neq i}{\wedge}} dp_j\Big], \end{gathered} \tag{3.42}$$

і, відповідно до (1.24), справедливе співвідношення

$$\begin{gathered} \Big\langle d_{\tilde{\mathcal{L}}}^{*}\tilde{\varphi}^{(0)}(\mu)e^{-\bar{\lambda}\tau}, *\sum_{i=1}^{m} e^{\lambda\tau}\tilde{\psi}^{(0)}(\xi_{(i)})\, dt \wedge d\tau \wedge dx \overset{m}{\underset{j\neq i}{\wedge}} dp_j \Big\rangle = \\ = \Big\langle (*)^{-1}\tilde{\varphi}^{(0)}(\mu)e^{-\bar{\lambda}\tau}, d_{\tilde{\mathcal{L}}}\Big(\sum_{i=1}^{m} e^{\lambda\tau}\tilde{\psi}^{(0)}(\xi_{(i)})\, dt \wedge d\tau \wedge dx \overset{m}{\underset{j\neq i}{\wedge}} dp_j\Big)\Big\rangle + \\ + d\tilde{Z}_{(\tau)}^{(2m+1)}\Big[\tilde{\varphi}^{(0)}(\mu)e^{-\bar{\lambda}\tau}, \sum_{i=1}^{m} e^{\lambda\tau}\tilde{\psi}^{(0)}(\xi_{(i)})\, dt \wedge d\tau \wedge dx \overset{m}{\underset{j\neq i}{\wedge}} dp_j\Big], \end{gathered} \tag{3.43}$$

що визначає точну $(2m+1)$-форму $\tilde{Z}_{(\tau)}^{(2m+1)} \in \Lambda^{2m+1}(M_{\mathrm{T},\tau}; \mathbb{C})$. Обчислимо тепер трансформовані за Дельсартом диференціальні вирази

$$\mathrm{L}_{j(\tau)} := \hat{\mathbf{\Omega}}_{(\tau)\pm}^{-1}\tilde{\mathrm{L}}_{j(\tau)}\hat{\mathbf{\Omega}}_{(\tau)\pm}, \qquad \mathrm{B}_{(\tau)} := \hat{\mathbf{\Omega}}_{(\tau)\pm}^{-1}\tilde{\mathrm{B}}_{(\tau)}\hat{\mathbf{\Omega}}_{(\tau)\pm} \tag{3.44}$$

для кожного $j = \overline{1,m}$, де, за визначенням,

$$\begin{gathered} \tilde{\mathrm{L}}_{j(\tau)} := \mathbf{1}\frac{\partial}{\partial p_j} - \frac{\partial^2}{\partial\tau\partial x_j} + \bar{A}_j, \\ \tilde{\mathrm{B}}_{(\tau)} := \partial/\partial t - \sum_{s=0}^{n(B)+q} \bar{B}_s\Big(\frac{\partial}{\partial\tau}\Big)^{n(B)-s} \end{gathered} \tag{3.45}$$

з усіма матрицями $\bar{A}_j \in \operatorname{End}\mathbb{C}^m$, $j = \overline{1,m}$, і $\bar{B}_s \in \operatorname{End}\mathbb{C}^m$, $s = \overline{0, n(B)+q}$, що є константами. Це означає, зокрема, що справедливі комутаційні співвідношення

$$[\tilde{\mathrm{L}}_{j(\tau)}, \tilde{\mathrm{L}}_{i(\tau)}] = 0, \qquad [\tilde{\mathrm{L}}_{j(\tau)}, \tilde{\mathrm{B}}_{(\tau)}] = 0 \tag{3.46}$$

для всіх $i, j = \overline{1, m}$. Завдяки виразам (3.44), мають місце індуковані комутаційні співвідношення

$$[\mathrm{L}_{j(\tau)}, \mathrm{L}_{i(\tau)}] = 0, \qquad [\mathrm{L}_{j(\tau)}, \mathrm{B}_{(\tau)}] = 0, \tag{3.47}$$

що точно збігаються з співвідношеннями (3.33). Більше того, редукуючи наші диференціальні вирази (3.44) на функціональні підпростори $\mathcal{H}_{(\lambda)} := e^{\lambda\tau}\mathcal{H}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, отримуємо множину афінних диференціальних виразів (3.29) та (3.32). Запишемо тепер відповідно зредуковані оператори трансмутації Дельсарта

$$\hat{\mathbf{\Omega}}_{\pm} = \mathbf{1} - \int\limits_{\Sigma_{\mathbb{C}}^{(m)}} d\rho_{\Sigma_{\mathbb{C}}^{(m)}}(\nu) \int\limits_{\Sigma_{\mathbb{C}}^{(m)}} d\rho_{\Sigma_{\mathbb{C}}^{(m)}}(\eta)\, \psi^{(0)}(\lambda;\nu) \tilde{\Omega}^{-1}_{(t_0,p_0;x_0)}(\lambda;\nu,\eta) \times$$
$$\times \int\limits_{S_{\pm}^{(2m+1)}\left(\sigma^{(2m)}_{(t,p;x)}, \sigma^{(2m)}_{(tt_0,p_0;x_0)}\right)} \tilde{Z}^{(2m+1)}\left[\tilde{\varphi}^{(0)}(\lambda;\nu), (\cdot)\sum_{i=1}^{m} dt\wedge dx \overset{m}{\underset{j\neq i}{\wedge}} dp_j\right], \tag{3.48}$$

де $\sigma^{(2m)}_{(t,p;x)}$ і $\sigma^{(2m)}_{(tt_0,p_0;x_0)} \in \mathcal{K}(M_{\mathrm{T}})$ є деякі $2m$-вимірні замкнені сингулярні сімплекси, і, за визначенням,

$$\tilde{Z}^{(2m+1)}\left[\tilde{\varphi}^{(0)}(\lambda;\nu), \sum_{i=1}^{m} \tilde{\psi}^{(0)}(\lambda;\eta_{(i)})\, dt\wedge dx \overset{m}{\underset{j\neq i}{\wedge}} dp_j\right] :=$$
$$:= \tilde{Z}^{(2m+1)}_{(\tau)}\left[e^{-\bar{\lambda}\tau}\tilde{\varphi}^{(0)}(\lambda;\nu), \sum_{i=1}^{m} e^{\lambda\tau}\tilde{\psi}^{(0)}(\lambda;\eta_{(i)})\, d\tau\wedge dt\wedge dx \overset{m}{\underset{j\neq i}{\wedge}} dp_j\right]\Bigg|_{d\tau=0},$$
$$d\tilde{\Omega}_{(t,p;x)}(\lambda;\nu,\eta) := \tilde{Z}^{(2m+1)}\left[\tilde{\varphi}^{(0)}(\lambda;\nu), \sum_{i=1}^{m} \tilde{\psi}^{(0)}(\lambda;\eta_{(i)}) dt\wedge dx \overset{m}{\underset{j\neq i}{\wedge}} dp_j\right], \tag{3.49}$$

оскільки $(2m+1)$-форма (3.49) є, завдяки (3.43), теж точною для будь-яких $(\lambda;\nu,\eta) \in \mathbb{C}\times(\Sigma_{\mathbb{C}}^{(m)}\times\Sigma_{\mathbb{C}}^{(m)})$. Таким чином, операторний вираз (3.48), якщо його застосувати до оператора (3.45), зредукованого на функціональний підпростір $\mathcal{H}_{(\lambda)} \simeq \mathcal{H}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, приводить до диференціальних виразів

$$\mathrm{L}_j(\lambda) := \hat{\mathbf{\Omega}}_{\pm}^{-1}\tilde{\mathrm{L}}_j(\lambda)\hat{\mathbf{\Omega}}_{\pm}, \qquad \mathrm{B}(\lambda) := \hat{\mathbf{\Omega}}_{\pm}^{-1}\tilde{\mathrm{B}}(\lambda)\hat{\mathbf{\Omega}}_{\pm}, \tag{3.50}$$

де $\mathrm{L}_j(\lambda)\mathcal{H}_{(\lambda)} = \mathrm{L}_{j(\tau)}\mathcal{H}_{(\lambda)}$, $\mathrm{B}(\lambda)\mathcal{H}_{(\lambda)} = \mathrm{B}_{(\tau)}(\lambda)\mathcal{H}_{(\lambda)}$, $j = \overline{1, m}$, що збігаються з афінними диференціальними виразами (3.29) і (3.32). Стосовно застосування цих результатів до знаходження точних солітоноподібних розв'язків самодуальних рівнянь Янга–Мілса (3.33), то достатньо згадати, що співвідношення (3.41), зредуковане на підпростір

$\mathcal{H}_{(\lambda)} \simeq \mathcal{H}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, приводить до наступного відображення:

$$\psi^{(0)}(\lambda;\eta) := \tilde{\psi}^{(0)}(\lambda;\eta) \cdot \tilde{\Omega}^{-1}_{(t,p;x)} \tilde{\Omega}_{(t_0,p_0;x_0)}, \tag{3.51}$$

де ядра $\tilde{\Omega}_{(t,p;x;\tau)}(\lambda;\eta,\xi) \in L_2^{(\rho)}(\Sigma_{\mathbb{C}}^{(m)};\mathbb{C}) \otimes L_2^{(\rho)}(\Sigma_{\mathbb{C}}^{(m)};\mathbb{C})$, $\eta,\xi \in \Sigma_{\mathbb{C}}^{(m)}$, для всіх $(t,p;x) \in M_{\mathrm{T}}$ і $\lambda \in \mathbb{C}$. Оскільки елемент $\psi^{(0)}(\lambda;\eta) \in \mathcal{H}_-$ для будь-яких $(\lambda;\xi) \in \mathbb{C}\times\Sigma_{\mathbb{C}}^{(m)}$ задовольняє множину диференціальних рівнянь

$$L_i(\lambda)\psi^{(0)}(\lambda;\eta) = 0, \quad B(\lambda)\psi^{(0)}(\lambda;\eta) = 0 \tag{3.52}$$

для всіх $i = \overline{1,m}$, з (3.51) та (3.52) знаходимо точні вирази для відповідних матриць A_j і $B_s \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{m+1}; S(\mathbb{R}^m; \operatorname{End}\mathbb{C}^N))$, $j = \overline{1,m}$, $s = \overline{0, n(B)+q}$, які задовольняють самодуальні рівняння Янга–Мілса (3.33). Таким чином, має місце наступна теорема.

Теорема 3.1. *Інтегральні вирази* (3.48) *в* $\mathcal{H}$ *є операторами трансмутації Дельсарта, що відповідають афінним диференціальним виразам* (3.29), (3.33) *і константним операторам*

$$\tilde{\mathrm{L}}_i(\lambda) := \mathbf{1}\frac{\partial}{\partial p_i} - \lambda\frac{\partial}{\partial x_i} + \bar{A}, \quad \tilde{\mathrm{B}}(\lambda) := \partial/\partial t - \sum_{s=0}^{n(B)+q} \bar{B}_s \lambda^{n(B)-s} \tag{3.53}$$

для будь-яких $\lambda\in\mathbb{C}$. *Відображення* (3.51) *реалізує ізоморфізми* (3.48) *між замкненими підпросторами*

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_0 := \Big\{&\psi^{(0)}(\lambda;\eta) \in \mathcal{H}_- : d_{\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)}\psi^{(0)}(\lambda;\eta) = 0, \psi^{(0)}(\lambda;\eta)|_{t=0} = \\ &= \psi_\lambda^{(0)}(\eta) \in H_-,\ \psi^{(0)}(\lambda;\eta)|_\Gamma = 0, (\lambda;\eta) \in \mathbb{C} \times \Sigma_{\mathbb{C}}^{(m)}\Big\}\end{aligned} \tag{3.54}$$

та

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{H}}_0 := \Big\{&\tilde{\psi}^{(0)}(\lambda;\eta) \in \mathcal{H}_- : d^{(0)}_{\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)}\tilde{\psi}(\lambda;\eta) = 0,\ \tilde{\psi}^{(0)}(\lambda;\eta)|_{t=0} = \\ &= \tilde{\psi}_\lambda^{(0)}(\eta) \in H_-,\ \tilde{\psi}^{(0)}(\lambda;\eta)|_{\tilde{\Gamma}} = 0, (\lambda;\eta) \in \mathbb{C}\times\Sigma_{\mathbb{C}}^{(m)}\Big\}\end{aligned} \tag{3.55}$$

для будь-якого параметра $\lambda \in \mathbb{C}$. *Більше того, вирази* (3.51) *породжують стандартні перетворення типу Дарбу для множини операторів* (3.53) *та* (3.29), (3.32) *за допомогою відповідної множини лінійних рівнянь* (3.52), *тим самим продукуючи точні солітоноподібні розв'язки самодуальних рівнянь Янга–Мілса* (3.33).

Як простий частковий наслідок з теореми 3.1 відтворюються всі результати, отримані раніше в [15], де відображення Дельсарта–Дарбу (3.51) було вибране апріорі без будь-якого доведення і мотивації в формі деякого афінного калібрувального перетворення.

Результати, подібні до отриманих вище, можуть бути з невеликими змінами застосовані також до узагальненого диференціального комплексу де Рама-Ходжа (3.30) з зовнішнім диференціюванням (3.31), де

$$\begin{aligned} \mathrm{L}_i(\lambda) &:= \mathbf{1}\frac{\partial}{\partial p_i} - \left(\sum_{k=0}^{n_i(L)} a_{ik}\lambda^{k+1}\right)\frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{k=0}^{n_i(L)} A_{ik}\lambda^k, \\ \tilde{\mathrm{B}}(\lambda) &:= \partial/\partial t - \sum_{s=0}^{n(B)+q} \bar{B}_s\lambda^{n(B)-s}, \end{aligned} \tag{3.56}$$

або

$$\begin{aligned} \mathrm{L}_i(\lambda) &:= \mathbf{1}\frac{\partial}{\partial p_i} - \left(\sum_{k=0}^{n_i(L)} a_{ik}^{(j)}\lambda^{k+1}\right)\frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{k=0}^{n_i(L)} A_{ik}\lambda^k, \\ \tilde{\mathrm{B}}(\lambda) &:= \partial/\partial t - \sum_{s=0}^{n(B)+q} \bar{B}_s\lambda^{n(B)-s}, \end{aligned} \tag{3.57}$$

для $i = \overline{1,m}$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Випадок (3.56) був проаналізований недавно в [18] за допомогою відповідного афінного перетворення калібрувального типу, яке було використане раніше в [15]. На жаль, отримані там результати є надто складними і заплутаними, тому потрібно використати більш мотивовані математично, зрозумілі і менш громіздкі техніки для знаходження перетворень типу Дельсарта–Дарбу і асоційованих з ними точних солітоноподібних розв'язків.

На завершення один з авторів (А. П.) виражає сердечну вдячність за обговорення та цінні уваги багатьом учасникам засідання Київського міського математичного семінару "Нелінійний аналіз" (14 квітня 2004), керованого академіком І. В. Скрипником, і який був піонером та ініціатором досліджень багатьох аспектів узагальненої теорії де Рама–Ходжа та її застосувань до сучасних проблем математичної фізики.

Література

[1] Yu. M. Berezansky, *Eigenfunctions expansions related with selfadjoint operators.* Kiev, Nauk. Dumka Publ., 1965 (in Russian).

[2] F. A. Berezin and M. A. Shubin, *Schrodinger equation.* Moscow, the Moscow University Publisher, 1983 (in Russian).

[3] A. L. Bukhgeim, *Volterra equations and inverse problems.* Moscow, Nauka, 1983 (in Russian).

[4] S. S. Chern, *Complex manifolds.* Chicago University Publ., USA, 1956.

[5] N. Danford and J. T. Schwartz, *Linear operators, v. 2.* InterSci. Publ., NY, 1963.

[6] B. N. Datta, and D. R. Sarkissian, *Feedback control in distributed parameter gyroscopic systems: a solution of the partial eigenvalue assignment problem* // Mechanical Systems and Signal Processing, **16** (2002), N 1, 3–17.

[7] J. Delsarte, *Sur certaines transformations fonctionelles relative aux equations lineaires aux derives partielles du second ordre* // C. R. Acad. Sci. Paris, **206** (1938), 178–182.

[8] J. Delsarte and J. Lions, *Transmutations d'operateurs differentielles dans le domain complex* // Comment. Math. Helv., **52** (1957), 113–128.

[9] L. D. Faddeev, *Quantum inverse scattering problem. II* in Modern problems of mathematics, M: VINITI Publ., **3** (1974), 93–180 (in Russian).

[10] L. D. Faddeev and L. A. Takhtadjyan, *Hamiltonian approach to soliton theory.* Moscow, Nauka, 1986 (in Russian).

[11] I. M. Gelfand and G. E. Shilov, *Generalized functions and actions upon them.* Second edition. Moscow, Nauka Publisher, 1959 (un Russian).

[12] C. Godbillon, *Geometrie differentielle et mechanique analytique.* Paris, Hermann, 1969.

[13] I. C. Gokhberg and M. G. Krein, *Theory of Volterra operators in Hilbert spaces and its applications.* Moscow, Nauka, 1967 (in Russian).

[14] J. Golenia, Y. A. Prykarpatsky, A. M. Samoilenko, and A. K. Prykarpatsky, *The general differential-geometric structure of multidimensional Delsarte transmutation operators in parametric functional spaces and their applications in soliton theory. Part 2* // Opuscula Mathematica, (2004), N 24 /arXiv: math-ph/0403056 v 1 29 Mar 2004/.

[15] C. H. Gu, *Generalized self-dual Yahg-Mills flows, explicit solutions and reductions. Acta Applicandae Mathem.* // **39** (1995), 349–360.

[16] B. G. Konopelchenko, *On the integrable equations and degenerate dispersiopn laws in multidimensional soaces* // J. Phys. A: Math. and Gen., **16** (1983), p. L311–L316.

[17] D. Levi, L. Pilloni, and P. M. Santini, *Backlund transformations for nonlinear evolution equations in* $(2+1)$*-dimensions* // Phys. Lett, **81A** (1981), N 8, 419–423.

[18] Wen. Liu, *Darboux transformations for a Lax integrable systems in* $2n$*-dimensions* // arXive:solve-int/9605002 v1 15 may 1996.

[19] Y. B. Lopatynski, *On harmonic fields on Riemannian manifolds* // Ukr. Math. Journal, **2** (1950), 56–60 (in Russian).

[20] V. B. Matveev and M. I. Salle, *Darboux-Backlund transformations and applications.* NY, Springer, 1993.

[21] Ya. V. Mykytiuk, *Factorization of Fredholmian operators* // Mathematical Studii, Proceedings of Lviv Mathematical Society, **20** (2003), N 2, 185–199 (in Ukrainian).

[22] J. C. C. Nimmo, *Darboux tarnsformations from reductions of the KP-hierarchy.* Preprint of the Dept. of Mathem. at the University of Glasgow, November 8, 2002, 11 p.

[23] L. P. Nizhnik, *Inverse scattering problems for hyperbolic equations.* Kiev, Nauk. Dumka Publ., 1991 (in Russian).

[24] L. P. Nizhnik and M. D. Pochynaiko, *The integration of a spatially two-dimensional Schrodinger equation by the inverse problem method* // Func. Anal. and Appl., **16** (1982), N 1, 80–82 (in Russian).

[25] S. P. Novikov (Editor), *Theory of solitons.* Moscow, Nauka Publ., 1980 (in Russian).

[26] M. D. Pochynaiko and Yu. M. Sydorenko, *Integrating some* $(2+1)$*-dimensional integrable systems by methods of inverse scattering problem and binary Darboux transformations* // Matematychni Studii, (2003), N 20, 119–132.

[27] A. K. Prykarpatsky, A. M. Samoilenko, and Y. A. Prykarpatsky, *The multi-dimensional Delsarte transmutation operators, their differential-geometric structure and applications. Part 1* // Opuscula Mathematica, (2003), N 23, 71–80 /arXiv:math-ph/0403054 v1 29 Mar 2004/.

[28] Y. A. Prykarpatsky, A. M. Samoilenko, A. K. Prykarpatsky, and V. Hr. Samoylenko, *The Delsarte-Darboux type binary transformations and their differenetial-geometric and operator staructure* // arXiv: math-ph/0403055 v 1 29 Mar 2004.

[29] A. K. Prykarpatsky and I. V. Mykytiuk, *Algebraic integrability of nonlinear dynamical systems on manifolds: classical and quantum aspects.* Kluwer Acad. Publishers, the Netherlands, 1998.

[30] G. De Rham, *Varietes differentielles.* Hermann,Paris, 1955.

[31] G. De Rham, *Sur la theorie des formes differentielles harmoniques* // Ann. Univ. Grenoble, **22** (1946), 135–152.

[32] A. M. Samoilenko, Y. A. Prykarpatsky, and V. G. Samoylenko, *The structure of Darboux-type binary transformations and their applications in soliton theory* // Ukr. Mat. Zhurnal, **55** (2003), N 12, 1704–1723 (in Ukrainian).

[33] A. M. Samoilenko and Y. A. Prykarpatsky, *Algebraic-analytic aspects of completely integrable dynamical systems and their perturbations* // Kyiv, NAS, Inst. Mathem. Publisher, **41** (2002) (in Ukrainian).

[34] I. V. Skrypnik, *Periods of A-closed forms* // Proceedings of the USSR Academy of Sciences, **160** (1965), N 4, 772–773 (in Russian).

[35] I. V. Skrypnik, *A harmonique fields with peculiarities* // Ukr. Math. Journal, **17** (1965), N 4, 130–133 (in Russian).

[36] I. V. Skrypnik, *The generalized De Rham theorem* // Proceed. of UkrSSR Acad. of Sci., (1965), N 1, 18–19 (in Ukrainian).

[37] I. V. Skrypnik, *A harmonic forms on a compact Riemannian space* // Proceed. of UkrSSR Acad. of Sci., N 2, 174–175 (in Ukrainian).

[38] R. Teleman, *Elemente de topologie si varietati diferentiabile.* Bucuresti Publ., Romania, 1964.

[39] F. Warner, *Foundations of differential manifolds and Lie groups.* Academic Press, NY, 1971.

[40] V. E. Zakharov and A. B. Shabat, *A scheme of integration of nonlinear equations of mathematical physics via the inverse scattering problem. Part 1* // Func. Anal. and it Appl., **8** (1974), N 3, 43–53; *Part 2* // **13** (1979), N 3, 13–32 (in Russian).

[41] V. E. Zakharov, *Integrable systems in multidimensional spaces* // Lect. Notes in Phys., **153** (1982), 190–216.

[42] V. E. Zakharov and S. V. Manakov, *On a generalization of the inverse scattering problem* // Theoret. Mathem. Physics, **27** (1976), N 3 283–287.

Відомості про авторів

Ярема Анатолійович Прикарпатський

Інститут математики НАН України,
вул. Терещенківська 3,
Київ, 01601,
Україна
AGH University of Science and Technology,
Al. Mickiewicza 30,
30-059 Krakow,
Poland
E-Mail: yarchyk@imath.kiev.ua

Анатолій Михайлович Самойленко

Інститут математики НАН України,
вул. Терещенківська 3,
Київ, 01601,
Україна
E-Mail: sam@imath.kiev.ua
URL: http://www.imath.kiev.ua/~sam

Анатолій Карлович Прикарпатський

AGH University of Science and Technology,
Al. Mickiewicza 30,
30-059 Krakow,
Poland
Інститут прикладних проблем механіки та математики НАН України,
Львів, 79601,
Україна
E-Mail: pryk.anat@ua.fm