Український математичний вісник
Том 2 **(2005)**, № 4, 502 – 540

О точном условии предельной суммируемости решений нелинейных эллиптических уравнений с L^1-правыми частями

Александр А. Ковалевский

(*Представлена А. Е. Шишковым*)

Аннотация. В работе рассматривается задача Дирихле для дивергентных нелинейных эллиптических уравнений второго порядка с правой частью f класса L^1. Устанавливается точное условие на функцию f, обеспечивающее принадлежность решений рассматриваемой задачи некоторому предельному соболевскому пространству. Это условие формулируется в терминах определенного поведения интегралов функции $|f|$ по множествам $\{|f| > k\}$ для достаточно больших k.

2000 MSC. 35J25, 35J60, 35J65.

Ключевые слова и фразы. Нелинейные эллиптические уравнения второго порядка, задача Дирихле, слабые и энтропийные решения, суммируемость решений.

1. Введение

Пусть Ω — ограниченное открытое множество в $\mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 2)$ и $p \in (1, n)$. Пусть c_1, c_2 — положительные постоянные, g – неотрицательная функция из $L^{p/(p-1)}(\Omega)$, и пусть для любого $i \in \{1, \dots, n\}$ a_i — функция Каратеодори на $\Omega \times \mathbb{R}^n$. Будем предполагать, что для почти всех $x \in \Omega$ и любых $\xi \in \mathbb{R}^n$ имеют место неравенства

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i(x,\xi)| \leqslant c_1|\xi|^{p-1} + g(x), \tag{1.1}$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x,\xi)\xi_i \geqslant c_2|\xi|^p\,. \tag{1.2}$$

Кроме того, будем считать, что для почти всех $x \in \Omega$ и любых $\xi, \xi' \in \mathbb{R}^n$, $\xi \neq \xi'$, справедливо неравенство

Статья поступила в редакцию 25.08.2004

$$\sum_{i=1}^{n} [\, a_i(x,\xi) - a_i(x,\xi')](\xi_i - \xi_i') > 0. \tag{1.3}$$

Пусть $f \in L^1(\Omega)$. Рассмотрим следующую задачу Дирихле:

$$\left.\begin{aligned} -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} a_i(x,\nabla u) =& f \quad \text{в} \quad \Omega, \\ u =& 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega. \end{aligned}\right\} \tag{1.4}$$

Изучению разрешимости и свойств решений задачи (1.4) посвящено достаточно большое число работ (см., например, [1–4]).

Приведем ряд определений и результатов относительно этой задачи, которые будут использованы в дальнейшем.

Определение 1.1. *Слабым решением задачи* (1.4) *будем называть функцию* $u \in \overset{\circ}{W}{}^{1,1}(\Omega)$ *такую, что выполняются условия:*

1) *для любого* $i \in \{1,\dots,n\}$ $\quad a_i(x,\nabla u) \in L^1(\Omega)$*;*

2) *для любой функции* $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\int\limits_\Omega \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i(x,\nabla u) D_i\varphi \right\} dx = \int\limits_\Omega f\,\varphi\,dx.$$

По поводу этого определения см., например, [2].

Далее, пусть для любого $k > 0$ T_k — функция на $\mathbb{R}$ такая, что

$$T_k(s) = \begin{cases} s, & \text{если } |s| \leqslant k, \\ k\operatorname{sign} s, & \text{если } |s| > k. \end{cases}$$

Известно, что если $\lambda \geqslant 1$, $u \in \overset{\circ}{W}{}^{1,\lambda}(\Omega)$ и $k > 0$, то $T_k(u) \in \overset{\circ}{W}{}^{1,\lambda}(\Omega)$ и для любого $i \in \{1,\dots,n\}$ имеем

$$D_i T_k(u) = D_i u \cdot 1_{\{|u|<k\}} \quad \text{п.в. на } \Omega. \tag{1.5}$$

Через $\overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,p}(\Omega)$ обозначим множество всех функций $u : \Omega \to \mathbb{R}$ таких, что для любого $k > 0$ $\quad T_k(u) \in \overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\Omega)$.

Очевидно, что

$$\overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\Omega) \subset \overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,p}(\Omega). \tag{1.6}$$

Для произвольных $u : \Omega \to \mathbb{R}$ и $x \in \Omega$ положим

$$k(u,x) = \min\{\, l \in \mathbb{N} : |u(x)| \leqslant l \,\}.$$

Определение 1.2. *Пусть* $u \in \overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,p}(\Omega)$ *и* $i \in \{1, \dots, n\}$. *Тогда* $\delta_i u$ *— функция на* Ω *такая, что для любого* $x \in \Omega$

$$\delta_i u\,(x) = D_i T_{k(u,x)}(u)\,(x).$$

Предложение 1.1. *Пусть* $u \in \overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,p}(\Omega)$ *и* $i \in \{1, \dots, n\}$. *Тогда для любого* $k > 0$

$$D_i T_k(u) = \delta_i u \cdot 1_{\{|u|<k\}} \quad \textit{п.в. на } \Omega. \tag{1.7}$$

Доказательство. Зафиксируем произвольное $k > 0$. Покажем, что

$$D_i T_k(u) = \delta_i u \quad \text{п.в. на } \{\,|u| < k\,\}. \tag{1.8}$$

Положим $l_0 = \min\{\, l \in \mathbb{N} : k \leqslant l \,\}$. Так как $T_{l_0}(u) = T_k(u)$ на $\{\,|u| < k\,\}$, то существует множество $E_{l_0} \subset \Omega$ меры нуль такое, что для любого $x \in \{\,|u| < k\,\} \backslash E_{l_0}$

$$D_i T_{l_0}(u)\,(x) = D_i T_k(u)\,(x). \tag{1.9}$$

Если $l_0 = 1$, то для любого $x \in \{|u| < k\}$ имеем $k(u, x) = l_0$. Тогда из (1.9) выводим (1.8). Пусть теперь $l_0 > 1$. Легко видеть, что если $l \in \mathbb{N}$, $l < l_0$, то существует множество $E_l \subset \Omega$ меры нуль такое, что для любого $x \in \{|u| \leqslant l\} \backslash E_l$

$$D_i T_l(u)\,(x) = D_i T_k(u)\,(x). \tag{1.10}$$

Пусть $x \in \{\,|u| < k\,\} \backslash \bigcup\limits_{l=1}^{l_0} E_l$. Положим $l_1 = k(u, x)$. Имеем $l_1 \leqslant l_0$. Если $l_1 < l_0$, то $x \in \{\,|u| \leqslant l_1\} \backslash E_{l_1}$ и в силу (1.10) $D_i T_k(u)\,(x) = \delta_i u\,(x)$. Если же $l_1 = l_0$, то значения функций $D_i T_k(u)$, $\delta_i u$ в точке x равны в силу (1.9). Таким образом, можно заключить, что (1.8) верно и в случае $l_0 > 1$.

Ясно, что если $\operatorname{meas}\{\,|u| \geqslant k\,\} > 0$, то $D_i T_k(u) = 0$ п.в. на $\{\,|u| \geqslant k\,\}$. Отсюда и из (1.8) вытекает (1.7). Предложение доказано. $\square$

Из (1.5), (1.6) и предложения 1.1 следует, что если $u \in \overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\Omega)$, то для любого $i \in \{1, \dots, n\}$ $\quad \delta_i u = D_i u$ п.в. на Ω.

Введем обозначение: если $u \in \overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,p}(\Omega)$, то δu — отображение Ω в $\mathbb{R}^n$ такое, что для любых $x \in \Omega$ и $i \in \{1, \dots, n\}$ $\quad (\delta u\,(x))_i = \delta_i u\,(x)$.

Для любого $\lambda \in [\,1, n)$ положим $\lambda^* = n\lambda/(n - \lambda)$.

Напомним (см., например, [5]), что если $\lambda \in [1, n)$, то $\overset{\circ}{W}{}^{1,\lambda}(\Omega) \subset L^{\lambda^*}(\Omega)$ и существует положительная постоянная $c_{n,\lambda}$, зависящая только от n и λ, такая, что для любой функции $u \in \overset{\circ}{W}{}^{1,\lambda}(\Omega)$

$$\left(\int_\Omega |u|^{\lambda^*} dx\right)^{1/\lambda^*} \leqslant c_{n,\lambda}\left(\int_\Omega |\nabla u|^\lambda\, dx\right)^{1/\lambda}. \tag{1.11}$$

Предложение 1.2. *Пусть* $u \in \overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,p}(\Omega)$, $\lambda \in [1, p]$, $|\delta u| \in L^\lambda(\Omega)$. *Тогда* $u \in \overset{\circ}{W}{}^{1,\lambda}(\Omega)$ *и для любого* $i \in \{1, \ldots, n\}$ *имеем* $D_i u = \delta_i u$ *п.в. на* Ω.

Доказательство. В силу предложения 1.1, (1.11) и условий данного предложения для последовательности функций $T_k(u)$, $k \in \mathbb{N}$, имеем: $T_k(u) \in \overset{\circ}{W}{}^{1,\lambda}(\Omega)$, $T_k(u) \to u$ сильно в $L^\lambda(\Omega)$ и $D_i T_k(u) \to \delta_i u$ сильно в $L^\lambda(\Omega)$, $i = 1, \ldots, n$. Тогда для любого $i \in \{1, \ldots, n\}$ существует обобщенная производная $D_i u$, $D_i u = \delta_i u$ п.в. на Ω, и можно заключить, что $u \in W^{1,\lambda}(\Omega)$ и $T_k(u) \to u$ сильно в $W^{1,\lambda}(\Omega)$. Следовательно, $u \in \overset{\circ}{W}{}^{1,\lambda}(\Omega)$. Предложение доказано. □

Заметим, что если $u \in \overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,p}(\Omega)$, $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, $k > 0$ и $i \in \{1, \ldots, n\}$, то функция $a_i(x, \delta u)(\delta_i u - \delta_i \varphi)$ суммируема на множестве $\{\, |u - \varphi| < k\,\}$. Это вытекает из (1.1) и предложения 1.1.

Определение 1.3. *Энтропийным решением задачи* (1.4) *будем называть функцию* $u \in \overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,p}(\Omega)$ *такую, что для любых* $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ *и* $k > 0$ *имеет место неравенство*

$$\int_{\{|u-\varphi|<k\}} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, \delta u)(\delta_i u - \delta_i \varphi)\right\} dx \leqslant \int_\Omega f\, T_k(u - \varphi)\, dx. \tag{1.12}$$

Понятие энтропийного решения задачи (1.4) введено и детально изучено в [3].

В силу сделанных выше предположений относительно функций a_i, $i = 1, \ldots, n$, и теоремы 6.1 работы [3] справедливо следующее утверждение.

Теорема 1.1. *Существует единственное энтропийное решение задачи* (1.4).

Кроме того, из следствия 4.3 работы [3] и предложения 1.2 вытекает такой результат.

Теорема 1.2. *Пусть u — энтропийное решение задачи* (1.4)*, и пусть* $|\delta u| \in L^1(\Omega)$*. Тогда u — слабое решение задачи* (1.4)*.*

Положим
$$r = \frac{n(p-1)}{n-1}\,.$$

Теорема 1.3. *Пусть u — энтропийное решение задачи* (1.4)*. Тогда для любого $\lambda \in (0,\, r)$ имеем $|\delta u| \in L^\lambda(\Omega)$.*

Эта теорема является следствием лемм 3.1 и 4.2 статьи [3].

Из теорем 1.3, 1.2 и предложения 1.2 вытекает следующее утверждение.

Теорема 1.4. *Пусть $p > 2-1/n$, и пусть u — энтропийное решение задачи* (1.4)*. Тогда u — слабое решение задачи* (1.4)*, и для любого $\lambda \in [\,1,\, r)$ имеем $u \in \overset{\circ}{W}{}^{1,\lambda}(\Omega)$.*

Наконец, следствием теорем 1.1 и 1.4 является такой результат.

Теорема 1.5. *Пусть $p > 2-1/n$. Тогда существует слабое решение задачи* (1.4)*, принадлежащее $\overset{\circ}{W}{}^{1,\lambda}(\Omega)$ для любого $\lambda \in [\,1,\, r)$.*

Замечание 1.1. Если $p \leqslant 2 - 1/n$, то задача (1.4), вообще говоря, может не иметь слабых решений. По этому поводу см. пример в [3].

Замечание 1.2. Слабые решения задачи (1.4), вообще говоря, могут не принадлежать пространству $\overset{\circ}{W}{}^{1,r}(\Omega)$. Это обстоятельство отмечено еще в [2], хотя соответствующие примеры и не были указаны. Некоторые примеры, показывающие, что энтропийные и слабые решения задачи (1.4) могут не принадлежать $\overset{\circ}{W}{}^{1,r}(\Omega)$, мы даем в § 4 данной работы.

В связи с последним замечанием возникает вопрос о дополнительных условиях на функцию f, обеспечивающих принадлежность рассматриваемых типов решений задачи (1.4) пространству $\overset{\circ}{W}{}^{1,r}(\Omega)$.

Приведем известные на этот счет результаты. Так, в [2] существование слабого решения задачи (1.4), принадлежащего пространству $\overset{\circ}{W}{}^{1,r}(\Omega)$, доказано при условиях $p > 2 - 1/n$ и $f \ln(1 + |f|) \in L^1(\Omega)$, а в [4] это сделано при более слабых предположениях, а именно, при $p \geqslant 2 - 1/n$ и $f[\ln(1 + |f|)]^\sigma \in L^1(\Omega)$, где $\sigma \in ((n-1)/n,\, 1)$. Последние условия, как следует из [4], обеспечивают принадлежность пространству $\overset{\circ}{W}{}^{1,r}(\Omega)$ энтропийного решения задачи (1.4).

Сформулируем один результат относительно слабых решений задачи (1.4), являющийся усилением соответствующего результата работы [4].

Определим последовательность чисел s_j следующим образом:

$$s_1 = 1,$$
$$s_j = e^{s_{j-1}}, \qquad j = 2, 3, \dots .$$

Пусть теперь для любого $j \in \mathbb{N}$ $\quad b_j : [s_j, +\infty) \to [0, +\infty)$ — функция такая, что

$$b_j(s) = \underbrace{\ln \dots \ln \ln}_{j} s, \quad s \in [s_j, +\infty).$$

Теорема 1.6. *Пусть $p \geqslant 2 - 1/n$, и пусть выполняется условие: существуют $m \in \mathbb{N}$ и $\sigma > (n-1)/n$ такие, что*

$$f \biggl[\prod_{j=1}^{m} b_j(s_j + |f|) \biggr]^{(n-1)/n} [\, b_{m+1}(s_{m+1} + |f|)\,]^{\sigma} \in L^1(\Omega). \tag{1.13}$$

Тогда существует слабое решение задачи (1.4), *принадлежащее $\overset{\circ}{W}{}^{1,r}(\Omega)$.*

Эта теорема доказана автором в [6]. Она также опубликована с доказательством в препринте [7] и анонсирована в [8].

Как показывает один из примеров, приведенных в [6], и как мы убедимся далее, слабое решение задачи (1.4), принадлежащее пространству $\overset{\circ}{W}{}^{1,r}(\Omega)$, может существовать и при более слабом ограничении на правую часть уравнения по сравнению с условием (1.13). Поэтому естественно поставить вопрос о наиболее общем условии на функцию f, гарантирующем принадлежность решений рассматриваемой задачи пространству $\overset{\circ}{W}{}^{1,r}(\Omega)$. Решение этого вопроса и является целью настоящей работы.

Основной результат статьи заключается в следующем утверждении.

Теорема 1.7. *Пусть $p \geqslant 2 - 1/n$, и пусть выполняется условие: существуют $c > 0$, $m \in \mathbb{N}$ и $\sigma > (n-1)/n$ такие, что для любого $k > s_{m+1}$ справедливо неравенство*

$$\int\limits_{\{|f|>k\}} |f|\, dx \leqslant c \biggl[\prod_{j=1}^{m} b_j(k) \biggr]^{-(n-1)/n} [\, b_{m+1}(k)\,]^{-\sigma} . \tag{1.14}$$

Пусть u — энтропийное решение задачи (1.4). *Тогда $u \in \overset{\circ}{W}{}^{1,r}(\Omega)$.*

Из теорем 1.1, 1.2, 1.7 и (1.5), (1.7) вытекает такое утверждение.

Теорема 1.8. *Пусть* $p \geqslant 2 - 1/n$, *и пусть существуют* $c > 0$, $m \in \mathbb{N}$ *и* $\sigma > (n-1)/n$ *такие, что для любого* $k > s_{m+1}$ *справедливо неравенство* (1.14). *Тогда существует слабое решение задачи* (1.4), *принадлежащее* $\overset{\circ}{W}{}^{1,r}(\Omega)$.

Заметим, что эта теорема анонсирована автором в [7].

Доказательство теоремы 1.7 излагается в § 3 данной работы. Оно использует некоторые вспомогательные результаты общего характера, которые устанавливаются в § 2. Наконец, в § 4 рассматриваются некоторые результаты и примеры, связанные с основными условиями теорем 1.6 и 1.7. В частности, там устанавливается, что условие теоремы 1.7 на функцию f является неулучшаемым условием, обеспечивающим принадлежность энтропийного решения задачи (1.4) пространству $\overset{\circ}{W}{}^{1,r}(\Omega)$. А именно, если для произвольных фиксированных $c > 0$ и $m \in \mathbb{N}$ и любого $k > s_{m+1}$ справедливо неравенство, получающееся из (1.14) заменой σ на $(n-1)/n$, то такое условие на f уже не гарантирует принадлежность энтропийного решения задачи (1.4) пространству $\overset{\circ}{W}{}^{1,r}(\Omega)$. При этом может существовать слабое решение задачи (1.4), не принадлежащее $\overset{\circ}{W}{}^{1,r}(\Omega)$.

Заключая Введение отметим, что аналоги основного результата статьи могут быть получены и в отношении решений задачи Дирихле для классов уравнений высокого порядка, рассмотренных в работах [7, 9, 10].

2. Вспомогательные утверждения

Лемма 2.1. *Пусть* u *— измеримая функция на* Ω. *Пусть* $M > 0$, $\tau > 0$, $\varepsilon > 1$, $m \in \mathbb{N}$. *Пусть для любого* $k > s_{m+1}$ *справедливо неравенство*

$$\operatorname{meas}\{\,|u| \geqslant k\,\} \leqslant M k^{-\tau} \left[\,\prod_{j=1}^{m} b_j(k)\right]^{-1} [\,b_{m+1}(k)\,]^{-\varepsilon}. \tag{2.1}$$

Тогда $u \in L^{\tau}(\Omega)$.

Доказательство. Ограничимся предположением, что $m \geqslant 2$. Случай $m = 1$ рассматривается аналогично.

Зафиксируем $k_0 \in \mathbb{N}$ такое, что $k_0 > s_{m+1}$. Для любого $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant k_0$ положим

$$\beta_k = \left[k \prod_{j=1}^{m-1} b_j(k) \right]^{-1} [\, b_m(k) \,]^{-\varepsilon} .$$

Поскольку $\varepsilon > 1$, имеем

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} \beta_k \leqslant \frac{2^{m+\varepsilon}}{\varepsilon - 1} [\, b_m(k_0) \,]^{1-\varepsilon} . \tag{2.2}$$

Пусть $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant k_0$. В силу (2.1) имеем

$$\operatorname{meas} \{ \, |u| \geqslant e^k \, \} \leqslant M e^{-\tau k} \, \beta_k .$$

Тогда

$$\int\limits_{\{e^k \leqslant |u| < e^{k+1}\}} |u|^\tau \, dx \leqslant M e^\tau \beta_k .$$

Теперь, учитывая (2.2), заключаем, что $u \in L^\tau(\Omega)$. Лемма доказана. □

Замечание 2.1. Если в лемме 2.1 условие $\varepsilon > 1$ заменить на условие $\varepsilon = 1$, то заключение леммы, вообще говоря, не будет верным. Действительно, пусть B — открытый единичный шар в $\mathbb{R}^n$ с центром в нуле, $\tau > 0$, $m \in \mathbb{N}$, и пусть v — функция на B такая, что

$$v(x) = \begin{cases} |x|^{-n/\tau} \left[\displaystyle\prod_{j=1}^{m} b_j\!\left(\frac{1}{|x|} \right) \right]^{-1/\tau}, & \text{если} \quad 0 < |x| \leqslant \dfrac{1}{s_{m+1}} , \\ 0, & \text{если} \quad |x| > \dfrac{1}{s_{m+1}} . \end{cases}$$

Тогда существует положительная постоянная M_1, зависящая только от n, τ и m, такая, что для любого $k > s_m$ имеет место неравенство

$$\operatorname{meas} \{ \, |v| \geqslant k \, \} \leqslant M_1 k^{-\tau} \left[\prod_{j=1}^{m} b_j(k) \right]^{-1} .$$

Вместе с тем функция v не принадлежит $L^\tau(B)$.

Лемма 2.2. *Пусть* $u \in \overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,p}(\Omega)$, $k > 0$. *Тогда*

$$\left(\int\limits_\Omega |T_k(u)|^{p^*} \, dx \right)^{1/p^*} \leqslant c_{n,p} \left(\int\limits_\Omega |\nabla T_k(u)|^p \, dx \right)^{1/p} , \tag{2.3}$$

$$\operatorname{meas} \{ \, |u| \geqslant k \, \} \leqslant (c_{n,p}/k)^{p^*} \left(\int\limits_\Omega |\nabla T_k(u)|^p \, dx \right)^{p^*/p} . \tag{2.4}$$

Доказательство. Неравенство (2.3) является следствием включения $T_k(u) \in \overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\Omega)$ и (1.11). Далее, заметим, что $\{\,|u| \geqslant k\,\} = \{\,|T_k(u)| = k\,\}$. Следовательно,

$$k^{p^*} \mathrm{meas}\,\{\,|u| \geqslant k\,\} \leqslant \int\limits_\Omega |T_k(u)|^{p^*}\,dx.$$

Отсюда и из (2.3) выводим (2.4). Лемма доказана. □

Лемма 2.3. *Пусть* $u \in \overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,p}(\Omega)$, $k, k_1 > 0$. *Тогда*

$$\mathrm{meas}\,\{\,|\delta u| \geqslant k\,\} \leqslant (c_{n,p}/k_1)^{p^*} \left(\int\limits_\Omega |\nabla T_{k_1}(u)|^p\,dx \right)^{p^*/p} + \\ + k^{-p} \int\limits_\Omega |\nabla T_{k_1}(u)|^p\,dx. \quad (2.5)$$

Доказательство. Положим $G = \{\,|u| < k_1,\ |\delta u| \geqslant k\,\}$. Ясно, что

$$\mathrm{meas}\,\{\,|\delta u| \geqslant k\,\} \leqslant \mathrm{meas}\,\{\,|u| \geqslant k_1\,\} + \mathrm{meas}\,G. \quad (2.6)$$

Если $\mathrm{meas}\,G \neq 0$, то в силу (1.7) имеем $k \leqslant |\nabla T_{k_1}(u)|$ п.в. на G и, следовательно,

$$\mathrm{meas}\,G \leqslant k^{-p} \int\limits_\Omega |\nabla T_{k_1}(u)|^p\,dx. \quad (2.7)$$

Очевидно, что это неравенство верно и в случае $\mathrm{meas}\,G = 0$.

Из (2.6), (2.7) и леммы 2.2 выводим (2.5). Лемма доказана. □

3. Доказательство теоремы 1.7

Пусть условия теоремы 1.7 выполняются.

Через c_i, $i = 3, 4, \ldots$, будем обозначать положительные постоянные, зависящие только от n, p, c_2, c, m, σ и $\mathrm{meas}\,\Omega$.

Пусть ψ — функция на $(s_{m+1}, +\infty)$ такая, что для любого $s \in (s_{m+1}, +\infty)$

$$\psi(s) = \left[\, \prod_{j=1}^m b_j(s) \right]^{-(n-1)/n} [\,b_{m+1}(s)\,]^{-\sigma}.$$

Определим числа t_j следующим образом:

$$t_1 = 4,$$
$$t_j = e^{t_{j-1}}, \qquad j = 2, 3, \ldots, m+1.$$

Положим

$$\gamma = \frac{p-1}{2p}, \qquad \gamma_1 = \max\,(s_{m+1}^{1/\gamma},\, e^{1/\gamma^2},\, t_{m+1}).$$

Теперь зафиксируем произвольное $k > \gamma_1$. Ясно, что

$$b_1(k^\gamma) = \gamma\, b_1(k). \tag{3.1}$$

Поскольку $k > e^{1/\gamma^2}$, используя (3.1), устанавливаем, что

$$b_2(k^\gamma) > \frac{1}{2}\, b_2(k). \tag{3.2}$$

Кроме того, в силу неравенства $k > t_{m+1}$ имеем

$$\forall\, j \in \{1, \ldots, m\} \qquad b_j(k) > 4. \tag{3.3}$$

Из (3.2) и (3.3) следует, что

$$\forall j \in \{2, \ldots, m+1\} \qquad b_j(k^\gamma) > \frac{1}{2}\, b_j(k). \tag{3.4}$$

Используя (3.1) и (3.4), получаем, что

$$\psi(k^\gamma) \leqslant c_3\, \psi(k). \tag{3.5}$$

Кроме того, учитывая, что для любых $\lambda, s > 0$ имеем $\lambda \ln s < s^\lambda$, устанавливаем неравенство

$$k^{-1/2} \leqslant c_4\, \psi(k). \tag{3.6}$$

Положим

$$I_k = \int\limits_{\{|f| > k^\gamma\}} |f|\, dx.$$

Поскольку $k^\gamma > s_{m+1}$, в силу условия теоремы относительно f и (3.5) справедливо неравенство

$$I_k \leqslant c\, c_3 \psi(k). \tag{3.7}$$

Далее, так как u — энтропийное решение задачи (1.4), то $u \in \overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,p}(\Omega)$ и имеет место неравенство

$$\int\limits_{\{|u|<k\}} \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i(x, \delta u) \delta_i u \right\} dx \leqslant \int\limits_{\Omega} f\, T_k(u)\, dx.$$

Отсюда, используя (1.2) и предложение 1.1, выводим, что

$$c_2 \int\limits_\Omega |\nabla T_k(u)|^p\,dx \leqslant \int\limits_\Omega f\,T_k(u)\,dx. \tag{3.8}$$

Очевидно, что для правой части неравенства (3.8) имеет место оценка

$$\int\limits_\Omega f\,T_k(u)\,dx \leqslant \int\limits_{\{|f|\leqslant k^\gamma\}} |f|\,|T_k(u)|\,dx + kI_k\,. \tag{3.9}$$

Используя неравенство Гельдера, (2.3) и неравенство Юнга, получаем

$$\int\limits_{\{|f|\leqslant k^\gamma\}} |f|\,|T_k(u)|\,dx \leqslant k^\gamma \int\limits_\Omega |T_k(u)|\,dx \leqslant$$

$$\leqslant k^\gamma (\operatorname{meas}\Omega)^{(p^*-1)/p^*} \Bigg(\int\limits_\Omega |T_k(u)|^{p^*}\,dx \Bigg)^{1/p^*} \leqslant$$

$$\leqslant k^\gamma (\operatorname{meas}\Omega)^{(p^*-1)/p^*}\, c_{n,p} \Bigg(\int\limits_\Omega |\nabla T_k(u)|^p\,dx \Bigg)^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{c_2}{p} \int\limits_\Omega |\nabla T_k(u)|^p\,dx + c_5 k^{1/2}\,.$$

Отсюда и из (3.8), (3.9) вытекает, что

$$\int\limits_\Omega |\nabla T_k(u)|^p\,dx \leqslant c_6 k[\,k^{-1/2} + I_k\,].$$

Полученное неравенство и неравенства (3.6), (3.7) позволяют заключить, что для любого $k > \gamma_1$

$$\int\limits_\Omega |\nabla T_k(u)|^p\,dx \leqslant c_7 k\psi(k). \tag{3.10}$$

Далее, положим

$$\gamma_2 = \gamma_1^{(n-1)/(n-p)}\,[\,\psi(\gamma_1)\,]^{-1/(n-p)}$$

и зафиксируем произвольное $k > \gamma_2$. Поскольку $s^{n-1}[\,\psi(s)\,]^{-1} \to +\infty$ при $s \to +\infty$ и $\gamma_1^{n-1}[\,\psi(\gamma_1)\,]^{-1} < k^{n-p}$, существует $k_1 > \gamma_1$ такое, что

$$k_1^{n-1}[\,\psi(k_1)\,]^{-1} = k^{n-p}\,. \tag{3.11}$$

Отсюда следует, что

$$k_1^{-n(p-1)/(n-p)}\,[\,\psi(k_1)\,]^{n/(n-p)} = k^{-r}[\,\psi(k_1)\,]^{n/(n-1)}\,, \tag{3.12}$$

$$k^{-p}k_1\psi(k_1) = k^{-r}[\,\psi(k_1)\,]^{n/(n-1)}\,. \tag{3.13}$$

Кроме того, в силу (3.11) имеем $k_1 < k$ и $k^{n-p} < k_1^{n+m+\sigma}$. Используя последнее неравенство, устанавливаем, что для любого $j \in \{1,\dots,m+1\}$

$$b_j(k) < \frac{n+m+\sigma}{n-p}\,b_j(k_1).$$

Тогда

$$\psi(k_1) \leqslant c_8\psi(k). \tag{3.14}$$

Заметим еще, что поскольку $k_1 > \gamma_1$, в силу (3.10) имеем

$$\int\limits_{\Omega} |\nabla T_{k_1}(u)|^p\,dx \leqslant c_7 k_1\psi(k_1).$$

Используя это неравенство и лемму 2.3, получаем, что

$$\operatorname{meas}\{\,|\delta u| \geqslant k\,\} \leqslant c_{n,p}^{p^*}c_7^{p^*/p}k_1^{-n(p-1)/(n-p)}[\,\psi(k_1)\,]^{n/(n-p)} + c_7k^{-p}k_1\psi(k_1).$$

Отсюда и из (3.12)–(3.14) вытекает, что

$$\operatorname{meas}\{\,|\delta u| \geqslant k\,\} \leqslant c_9k^{-r}[\,\psi(k)\,]^{n/(n-1)}\,.$$

Полученный результат позволяет заключить, что для любого $k > s_{m+1}$

$$\operatorname{meas}\{\,|\delta u| \geqslant k\,\} \leqslant c_{10}k^{-r}\left[\,\prod_{j=1}^{m} b_j(k)\right]^{-1}[\,b_{m+1}(k)\,]^{-\sigma n/(n-1)}\,.$$

Отсюда, учитывая неравенство $\sigma > (n-1)/n$ и используя лемму 2.1, выводим, что $|\delta u| \in L^r(\Omega)$. Тогда, учитывая, что в силу условия $p \geqslant 2-1/n$ справедливо неравенство $r \geqslant 1$, и используя предложение 1.2, устанавливаем, что $u \in \overset{\circ}{W}{}^{1,r}(\Omega)$. Тем самым теорема доказана.

4. Дальнейшие результаты и примеры, связанные с условиями теорем 1.6 и 1.7

Прежде всего докажем два предложения о необходимом и достаточном условиях для того, чтобы выполнялось условие теоремы 1.7 относительно функции f.

Предложение 4.1. *Пусть выполняется условие: существуют* $c > 0$, $m \in \mathbb{N}$ *и* $\sigma > (n-1)/n$ *такие, что для любого* $k > s_{m+1}$ *справедливо неравенство*

$$\int\limits_{\{|f|>k\}} |f|\, dx \leqslant c \left[\prod_{j=1}^{m} b_j(k) \right]^{-(n-1)/n} [\, b_{m+1}(k)\,]^{-\sigma} .$$

Тогда для любого $t \in (0,\,(n-1)/n)$ *имеем* $f[\ln(1+|f|)\,]^t \in L^1(\Omega)$.

Доказательство. Пусть $t \in (0,\,(n-1)/n)$. Зафиксируем t_1 такое, что

$$t_1 > \left(\frac{n-1}{n} - t \right)^{-1}, \tag{4.1}$$

и $k_0 \in \mathbb{N}$ такое, что $k_0 > s_{m+1}^{1/t_1}$.

Для любого $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant k_0$, положим

$$G_k = \{\, e^{k^{t_1}} < |f| \leqslant e^{(k+1)^{t_1}} \}, \qquad G'_k = \{\, |f| > e^{k^{t_1}}\, \}.$$

Заметим, что

$$G'_{k_0} = \bigcup_{k=k_0}^{\infty} G_k\,. \tag{4.2}$$

Зафиксируем произвольное $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant k_0$. Поскольку $k^{t_1} > s_{m+1}$, то для любого $j \in \{1, \ldots, m+1\}$ имеем

$$b_j\,(\, e^{k^{t_1}}\,) > 1.$$

Тогда в силу условия предложения справедливо неравенство

$$\int\limits_{G'_k} |f|\, dx \leqslant ck^{-t_1(n-1)/n}\,. \tag{4.3}$$

Кроме того, в силу определения множества G_k имеем

$$[\ln(1+|f|)\,]^t \leqslant 2^{(1+t_1)t} k^{t_1 t} \quad \text{на} \quad G_k\,. \tag{4.4}$$

Из (4.3) и (4.4) следует, что

$$\int\limits_{G_k} |f|\,[\ln(1+|f|)\,]^t\, dx \leqslant 2^{(1+t_1)t} ck^{-t_1[(n-1)/n-t]}\,.$$

Полученное неравенство и (4.1) позволяют заключить, что

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} \int\limits_{G_k} |f|\,[\ln(1+|f|)\,]^t\, dx < \infty.$$

Отсюда, учитывая (4.2) и то, что множества G_k попарно не пересекаются, делаем вывод, что функция $f[\ln(1+|f|)]^t$ суммируема на G'_{k_0} и, следовательно, эта функция суммируема на Ω. Предложение доказано. □

Предложение 4.2. *Пусть выполняется условие: существуют $m \in \mathbb{N}$ и $\sigma > (n-1)/n$ такие, что*

$$f\biggl[\prod_{j=1}^{m} b_j(s_j+|f|)\biggr]^{(n-1)/n}[\,b_{m+1}(s_{m+1}+|f|)\,]^{\sigma} \in L^1(\Omega).$$

Тогда существует $c>0$ такое, что для любого $k > s_{m+1}$ справедливо неравенство

$$\int\limits_{\{|f|>k\}} |f|\,dx \leqslant c\biggl[\prod_{j=1}^{m} b_j(k)\biggr]^{-(n-1)/n}[\,b_{m+1}(k)\,]^{-\sigma}.$$

Доказательство. Положим

$$\Phi = \biggl[\prod_{j=1}^{m} b_j(s_j+|f|)\biggr]^{(n-1)/n}[\,b_{m+1}(s_{m+1}+|f|)\,]^{\sigma}.$$

В силу условия предложения имеем $f\Phi \in L^1(\Omega)$. Положим

$$c = \int\limits_{\Omega} |f|\,\Phi\,dx + 1. \tag{4.5}$$

Зафиксируем произвольное $k > s_{m+1}$. Нетрудно убедиться в том, что для любого $x \in \{\,|f|>k\,\}$

$$\biggl[\prod_{j=1}^{m} b_j(k)\biggr]^{(n-1)/n}[\,b_{m+1}(k)\,]^{\sigma} < \Phi(x).$$

Тогда

$$\int\limits_{\{|f|>k\}} |f|\,dx \leqslant \biggl[\prod_{j=1}^{m} b_j(k)\biggr]^{-(n-1)/n}[\,b_{m+1}(k)\,]^{-\sigma}\int\limits_{\Omega} |f|\,\Phi\,dx.$$

Отсюда и из (4.5) следует неравенство, приводящее к заключению предложения. □

Замечание 4.1. Легко видеть, что теорема 1.6 является следствием предложения 4.2 и теорем 1.1, 1.2 и 1.7.

Замечание 4.2. Если $\sigma_1 > (n-1)/n$ и $f[\ln(1+|f|)]^{\sigma_1} \in L^1(\Omega)$, то для любого $\sigma > (n-1)/n$ имеем $f[\ln(1+|f|)]^{(n-1)/n}[\ln\ln(e+|f|)]^{\sigma} \in L^1(\Omega)$ и, следовательно, условие предложения 4.2, или то же, что и условие теоремы 1.6 относительно f, выполняется. При этом $m=1$.

Обозначим через B открытый единичный шар в $\mathbb{R}^n$ с центром в нуле.

Пример 4.1. Пусть $\sigma \in ((n-1)/n,\, 1)$, и пусть f_1 — функция на B такая, что

$$f_1(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{|x|^n}\left(\ln\dfrac{1}{|x|}\right)^{-(2n-1)/n}\left(\ln\ln\dfrac{1}{|x|}\right)^{-\sigma}, & \text{если } \ 0<|x|\leqslant e^{-e}, \\ 0, & \text{если } \ |x|=0 \ \text{ или } \ |x|>e^{-e}. \end{cases}$$

Нетрудно проверить, что функция f_1 суммируема на B, причем

$$\int\limits_B f_1\,dx \leqslant 2\varkappa_n\,, \tag{4.6}$$

где $\varkappa_n$ — площадь поверхности единичной сферы в $\mathbb{R}^n$.

Покажем, что справедливы следующие утверждения:

(i) *для любого $k>e$ имеет место неравенство*

$$\int\limits_{\{|f_1|>k\}} |f_1|\,dx \leqslant 2\varkappa_n n^2 e\,(\ln\,k)^{-(n-1)/n}(\ln\,\ln\,k)^{-\sigma}\,;$$

(ii) *функция $f_1[\ln(1+|f_1|)]^{(n-1)/n}$ не принадлежит $L^1(B)$.*

Действительно, зафиксируем произвольное $k>e$. Предположим сначала, что $k\leqslant e^{ne}$. Тогда

$$1\leqslant ne(\ln\,k)^{-(n-1)/n}\,, \qquad 1\leqslant n(\ln\,\ln\,k)^{-\sigma}$$

и, следовательно, учитывая (4.6), получаем

$$\int\limits_{\{|f_1|>k\}} |f_1|\,dx \leqslant 2\varkappa_n \leqslant 2\varkappa_n n^2 e(\ln\,k)^{-(n-1)/n}(\ln\,\ln\,k)^{-\sigma}\,.$$

Пусть теперь $k>e^{ne}$. Положим

$$B_k = \{\,x\in\mathbb{R}^n : |x|\leqslant k^{-1/n}\,\},$$

и пусть для любого $i\in\mathbb{N}$, $i\geqslant k^{1/n}$,

$$B_k^{(i)} = \{\,x\in\mathbb{R}^n : i^{-1}\leqslant |x|\leqslant k^{-1/n}\,\}.$$

Зафиксируем $i \in \mathbb{N}$, $i \geqslant k^{1/n}$. Для произвольного $x \in B_k^{(i)}$ имеем

$$\ln\ln k \leqslant n \ln\ln \frac{1}{|x|}$$

и, следовательно,

$$|f_1(x)| \leqslant n(\ln\ln k)^{-\sigma}\,\frac{1}{|x|^n}\biggl(\ln\frac{1}{|x|}\biggr)^{-(2n-1)/n}.$$

Тогда

$$\int\limits_{B_k^{(i)}} |f_1|\,dx \leqslant \varkappa_n n(\ln\ln k)^{-\sigma}\int\limits_{1/i}^{1/k^{1/n}} \frac{1}{\rho}\biggl(\ln\frac{1}{\rho}\biggr)^{-(2n-1)/n} d\rho =$$
$$= \varkappa_n n(\ln\ln k)^{-\sigma}\,\frac{n}{n-1}\,[\,(\ln k^{1/n})^{-(n-1)/n} - (\ln i)^{-(n-1)/n}\,] \leqslant$$
$$\leqslant 2\varkappa_n n^2(\ln k)^{-(n-1)/n}(\ln\ln k)^{-\sigma}.$$

Отсюда вытекает, что

$$\int\limits_{B_k} |f_1|\,dx \leqslant 2\varkappa_n n^2(\ln k)^{-(n-1)/n}(\ln\ln k)^{-\sigma}.$$

Из этого неравенства, учитывая включение $\{\,|f_1| > k\,\} \subset B_k$, получаем соответствующую оценку для интеграла функции $|f_1|$ по множеству $\{\,|f_1| > k\,\}$.

Таким образом, заключаем, что утверждение (i) справедливо.

Далее, положим

$$\alpha = \min\biggl\{\biggl(\frac{n-1}{n+1}\biggr)^4,\, e^{-e}\biggr\},$$

и пусть для любого $i \in \mathbb{N}$, $i \geqslant 1/\alpha$,

$$G_i = \{\,x \in \mathbb{R}^n : i^{-1} \leqslant |x| \leqslant \alpha\,\}.$$

Зафиксируем $i \in \mathbb{N}$, $i \geqslant 1/\alpha$, и возьмем $x \in G_i$. Ясно, что

$$\frac{1}{4}\ln\frac{1}{|x|} + \ln\frac{n-1}{n+1} \geqslant 0. \tag{4.7}$$

Кроме того, имеем

$$\ln\ln\frac{1}{|x|} < \ln\frac{1}{|x|} < \frac{n+1}{n-1}\biggl(\frac{1}{|x|}\biggr)^{(n-1)/(n+1)}. \tag{4.8}$$

Используя (4.8), находим, что

$$|f_1(x)| > \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^3 \frac{1}{|x|}\,.$$

Отсюда и из (4.7) вытекает, что

$$\ln\left(1+|f_1(x)|\right) > \frac{1}{4}\ln\frac{1}{|x|}$$

и, следовательно,

$$|f_1(x)|\left[\,\ln\left(1+|f_1(x)|\right)\right]^{(n-1)/n} > \frac{1}{4|x|^n}\left(\ln\frac{1}{|x|}\right)^{-1}\left(\ln\ln\frac{1}{|x|}\right)^{-\sigma}.$$

Тогда

$$\int\limits_{G_i} |f_1|\left[\,\ln\left(1+|f_1|\right)\right]^{(n-1)/n} dx > \frac{\varkappa_n}{4}\int\limits_{1/i}^{\alpha}\frac{1}{\rho}\left(\ln\frac{1}{\rho}\right)^{-1}\left(\ln\ln\frac{1}{\rho}\right)^{-\sigma} d\rho =$$

$$= \frac{\varkappa_n}{4(1-\sigma)}\left[(\ln\ln i)^{1-\sigma} - \left(\ln\ln\frac{1}{\alpha}\right)^{1-\sigma}\right].$$

Отсюда выводим, что

$$\int\limits_{G_i} |f_1|\left[\,\ln\left(1+|f_1|\right)\right]^{(n-1)/n} dx \to \infty \quad \text{при} \quad i\to\infty.$$

Следовательно, функция $f_1[\ln(1+|f_1|)\,]^{(n-1)/n}$ не принадлежит $L^1(B)$. Значит, утверждение (ii) справедливо.

Замечание 4.3. В силу предложения 4.2 выполнение условия теоремы 1.6 относительно функции f влечет выполнение условия теоремы 1.7 относительно f. Обратное, как следует из утверждений (i) и (ii) примера 4.1, не верно. Кроме того, эти утверждения показывают, что показатель $t = (n-1)/n$ в заключительном включении предложения 4.1, вообще говоря, не достигается.

Докажем теперь одно полезное предложение, являющееся основой для рассмотрения дальнейших примеров.

Для любого $i \in \{1,\dots,n\}$ определим функцию $A_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ следующим образом:

$$A_i(\xi) = \begin{cases} |\xi|^{p-2}\xi_i\,, & \text{если } \xi \neq 0,\\ 0, & \text{если } \xi = 0.\end{cases}$$

Предложение 4.3. *Пусть* $p > 2-1/n$. *Пусть* $h \in C^2((0,+\infty))$, $\alpha \in (0,1)$, *и пусть выполняются условия:*

1) $h > 0$ *на* $(0,\alpha)$ *и* $h = 0$ *на* $[\alpha,+\infty)$;

2) $h(s) \to 0$ *при* $s \to 0$;

3) *для любого* $s \in (0,\alpha)$

$$\frac{n-p}{p-1}\,h(s) - sh'(s) > 0\,;$$

4) *существуют* $M > 0$, $\gamma \in (0,(n-p)/(p-1))$ *и* $\beta \in (0,\alpha)$ *такие, что для любого* $s \in (0,\beta)$ $\quad h(s) \geqslant Ms^\gamma$;

5) *существуют* $M_1 \in (0,1)$ *и* $\beta_1 \in (0,\alpha)$ *такие, что для любого* $s \in (0,\beta_1)$

$$s|h'(s)| \leqslant \frac{n-p}{p-1}\,M_1 h(s);$$

6) $\displaystyle\int\limits_0^\alpha \left[\frac{n-p}{p-1}\,h(s) - sh'(s)\right]^{p-2} [\,|h'(s)| + s|h''(s)|\,]\,ds < +\infty.$

Пусть u — *функция на* B *такая, что для любого* $x \in B\backslash\{0\}$

$$u(x) = |x|^{-(n-p)/(p-1)}\,h(|x|).$$

Пусть F — *функция на* B *такая, что для любого* $x \in B$, $0 < |x| < \alpha$,

$$F(x) = |x|^{1-n}\left[\frac{n-p}{p-1}\,h(|x|) - |x|h'(|x|)\right]^{p-2}\times$$
$$\times\,[\,(n-2p+1)h'(|x|) - (p-1)|x|h''(|x|)\,]\,,$$

а для любого $x \in B$, $|x| \geqslant \alpha$, $F(x) = 0$.

Тогда $F \in L^1(B)$, $u \in \overset{\circ}{W}{}^{1,1}(B)$ *и справедливы следующие утверждения:*

$(*_1)$ *для любого* $\lambda \in [1,r)$ $\quad |\nabla u| \in L^\lambda(B)$;

$(*_2)$ *для любой функции* $\varphi \in C_0^\infty(B)$

$$\int\limits_B \left\{\sum_{i=1}^n A_i(\nabla u)D_i\varphi\right\}dx = \int\limits_B F\varphi\,dx;$$

$(*_3)$ *для любых* $\varphi \in C_0^\infty(B)$ *и* $k > 0$ $\;T_k(u-\varphi) \in \overset{\circ}{W}{}^{1,p}(B)$;

$(*_4)$ *для любых* $\varphi \in C_0^\infty(B)$ *и* $k > 0$ *функция* $\sum_{i=1}^n A_i(\nabla u)D_iT_k \times (u-\varphi)$ *суммируема на* B *и*

$$\int\limits_B \left\{\sum_{i=1}^n A_i(\nabla u)D_iT_k(u-\varphi)\right\}dx = \int\limits_B FT_k(u-\varphi)\,dx;$$

$(*_5)$ *если* $\displaystyle\int\limits_0^{\alpha} \frac{1}{s}\, h^r(s)\, ds < +\infty$, *то* $|\nabla u| \in L^r(B)$;

$(*_6)$ *если* $\displaystyle\int\limits_0^{\alpha} \frac{1}{s}\, h^r(s)\, ds = +\infty$, *то* $|\nabla u| \notin L^r(B)$.

Доказательство. Включение $F \in L^1(B)$ справедливо в силу условия 6).

Покажем, что $u \in \overset{\circ}{W}{}^{1,1}(B)$. Прежде всего заметим, что в силу условий 2) и 5) существует положительное число M_2 такое, что для любого $s \in (0, \alpha)$

$$\frac{n-p}{p-1}\, h(s) + s|h'(s)| \leqslant M_2\,. \tag{4.9}$$

Пусть w — функция на B такая, что для любого $x \in B\backslash\{0\}$

$$w(x) = |x|^{-(n-1)/(p-1)}\,.$$

Поскольку $p > 2 - 1/n$, имеем

$$\frac{n-1}{p-1} < n \tag{4.10}$$

и, следовательно, функция w суммируема на B. Тогда, учитывая, что в силу условия 1) и (4.9)

$$|u| \leqslant \frac{p-1}{n-p}\, M_2 w \quad \text{на} \quad B\backslash\{0\},$$

получаем, что $u \in L^1(B)$.

Пусть F_0 — функция на B такая, что любого $x \in B\backslash\{0\}$

$$F_0(x) = \frac{n-p}{p-1}\, h(|x|) - |x|h'(|x|).$$

Из условий 1) и 3) вытекает, что для любого $x \in B\backslash\{0\}$ $\quad F_0(x) \geqslant 0$.

Обозначим через v сужение функции u на $B\backslash\{0\}$. Имеем $v \in C^1(B\backslash\{0\})$, причем для любых $i \in \{1, \ldots, n\}$ и $x \in B\backslash\{0\}$

$$D_i v\,(x) = -x_i|x|^{-1}\, w(x) F_0(x). \tag{4.11}$$

Положим для любого $j \in \mathbb{N}$

$$K_j = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \frac{1}{1+j} < |x| < 1\right\}, \qquad S_j = \left\{x \in \mathbb{R}^n : |x| = \frac{1}{1+j}\right\}.$$

Теперь зафиксируем $i \in \{1, \ldots, n\}$ и обозначим через w_i какое-либо продолжение $D_i v$ на B. В силу условия 1), (4.9) и (4.11) имеем $|w_i| \leqslant M_2 w$ на $B \backslash \{0\}$ и, следовательно, $w_i \in L^1(B)$. Пусть $\varphi \in C_0^\infty(B)$ и $j \in \mathbb{N}$. Учитывая гладкость функции v и используя формулу интегрирования по частям, получаем

$$\int\limits_{K_j} u D_i \varphi \, dx = -\int\limits_{K_j} w_i \varphi \, dx + \int\limits_{S_j} u\varphi \cos(\nu, e_i) \, dS_j \,, \tag{4.12}$$

где ν — единичный вектор внутренней нормали к S_j, e_i — орт i-й оси. В силу определения функции u имеем

$$\left| \int\limits_{S_j} u\varphi \cos(\nu, e_i) \, dS_j \right| \leqslant \varkappa_n \left(\frac{1}{1+j} \right)^{n-(n-1)/(p-1)} h\left(\frac{1}{1+j} \right) \max_{x \in B} |\varphi(x)| \,.$$

Отсюда, принимая во внимание условие 2) и неравенство (4.10), заключаем, что

$$\lim_{j \to \infty} \int\limits_{S_j} u\varphi \cos(\nu, e_i) \, dS_j = 0.$$

Тогда, учитывая суммируемость функций u и w_i на B и переходя в (4.12) к пределу при $j \to \infty$, получаем

$$\int\limits_B u D_i \varphi \, dx = -\int\limits_B w_i \varphi \, dx.$$

Следовательно, существует обобщенная производная $D_i u$, $D_i u = w_i$ п.в. на B. Тогда в силу (4.11) для почти всех $x \in B \backslash \{0\}$

$$D_i u\,(x) = -x_i |x|^{-1} \, w(x) F_0(x). \tag{4.13}$$

Теперь можно сделать вывод, что $u \in W^{1,1}(B)$. А так как в силу условия 1) $\operatorname{supp} u \subset B$, то $u \in \overset{\circ}{W}{}^{1,1}(B)$.

Заметим, что вследствие (4.13)

$$|\nabla u| = w F_0 \quad \text{п.в. на } B. \tag{4.14}$$

Докажем справедливость утверждения $(*_1)$. Пусть $\lambda \in [1, r)$. Благодаря (4.14), (4.9) и условию 1) имеем $|\nabla u|^\lambda \leqslant M_2^\lambda |w|^\lambda$ п.в. на B. Отсюда, учитывая, что $\lambda(n-1)/(p-1) < n$ и, следовательно, $w \in L^\lambda(B)$, выводим, что $|\nabla u| \in L^\lambda(B)$. Тем самым справедливость утверждения $(*_1)$ установлена.

Далее, пусть для любого $i \in \{1, \dots, n\}$ v_i — функция на B такая, что для любого $x \in B \backslash \{0\}$

$$v_i(x) = -x_i |x|^{-n} [\, F_0(x)\,]^{p-1}\,.$$

В силу (4.9) и условия 1) для любого $i \in \{1, \dots, n\}$ имеем $v_i \in L^1(B)$. Кроме того, для любых $i \in \{1, \dots, n\}$ и $j \in \mathbb{N}$ имеем

$$|v_i| \leqslant M_2^{p-1}(1+j)^{n-1} \quad \text{на } K_j\,, \tag{4.15}$$

$$|v_i| \leqslant (1+j)^{n-1}\left[\,\frac{n-p}{p-1}\,h\Big(\frac{1}{1+j}\Big) + \frac{1}{1+j}\left|h'\Big(\frac{1}{1+j}\Big)\right|\,\right]^{p-1} \quad \text{на } S_j\,. \tag{4.16}$$

Положим

$$B_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^n : 0 < |x| < \alpha\}.$$

Благодаря условию 3) для любого $i \in \{1, \dots, n\}$ имеем

$$v_i|_{B_\alpha} \in C^1(B_\alpha). \tag{4.17}$$

Кроме того, учитывая условие 3) и определение функции F, получаем, что

$$-\sum_{i=1}^{n} D_i(v_i|_{B_\alpha}) = F|_{B_\alpha}\,. \tag{4.18}$$

Покажем, что для любой функции $\varphi \in \overset{\circ}{W}{}^{1,p}(B) \cap L^\infty(B)$

$$\lim_{j\to\infty} \int\limits_{K_j} \left\{\,\sum_{i=1}^{n} v_i D_i\varphi\right\} dx = \int\limits_{B} F\varphi\, dx. \tag{4.19}$$

Действительно, пусть $\varphi \in \overset{\circ}{W}{}^{1,p}(B) \cap L^\infty(B)$, и пусть $\{\varphi_m\}$ — последовательность функций из $C_0^\infty(B)$ такая, что

$$\varphi_m \to \varphi \quad \text{сильно в } W^{1,p}(B), \tag{4.20}$$

$$\varphi_m \to \varphi \quad \text{п.в. на } B, \tag{4.21}$$

$$\forall\, m \in \mathbb{N} \quad |\varphi_m| \leqslant \|\varphi\|_{L^\infty(B)} + 1 \quad \text{на } B. \tag{4.22}$$

Положим для любого $j \in \mathbb{N}$

$$q_j = \left[\,\frac{n-p}{p-1}\,h\Big(\frac{1}{1+j}\Big) + \frac{1}{1+j}\left|h'\Big(\frac{1}{1+j}\Big)\right|\,\right]^{p-1}.$$

В силу условий 2) и 5) имеем

$$\lim_{j\to\infty} q_j = 0. \tag{4.23}$$

Зафиксируем $j \in \mathbb{N}$, и пусть $m \in \mathbb{N}$. Используя (4.17), формулу интегрирования по частям, (4.18) и условие 1), получаем

$$\int\limits_{K_j} \left\{ \sum_{i=1}^{n} v_i D_i \varphi_m \right\} dx = \int\limits_{K_j} F \varphi_m \, dx + \int\limits_{S_j} \left\{ \sum_{i=1}^{n} v_i \cos(\nu, e_i) \right\} \varphi_m \, dS_j \, . \tag{4.24}$$

В силу (4.16) и (4.22) имеем

$$\left| \int\limits_{S_j} \left\{ \sum_{i=1}^{n} v_i \cos(\nu, e_i) \right\} \varphi_m \, dS_j \right| \leqslant (\, \|\varphi\|_{L^\infty(B)} + 1 \,) n \varkappa_n q_j \, .$$

Отсюда и из (4.24) вытекает, что

$$\left| \int\limits_{K_j} \left\{ \sum_{i=1}^{n} v_i D_i \varphi_m \right\} dx - \int\limits_{K_j} F \varphi_m \, dx \right| \leqslant (\, \|\varphi\|_{L^\infty(B)} + 1 \,) n \varkappa_n q_j \, . \tag{4.25}$$

Используя (4.15), устанавливаем, что

$$\left| \int\limits_{K_j} \left\{ \sum_{i=1}^{n} v_i D_i \varphi_m \right\} dx - \int\limits_{K_j} \left\{ \sum_{i=1}^{n} v_i D_i \varphi \right\} dx \right| \leqslant$$
$$\leqslant M_2^{p-1} (1 + j)^{n-1} \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{B} |D_i(\varphi_m - \varphi)| \, dx. \tag{4.26}$$

Кроме того, вследствие (4.22) имеем

$$\left| \int\limits_{K_j} F \varphi_m \, dx - \int\limits_{B} F \varphi \, dx \right| \leqslant \int\limits_{B} |F| \, |\varphi_m - \varphi| \, dx +$$
$$+ (\, \|\varphi\|_{L^\infty(B)} + \, 1) \int\limits_{B \setminus K_j} |F| \, dx. \tag{4.27}$$

Из (4.25)–(4.27) следует, что

$$\left| \int\limits_{K_j} \left\{ \sum_{i=1}^{n} v_i D_i \varphi \right\} dx - \int\limits_{B} F \varphi \, dx \right| \leqslant$$
$$\leqslant M_2^{p-1} (1 + j)^{n-1} \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{B} |D_i(\varphi_m - \varphi)| \, dx + \int\limits_{B} |F| \, |\varphi_m - \varphi| \, dx +$$
$$+ (\, \|\varphi\|_{L^\infty(B)} + 1 \,) \left[n \varkappa_n q_j + \int\limits_{B \setminus K_j} |F| \, dx \right].$$

Отсюда, используя (4.20)–(4.23) и то, что $\operatorname{meas}(B\backslash K_j) \to 0$ при $j \to \infty$, выводим (4.19).

Заметим, что в силу (4.13), (4.14) и условий 1), 3) для любого $i \in \{1, \dots, n\}$

$$A_i(\nabla u) = v_i \quad \text{п.в. на} \quad B. \tag{4.28}$$

Отсюда и из (4.19) вытекает, что утверждение $(*_2)$ справедливо.

Докажем справедливость утверждения $(*_3)$. Пусть $\varphi \in C_0^\infty(B)$ и $k > 0$. Пусть h_k – функция из $C^1(\mathbb{R})$ со свойствами: $h_k(s) = s$, если $|s| \leqslant k$; $h_k(s) = \frac{3}{2}k \operatorname{sign} s$, если $|s| \geqslant 2k$; $0 \leqslant h_k' \leqslant 1$ на $\mathbb{R}$. Определим функцию $u_k : B \to \mathbb{R}$ следующим образом:

$$u_k(x) = \begin{cases} h_k(u(x) - \varphi(x)), & \text{если } x \in B\backslash\{0\}, \\ \dfrac{3}{2}\, k, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

Вследствие условия 4) имеем $u_k \in C^1(B)$. Кроме того, благодаря условию 1) имеем $\operatorname{supp} u_k \subset \overline{B_\alpha} \cup \operatorname{supp} \varphi$. Таким образом, $u_k \in C_0^1(B)$ и, следовательно, $u_k \in \overset{\circ}{W}{}^{1,p}(B)$. Но тогда и $T_k(u_k) \in \overset{\circ}{W}{}^{1,p}(B)$. Отсюда, учитывая, что $T_k(u - \varphi) = T_k(u_k)$ на $B\backslash\{0\}$, заключаем, что $T_k(u - \varphi) \in \overset{\circ}{W}{}^{1,p}(B)$. Тем самым справедливость утверждения $(*_3)$ установлена.

Докажем справедливость утверждения $(*_4)$. Пусть $\varphi \in C_0^\infty(B)$ и $k > 0$. Положим

$$\gamma_1 = \left(\frac{n-p}{p-1} - \gamma\right)^{-1}, \qquad k_1 = \min\left\{\beta,\ \left(\frac{M}{k + \max\limits_{x \in B} |\varphi(x)|}\right)^{\gamma_1}\right\}$$

и обозначим через B' открытый шар в $\mathbb{R}^n$ с центром в нуле и радиусом k_1. В силу условия 4) имеем $B'\backslash\{0\} \subset \{\,|u - \varphi| > k\,\}$. Используя это включение и утверждение $(*_3)$, получаем, что для любого $i \in \{1, \dots, n\}$

$$A_i(\nabla u) D_i T_k(u - \varphi) = 0 \quad \text{п.в. на } B'. \tag{4.29}$$

Кроме того, в силу (4.9), (4.28) и условия 1) для любого $i \in \{1, \dots, n\}$ имеем

$$|A_i(\nabla u) D_i T_k(u-\varphi)| \leqslant M_2^{p-1} k_1^{1-n} |D_i T_k(u-\varphi)| \quad \text{п.в. на } B\backslash B'. \tag{4.30}$$

Из (4.29) и (4.30) вытекает, что для любого $i \in \{1, \dots, n\}$ функция $A_i(\nabla u) D_i T_k(u - \varphi)$ суммируема на B. Используя этот факт, а также утверждение $(*_3)$ и (4.19), (4.28), получаем

$$\int\limits_B \left\{ \sum_{i=1}^n A_i(\nabla u) D_i T_k(u - \varphi) \right\} dx = \int\limits_B F T_k(u - \varphi)\, dx.$$

Следовательно, утверждение $(*_4)$ справедливо.

Докажем справедливость утверждения $(*_5)$. Пусть

$$\int\limits_0^\alpha \frac{1}{s}\, h^r(s)\, ds < +\infty. \tag{4.31}$$

Положим

$$G = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leqslant \beta_1\},$$

и пусть для любого $j \in \mathbb{N}$

$$G^{(j)} = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \frac{\beta_1}{1+j} \leqslant |x| \leqslant \beta_1\right\}.$$

В силу (4.14) и условия 5) для почти всех $x \in G\backslash\{0\}$ имеем

$$|\nabla u|^r(x) \leqslant (2n)^r |x|^{-n} h^r(|x|).$$

Тогда для любого $j \in \mathbb{N}$

$$\int\limits_{G^{(j)}} |\nabla u|^r\, dx \leqslant (2n)^r \varkappa_n \int\limits_0^\alpha \frac{1}{s}\, h^r(s)\, ds.$$

Отсюда и из (4.31) вытекает, что функция $|\nabla u|^r$ суммируема на G. Заметим еще, что в силу (4.14), (4.9) и условия 1) $|\nabla u| < M_2 \beta_1^{-n}$ п.в. на $B\backslash G$ и, следовательно, функция $|\nabla u|^r$ суммируема на $B\backslash G$. Теперь можно заключить, что $|\nabla u| \in L^r(B)$. Тем самым справедливость утверждения $(*_5)$ установлена.

Наконец, докажем справедливость утверждения $(*_6)$. Пусть

$$\int\limits_0^\alpha \frac{1}{s}\, h^r(s)\, ds = +\infty. \tag{4.32}$$

Пусть G и $G^{(j)}$, $j \in \mathbb{N}$, — множества, определенные при доказательстве справедливости утверждения $(*_5)$. В силу условия 5) для любого $x \in G\backslash\{0\}$ имеем

$$F_0(x) \geqslant (1 - M_1)\, \frac{n-p}{p-1}\, h(|x|).$$

Отсюда и из (4.14) следует, что для почти всех $x \in G\backslash\{0\}$

$$|\nabla u|^r(x) \geqslant (1 - M_1)^r \left(\frac{n-p}{p-1}\right)^r |x|^{-n} h^r(|x|).$$

Тогда для любого $j \in \mathbb{N}$ имеем

$$\int\limits_{G^{(j)}} |\nabla u|^r \, dx \geqslant \varkappa_n (1 - M_1)^r \left(\frac{n-p}{p-1}\right)^r \int\limits_{\beta_1/(1+j)}^{\beta_1} \frac{1}{s}\, h^r(s)\, ds.$$

Отсюда и из (4.32) вытекает, что

$$\lim_{j\to\infty} \int\limits_{G^{(j)}} |\nabla u|^r \, dx = \infty.$$

Следовательно, $|\nabla u| \not\in L^r(B)$, и тем самым справедливость утверждения $(*_6)$ установлена.

Предложение доказано. $\square$

Используя предложение 4.3, приведем сравнительно простой пример, в котором правая часть уравнения в задаче (1.4) имеет определенную “логарифмическую” суммируемость, но энтропийное (и вместе с тем слабое) решение этой задачи не принадлежит пространству $\overset{\circ}{W}{}^{1,r}(\Omega)$.

Пример 4.2. Пусть $p > 2 - 1/n$, $\sigma_1 \in (0,\, 1/r)$. Положим $\alpha_1 = e^{-2\sigma_1(p-1)/(n-p)}$, и пусть ψ_1 — функция из $C^2((0, +\infty))$ такая, что $\psi_1 = 0$ на $(0,\, \alpha_1/3\,]$, $\psi_1 = 1$ на $[\,2\alpha_1/3,\, +\infty)$, ψ_1 не убывает на $(\alpha_1/3,\, 2\alpha_1/3)$. Пусть h_1 — функция на $(0, +\infty)$ такая, что для любого $s \in (0,\, \alpha_1)$

$$h_1(s) = \left(\ln\frac{1}{s}\right)^{-\sigma_1} \left[\, 1 - \psi_1(s) + \psi_1(s)(\alpha_1 - s)^3 \,\right],$$

а для любого $s \geqslant \alpha_1$ $\quad h_1(s) = 0$.

Имеем $h_1 \in C^2((0, +\infty))$, $\alpha_1 \in (0, 1)$, $h_1 > 0$ на $(0,\, \alpha_1)$ и $h_1 = 0$ на $[\,\alpha_1,\, +\infty)$, $h_1(s) \to 0$ при $s \to 0$, для любого $s \in (0,\, \alpha_1)$

$$\frac{n-p}{p-1}\, h_1(s) - s h_1'(s) > 0.$$

Кроме того, для любого $s \in (0,\, \alpha_1/3)$ имеем

$$h_1(s) \geqslant \left(\frac{n-p}{n-1}\right)^{\sigma_1} s^{(n-p)/(n-1)},$$
$$s|h_1'(s)| \leqslant \frac{n-p}{2(p-1)}\, h_1(s).$$

Из указанных свойств функции h_1 следует, что существуют положительные постоянные μ_1, μ_2 и μ_3 такие, что

$$\forall\, s \in (0,\, \alpha_1) \quad \frac{n-p}{p-1}\, h_1(s) - s h_1'(s) \leqslant \mu_1\,, \tag{4.33}$$

$$\forall\, s \in [\,\alpha_1/3,\, 2\alpha_1/3\,] \quad \frac{n-p}{p-1}\, h_1(s) - s h_1'(s) \geqslant \mu_2\,, \tag{4.34}$$

$$\forall\, s \in [\,\alpha_1/3,\, \alpha_1) \quad |h_1'(s)| + s|h_1''(s)| \leqslant \mu_3\,. \tag{4.35}$$

Заметим еще, что для любого $s \in (0,\, \alpha_1/3\,]$

$$\frac{n-p}{p-1}\, h_1(s) - s h_1'(s) \geqslant \frac{n-p}{2(p-1)} \left(\ln \frac{1}{s} \right)^{-\sigma_1}, \tag{4.36}$$

$$|h_1'(s)| + s|h_1''(s)| \leqslant \frac{2n}{\sigma_1 s} \left(\ln \frac{1}{s} \right)^{-\sigma_1 - 1}. \tag{4.37}$$

Наконец, для любого $s \in [\,2\alpha_1/3,\, \alpha_1)$ имеем

$$\frac{n-p}{p-1}\, h_1(s) - s h_1'(s) \geqslant 2\alpha_1\, \frac{n-p}{n+1}\, (\alpha_1 - s)^2\,, \tag{4.38}$$

$$|h_1'(s)| + s|h_1''(s)| \leqslant \frac{2n^3}{\sigma_1^2}\, (\alpha_1 - s). \tag{4.39}$$

Из (4.33)–(4.39) вытекает, что

$$\int\limits_0^{\alpha_1} \left[\frac{n-p}{p-1}\, h_1(s) - s h_1'(s) \right]^{p-2} [\,|h_1'(s)| + s|h_1''(s)|\,]\, ds < +\infty. \tag{4.40}$$

Действительно, обозначим через z функцию под знаком интеграла в (4.40). Предположим, что $p \geqslant 2$. Тогда в силу (4.33) и (4.37)

$$\forall\, s \in (0,\, \alpha_1/3\,] \qquad z(s) \leqslant \frac{2n\mu_1^{p-2}}{\sigma_1 s} \left(\ln \frac{1}{s} \right)^{-\sigma_1 - 1}, \tag{4.41}$$

а в силу (4.33) и (4.35)

$$\forall\, s \in [\,\alpha_1/3,\, \alpha_1) \qquad z(s) \leqslant \mu_3 \mu_1^{p-2}\,. \tag{4.42}$$

Используя (4.41), (4.42) и учитывая, что $\sigma_1 > 0$, получаем (4.40). Пусть теперь $p < 2$. Тогда в силу (4.36) и (4.37)

$$\forall\, s \in (0,\, \alpha_1/3\,] \qquad z(s) \leqslant \frac{4n}{(n-p)^{2-p} \sigma_1 s} \left(\ln \frac{1}{s} \right)^{-\sigma_1 (p-1) - 1}. \tag{4.43}$$

Кроме того, вследствие (4.34) и (4.35) имеем

$$\forall\, s \in [\,\alpha_1/3,\, 2\alpha_1/3\,] \qquad z(s) \leqslant \mu_3 \mu_2^{p-2}\,, \tag{4.44}$$

а вследствие (4.38), (4.39) и неравенства $2(p-2)+1>0$ имеем

$$\forall\, s \in [\,2\alpha_1/3,\, \alpha_1) \qquad z(s) \leqslant \frac{2n^4}{(n-p)^{2-p}\alpha_1^2\sigma_1^2}\,. \tag{4.45}$$

Используя (4.43)–(4.45), снова получаем (4.40).

Таким образом, относительно функции h_1 и числа α_1 выполняются условия 1)–6) предложения 4.3. Кроме того, в силу неравенства $\sigma_1 < 1/r$ имеем

$$\int\limits_0^{\alpha_1} \frac{1}{s}\, h_1^r(s)\, ds = +\infty. \tag{4.46}$$

Пусть теперь F_1 — функция на B такая, что для любого $x \in B$, $0 < |x| < \alpha_1$,

$$F_1(x) = |x|^{1-n} \left[\frac{n-p}{p-1}\, h_1(|x|) - |x| h_1'(|x|) \right]^{p-2} \times$$
$$\times \left[\, (n-2p+1) h_1'(|x|) - (p-1)|x| h_1''(|x|)\,\right],$$

а для любого $x \in B$, $|x| \geqslant \alpha_1$, $\quad F_1(x) = 0$.

Пусть, наконец, u — функция на B такая, что для любого $x \in B\backslash\{0\}$

$$u(x) = |x|^{-(n-p)/(p-1)}\, h_1(|x|).$$

Тогда в силу предложения 4.3 и (4.46) имеем $F_1 \in L^1(B)$, $u \in \overset{\circ}{W}{}^{1,1}(B)$ и справедливы следующие утверждения:

(i) *для любого* $\lambda \in [1,\, r)$ $\quad |\nabla u| \in L^\lambda(B)$;

(ii) $|\nabla u| \notin L^r(B)$;

(iii) *для любой функции* $\varphi \in C_0^\infty(B)$

$$\int\limits_B \left\{ \sum_{i=1}^n A_i(\nabla u) D_i \varphi \right\} dx = \int\limits_B F_1 \varphi\, dx;$$

(iv) *для любых* $\varphi \in C_0^\infty(B)$ *и* $k > 0$ $\quad T_k(u-\varphi) \in \overset{\circ}{W}{}^{1,p}(B)$, *функция* $\sum\limits_{i=1}^n A_i(\nabla u) D_i T_k(u-\varphi)$ *суммируема на* B *и*

$$\int\limits_B \left\{ \sum_{i=1}^n A_i(\nabla u) D_i T_k(u-\varphi) \right\} dx = \int\limits_B F_1 T_k(u-\varphi)\, dx.$$

Пусть теперь $\Omega = B$, и пусть коэффициенты a_i, $i = 1, \ldots, n$, и правая часть f в задаче (1.4) такие, что:

1) для любых $i \in \{1, \ldots, n\}$ и $(x, \xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^n$ $\quad a_i(x, \xi) = A_i(\xi)$;

2) $f = F_1$.

Тогда в силу утверждений (i) и (iii) функция u является слабым решением задачи (1.4), а в силу утверждения (iv), (1.5) и предложения 1.1 эта же функция является энтропийным решением задачи (1.4). Вместе с тем ввиду утверждения (ii) функция u не принадлежит пространству $\overset{\circ}{W}{}^{1,r}(\Omega)$.

Заметим еще, что для любого t, $0 < t < \sigma_1 \min\{1,\, p-1\}$,

$$f[\ln(1 + |f|)]^t \in L^1(\Omega). \tag{4.47}$$

Действительно, пусть t — произвольное число такое, что $0 < t < \sigma_1 \min\{1,\, p-1\}$. Положим

$$\mu_4 = \frac{35 n^{14}}{\sigma_1^6 \alpha_1^4 (n-p)^5} \left(1 + \mu_1 + \frac{1}{\mu_2} + \mu_3\right)^{2p}.$$

Используя (4.33)–(4.39), находим, что для любого $x \in \Omega \backslash \{0\}$

$$|f(x)|\,[\ln(1 + |f(x)|)]^t \leqslant \frac{\mu_4}{|x|^n} \left(\ln \frac{1}{|x|}\right)^{t - \sigma_1 \min\{1,\, p-1\} - 1}.$$

Отсюда, учитывая, что для любого $x \in \Omega$, $|x| \geqslant \alpha_1$, имеет место равенство $f(x) = 0$, заключаем, что функция $|f|\,[\ln(1 + |f|)]^t$ суммируема на Ω и, следовательно, (4.47) справедливо.

Отметим в связи с этим, что в силу условия $\sigma_1 < 1/r$ верно неравенство $\sigma_1 \min\{1,\, p-1\} < (n-1)/n$.

Далее, используя предложение 4.3, рассмотрим пример, показывающий, что условие теоремы 1.7 на функцию f является неулучшаемым условием, обеспечивающим принадлежность энтропийного решения задачи (1.4) пространству $\overset{\circ}{W}{}^{1,r}(\Omega)$.

Предварительно введем и изучим некоторые функции, которые будут использоваться в этом примере.

Пусть для любого $m \in \mathbb{N}$ g_m — функция на $(0,\, 1/s_{m+1})$ такая, что для любого $s \in (0,\, 1/s_{m+1})$

$$g_m(s) = \prod_{j=1}^{m} b_j\left(\frac{1}{s}\right).$$

Для любого $m \in \mathbb{N}$ имеем $g_m \in C^2((0,\, 1/s_{m+1}))$ и $g_m > 1$ на $(0,\, 1/s_{m+1})$. Кроме того, если $m \in \mathbb{N}$ и $s \in (0,\, 1/s_{m+1})$, то

$$g_m'(s) = -\frac{1}{s}\, g_m(s) \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{g_i(s)}. \tag{4.48}$$

Зафиксируем последовательность чисел α_m такую, что для любого $m \in \mathbb{N}$

$$0 < \alpha_m < \min\{\, 1/s_{m+1},\ e^{-mn^2/(n-p)} \,\}\,. \tag{4.49}$$

Далее, пусть для любого $m \in \mathbb{N}$ ψ_m — функция из $C^2((0,+\infty))$ такая, что $\psi_m = 0$ на $(0, \alpha_m/3\,]$, $\psi_m = 1$ на $[\,2\alpha_m/3, +\infty)$, ψ_m не убывает на $[\,\alpha_m/3,\ 2\alpha_m/3\,]$.

Для любого $m \in \mathbb{N}$ положим

$$\tau_m = 1 + \max_{s\in(0,+\infty)} \psi'_m(s) + \max_{s\in(0,+\infty)} |\psi''_m(s)|\,.$$

Пусть для любого $m \in \mathbb{N}$ h_m — функция на $(0,+\infty)$ такая, что для любого $s \in (0,\, \alpha_m)$

$$h_m(s) = [\,g_m(s)]^{-1/r}\,[\,1 - \psi_m(s) + \psi_m(s)(\alpha_m - s)^3\,]\,, \tag{4.50}$$

а для любого $s \geqslant \alpha_m$ $\quad h_m(s) = 0$.

Используя свойства функций g_m, ψ_m и (4.48)–(4.50), устанавливаем, что если $m \in \mathbb{N}$, то $h_m \in C^2((0,+\infty))$ и для любого $s \in (0,\, \alpha_m)$

$$\begin{aligned} h'_m(s) = \frac{1}{rs}\,[\,g_m(s)]^{-1/r}\left(\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{g_i(s)}\right)[\,1 - \psi_m(s) + \psi_m(s)(\alpha_m - s)^3\,] - \\ - [\,g_m(s)]^{-1/r}\,[\,\psi'_m(s)(1 - (\alpha_m - s)^3) + 3\psi_m(s)(\alpha_m - s)^2\,]\,, \end{aligned} \tag{4.51}$$

$$\begin{aligned} h''_m(s) = -\frac{1}{rs^2}[g_m(s)]^{-1/r}\left(\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{g_i(s)}\right)[1 - \psi_m(s) + \psi_m(s)(\alpha_m - s)^3] + \\ + \frac{1}{r^2s^2}[g_m(s)]^{-1/r}\left(\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{g_i(s)}\right)^2[1 - \psi_m(s) + \psi_m(s)(\alpha_m - s)^3] + \\ + \frac{1}{rs^2}[g_m(s)]^{-1/r}\left(\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{g_i(s)}\sum_{j=1}^{i}\frac{1}{g_j(s)}\right)[1 - \psi_m(s) + \psi_m(s)(\alpha_m - s)^3] - \\ - \frac{2}{rs}[g_m(s)]^{-1/r}\left(\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{g_i(s)}\right)[\psi'_m(s)(1 - (\alpha_m - s)^3) + 3\psi_m(s)(\alpha_m - s)^2] - \\ - [g_m(s)]^{-1/r}[\psi''_m(s)(1 - (\alpha_m - s)^3) + 6\psi'_m(s)(\alpha_m - s)^2 - 6\psi_m(s)(\alpha_m - s)]. \end{aligned} \tag{4.52}$$

Отметим, что если $m \in \mathbb{N}$ и $s \in (0,\, \alpha_m)$, то

$$\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{g_i(s)} \leqslant m\left(\ln\frac{1}{s}\right)^{-1} < \frac{n-p}{n^2}\,, \tag{4.53}$$

$$\frac{n-p}{p-1}\,h_m(s) - sh'_m(s) =$$
$$= \left(\frac{n-p}{p-1} - \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{g_i(s)}\right)[\,g_m(s)]^{-1/r}[\,1-\psi_m(s)+\psi_m(s)(\alpha_m-s)^3\,]+$$
$$+\,s[\,g_m(s)]^{-1/r}[\,\psi'_m(s)(1-(\alpha_m-s)^3)+3\psi_m(s)(\alpha_m-s)^2\,]\,. \quad (4.54)$$

Неравенство (4.53) следует из определения функций g_i и (4.49), а равенство (4.54) вытекает из (4.50) и (4.51).

В свою очередь, из (4.53), (4.54) и свойств функций ψ_m следует, что если $m \in \mathbb{N}$ и $s \in (0,\, \alpha_m)$, то

$$\frac{n-p}{p-1}\,h_m(s) - sh'_m(s) > 0. \quad (4.55)$$

Лемма 4.1. *Пусть* $m \in \mathbb{N}$ *и* $s \in (0,\, \alpha_m/3\,]$. *Тогда имеют место неравенства*

$$h_m(s) \geqslant \left(\frac{n-p}{m}\right)^{m/r} s^{(n-p)/r}\,, \quad (4.56)$$

$$s|h'_m(s)| \leqslant \frac{n-p}{2(p-1)}\,h_m(s). \quad (4.57)$$

Доказательство. Из (4.50) и равенства $\psi_m(s) = 0$ вытекает, что

$$h_m(s) = [\,g_m(s)]^{-1/r}\,, \quad (4.58)$$

а в силу определения функции g_m и свойств логарифмической функции имеем

$$g_m(s) \leqslant \left(\ln\frac{1}{s}\right)^m \leqslant \left(\frac{m}{n-p}\right)^m s^{p-n}\,.$$

Отсюда и из (4.58) выводим (4.56).

Далее, поскольку $\psi_m(s) = 0$ и $\psi'_m(s) = 0$, в силу (4.51) имеем

$$h'_m(s) = \frac{1}{rs}\,[\,g_m(s)]^{-1/r}\,\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{g_i(s)}\,.$$

Отсюда и из (4.58), (4.53) выводим (4.57). Лемма доказана. □

Пусть для любого $m \in \mathbb{N}$ Φ_m — функция на $(0,\, \alpha_m)$ такая, что для любого $s \in (0,\, \alpha_m)$

$$\Phi_m(s) = \left[\,\frac{n-p}{p-1}\,h_m(s) - sh'_m(s)\right]^{p-2}[\,|h'_m(s)| + s|h''_m(s)|\,]\,.$$

Лемма 4.2. *Пусть* $p \geqslant 2 - 1/n$, $m \in \mathbb{N}$ *и* $s \in (0, \alpha_m/3\,]$. *Тогда*

$$\Phi_m(s) \leqslant \frac{3m}{rs}\left(\frac{n-p}{p-1}\right)^{p-2}[\,g_m(s)]^{-(n-1)/n}\left(\ln\frac{1}{s}\right)^{-1}. \tag{4.59}$$

Доказательство. Используя (4.53), (4.54) и учитывая, что

$$\psi_m(s) = 0, \qquad \psi_m'(s) = 0, \tag{4.60}$$

получаем

$$\frac{3(n-p)}{4(p-1)}[\,g_m(s)]^{-1/r} < \frac{n-p}{p-1}\,h_m(s) - sh_m'(s) < \frac{n-p}{p-1}[\,g_m(s)]^{-1/r}.$$

Отсюда следует, что

$$\left[\frac{n-p}{p-1}\,h_m(s) - sh_m'(s)\right]^{p-2} < \frac{4}{3}\left(\frac{n-p}{p-1}\right)^{p-2}[\,g_m(s)]^{-(p-2)/r}. \tag{4.61}$$

Далее, в силу (4.51), (4.60) и (4.53) имеем

$$|h_m'(s)| \leqslant \frac{m}{rs}[\,g_m(s)]^{-1/r}\left(\ln\frac{1}{s}\right)^{-1}. \tag{4.62}$$

Поскольку по предположению $p \geqslant 2 - 1/n$, имеем $r \geqslant 1$. Тогда, используя (4.53), получаем

$$\frac{1}{r}\left(\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{g_i(s)}\right)^2 + \sum_{i=1}^{m}\frac{1}{g_i(s)}\sum_{j=1}^{i}\frac{1}{g_j(s)} < \sum_{i=1}^{m}\frac{1}{g_i(s)} \leqslant m\left(\ln\frac{1}{s}\right)^{-1}.$$

Отсюда и из (4.52), (4.60) и равенства $\psi_m''(s) = 0$ вытекает, что

$$s|h_m''(s)| \leqslant \frac{m}{rs}[\,g_m(s)]^{-1/r}\left(\ln\frac{1}{s}\right)^{-1}. \tag{4.63}$$

Из неравенств (4.61)–(4.63) выводим (4.59), и тем самым лемма доказана. $\square$

Лемма 4.3. *Пусть* $p \geqslant 2 - 1/n$, $m \in \mathbb{N}$ *и* $s \in [\,\alpha_m/3, \alpha_m)$. *Тогда*

$$\Phi_m(s) \leqslant \left(\frac{3}{\alpha_m}\right)^{p+2}\tau_m^p. \tag{4.64}$$

Доказательство. Предположим сначала, что $s \leqslant 2\alpha_m/3$. Тогда, используя (4.53), (4.54) и (4.49), получаем

$$\frac{3(n-p)}{4(p-1)}\left(\frac{\alpha_m}{3}\right)^3 [\,g_m(s)]^{-1/r} \leqslant \frac{n-p}{p-1}\, h_m(s) - s h'_m(s) \leqslant n\tau_m [\,g_m(s)]^{-1/r}\,.$$

Отсюда, учитывая (4.49), выводим, что

$$\left[\frac{n-p}{p-1}\, h_m(s) - s h'_m(s)\right]^{p-2} \leqslant \left[(n\tau_m)^{p-2} + \left(\frac{3}{\alpha_m}\right)^2\right] [\,g_m(s)]^{-(p-2)/r}\,. \tag{4.65}$$

Кроме того, в силу (4.51)–(4.53) и (4.49) имеем

$$|h'_m(s)| + s|h''_m(s)| \leqslant \frac{5\tau_m}{\alpha_m}\, [\,g_m(s)]^{-1/r}\,. \tag{4.66}$$

Из (4.65) и (4.66), учитывая (4.49) и неравенства $p \geqslant 2-1/n$, $g_m(s) > 1$, выводим (4.64).

Пусть теперь $s > 2\alpha_m/3$. Тогда имеем

$$\psi_m(s) = 1, \qquad \psi'_m(s) = 0, \qquad \psi''_m(s) = 0. \tag{4.67}$$

Используя первые два из этих равенств, а также (4.53) и (4.54), устанавливаем, что

$$\begin{aligned} 2\alpha_m [\,g_m(s)]^{-1/r} (\alpha_m - s)^2 < \frac{n-p}{p-1}\, h_m(s) - s h'_m(s) < \\ < \left(\frac{n-p}{p-1} + 9\right) \frac{\alpha_m}{3}\, [\,g_m(s)]^{-1/r} (\alpha_m - s)^2\,. \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая неравенства $n\alpha_m < 1$ и $2p \geqslant 3$, получаем

$$\left[\frac{n-p}{p-1}\, h_m(s) - s h'_m(s)\right]^{p-2} \leqslant \left(\frac{1}{\alpha_m}\right)^{p-1} [\,g_m(s)]^{-(p-2)/r} (\alpha_m - s)^{2(p-2)}\,. \tag{4.68}$$

Кроме того, в силу (4.51)–(4.53), (4.67) и (4.49) имеем

$$|h'_m(s)| + s|h''_m(s)| \leqslant [\,g_m(s)]^{-1/r} (\alpha_m - s). \tag{4.69}$$

Из (4.68) и (4.69) вытекает, что

$$\Phi_m(s) \leqslant \left(\frac{1}{\alpha_m}\right)^{p-1} [\,g_m(s)]^{-(p-1)/r} (\alpha_m - s)^{2p-3}\,.$$

Отсюда, учитывая неравенства $2p \geqslant 3$ и $g_m(s) > 1$, выводим (4.64). Лемма доказана. $\square$

Лемма 4.4. *Пусть* $p \geqslant 2 - 1/n$ *и* $m \in \mathbb{N}$. *Тогда*

$$\int\limits_0^{\alpha_m} \Phi_m(s)\, ds \leqslant \left(\frac{3}{\alpha_m}\right)^{p+2} \tau_m^p\,. \tag{4.70}$$

Доказательство. В силу леммы 4.2 и определения функции g_m для любого $s \in (0,\, \alpha_m/3\,]$ имеем

$$\Phi_m(s) \leqslant \frac{3m}{r}\left(\frac{n-p}{p-1}\right)^{p-2} \frac{1}{s}\left(\ln\frac{1}{s}\right)^{-2+1/n}.$$

Тогда

$$\int\limits_0^{\alpha_m/3} \Phi_m(s)\, ds \leqslant 3m(p-1)^{1-p}(n-p)^{p-2}\left(\ln\frac{3}{\alpha_m}\right)^{-(n-1)/n}. \tag{4.71}$$

Кроме того, в силу леммы 4.3 имеем

$$\int\limits_{\alpha_m/3}^{\alpha_m} \Phi_m(s)\, ds \leqslant 2\left(\frac{3}{\alpha_m}\right)^{p+1} \tau_m^p\,. \tag{4.72}$$

Заметим, что ввиду (4.49) и неравенства $p \geqslant 2 - 1/n$ правая часть неравенства (4.71) не превосходит α_m^{-p-1}. Учитывая это, из (4.71) и (4.72) выводим (4.70). Лемма доказана. ☐

Лемма 4.5. *Пусть* $m \in \mathbb{N}$. *Тогда*

$$\int\limits_0^{\alpha_m} \frac{1}{s}\, h_m^r(s)\, ds = +\infty. \tag{4.73}$$

Доказательство. В силу (4.50) для любого $s \in (0,\, \alpha_m/3\,]$ имеем

$$h_m^r(s) = \frac{1}{g_m(s)}\,.$$

Тогда для любого $\varepsilon \in (0,\, \alpha_m/3)$

$$\int\limits_\varepsilon^{\alpha_m} \frac{1}{s}\, h_m^r(s)\, ds \geqslant \int\limits_\varepsilon^{\alpha_m/3} \frac{1}{s g_m(s)}\, ds = b_{m+1}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) - b_{m+1}\left(\frac{3}{\alpha_m}\right).$$

Отсюда, учитывая, что $b_{m+1}(1/\varepsilon) \to +\infty$ при $\varepsilon \to 0$, заключаем, что равенство (4.73) имеет место. Лемма доказана. ☐

Пример 4.3. Пусть $p > 2 - 1/n$, $c > 0$ и $m \in \mathbb{N}$. Зафиксируем положительное число μ такое, что

$$\mu^{p-1} \leqslant \frac{c}{\varkappa_n}\,\alpha_{m+1}^{p+1}\,, \tag{4.74}$$

$$\mu^{p-1} \leqslant \frac{s_{m+1}}{n\tau_{m+1}^{p}}\left(\frac{\alpha_{m+1}}{3}\right)^{n+p+1}. \tag{4.75}$$

Пусть $\Omega = B$, и пусть F — функция на Ω такая, что для любого $x \in \Omega$, $0 < |x| < \alpha_{m+1}$,

$$F(x) = \mu^{p-1}|x|^{1-n}\left[\frac{n-p}{p-1}\,h_{m+1}(|x|) - |x|h'_{m+1}(|x|)\right]^{p-2}\times$$
$$\times\left[\,(n-2p+1)h'_{m+1}(|x|) - (p-1)|x|h''_{m+1}(|x|)\,\right],$$

а для любого $x \in \Omega$, $|x| \geqslant \alpha_{m+1}$, $F(x) = 0$.

В силу определения функции Φ_{m+1} для любого $x \in \Omega$, $0 < |x| < \alpha_{m+1}$, имеем

$$|F(x)| \leqslant n\mu^{p-1}|x|^{1-n}\Phi_{m+1}(|x|). \tag{4.76}$$

Отсюда и из леммы 4.4 вытекает, что $F \in L^1(\Omega)$.

Пусть коэффициенты a_i, $i = 1,\dots,n$, и правая часть f уравнения в задаче (1.4) такие, что

1) для любых $i \in \{1,\dots,n\}$ и $(x,\xi) \in \Omega\times\mathbb{R}^n$ $\quad a_i(x,\xi) = A_i(\xi)$;

2) $f = F$.

Пусть u — функция на Ω такая, что для любого $x \in \Omega\backslash\{0\}$

$$u(x) = \mu|x|^{-(n-p)/(p-1)}h_{m+1}(|x|).$$

Покажем, что справедливы следующие предложения:

(i) *функция u есть слабое решение задачи* (1.4);

(ii) *функция u есть энтропийное решение задачи* (1.4);

(iii) *функция u не принадлежит пространству* $\overset{\circ}{W}{}^{1,r}(\Omega)$;

(iv) *для любого* $k > s_{m+1}$

$$\int\limits_{\{|f|>k\}} |f|\,dx \leqslant c\left[\,\prod_{j=1}^{m+1} b_j(k)\right]^{-(n-1)/n}.$$

Действительно, в силу (4.50), (4.55) и лемм 4.1 и 4.4 относительно функции μh_{m+1} и числа α_{m+1} выполняются условия 1)–6) предложения 4.3. Тогда ввиду предложения 4.3, леммы 4.5 и предположений 1), 2) рассматриваемого примера имеем $u \in \overset{\circ}{W}{}^{1,1}(\Omega)$, и справедливы следующие утверждения:

(i′) *для любого* $\lambda \in [1, r)$ $\quad |\nabla u| \in L^{\lambda}(\Omega)$;
(ii′) *для любой функции* $\varphi \in C_0^{\infty}(\Omega)$

$$\int\limits_{\Omega} \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i(x, \nabla u) D_i \varphi \right\} dx = \int\limits_{\Omega} f \varphi \, dx;$$

(iii′) *для любых* $\varphi \in C_0^{\infty}(\Omega)$ *и* $k > 0$ $\quad T_k(u - \varphi) \in \overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\Omega)$;
(iv′) *для любых* $\varphi \in C_0^{\infty}(\Omega)$ *и* $k > 0$ *функция* $\sum_{i=1}^{n} a_i(x, \nabla u) \times D_i T_k(u - \varphi)$ *суммируема на* Ω *и*

$$\int\limits_{\Omega} \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i(x, \nabla u) D_i T_k(u - \varphi) \right\} dx = \int\limits_{\Omega} f \, T_k(u - \varphi) \, dx;$$

(v′) *функция* u *не принадлежит пространству* $\overset{\circ}{W}{}^{1,r}(\Omega)$.

Из утверждений (i′), (ii′) и предположения 1) вытекает, что функция u есть слабое решение задачи (1.4). Значит, предложение (i) справедливо.

Далее, в силу утверждения (iii′) имеем $u \in \overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,p}(\Omega)$, а в силу (1.5) и предложения 1.1 имеем $\nabla u = \delta u$ п.в. на Ω, и если $\varphi \in C_0^{\infty}(\Omega)$ и $k > 0$, то для любого $i \in \{1, \dots, n\}$

$$D_i T_k(u - \varphi) = (\delta_i u - \delta_i \varphi) \cdot 1_{\{|u - \varphi| < k\}} \quad \text{п.в. на } \Omega.$$

Эти факты и утверждение (iv′) позволяют заключить, что функция u есть энтропийное решение задачи (1.4). Значит, предложение (ii) справедливо.

Предложение (iii) справедливо, поскольку оно совпадает с утверждением (v′).

Перейдем к доказательству справедливости предложения (iv). Пусть $k > s_{m+1}$. Положим

$$\tilde{B} = \{ x \in \mathbb{R}^n : |x| \leqslant \alpha_{m+1}/3 \}, \qquad \tilde{B}_k = \{ x \in \mathbb{R}^n : |x| \leqslant k^{-1/2n} \},$$

и пусть H — функция на $\tilde{B}_k$ такая, что для любого $x \in \tilde{B}_k \backslash \{0\}$

$$H(x) = \frac{1}{|x|^n} \left(\ln \frac{1}{|x|} \right)^{-2+1/n}.$$

Легко видеть, что функция H суммируема на $\tilde{B}_k$ и

$$\int\limits_{\tilde{B}_k} H \, dx \leqslant 3n\varkappa_n (\ln k)^{-(n-1)/n}. \tag{4.77}$$

Оценим интеграл функции $|f|$ по множеству $\tilde{B} \cap \tilde{B}_k$. Пусть $x \in (\tilde{B} \cap \tilde{B}_k)\backslash\{0\}$. Следовательно, $0 < |x| \leqslant \alpha_{m+1}/3$. Тогда в силу (4.76) и предположения 2) имеем

$$|f(x)| \leqslant n\mu^{p-1}|x|^{1-n}\,\Phi_{m+1}(|x|),$$

а в силу леммы 4.2

$$\Phi_{m+1}(|x|) \leqslant \frac{3(m+1)}{r|x|}\left(\frac{n-p}{p-1}\right)^{p-2}[\,g_{m+1}(|x|)]^{-(n-1)/n}\left(\ln\frac{1}{|x|}\right)^{-1}.$$

Из этих неравенств вытекает, что

$$|f(x)| \leqslant 3n(m+1)\mu^{p-1}(n-p)^{p-2}|x|^{-n}[\,g_{m+1}(|x|)]^{-(n-1)/n}\left(\ln\frac{1}{|x|}\right)^{-1}. \tag{4.78}$$

Получим подходящую оценку для $g_{m+1}(|x|)$. Поскольку $x \in \tilde{B}_k$, имеем

$$\ln\,\ln\frac{1}{|x|} \geqslant \ln\,\ln\,k - \ln(2n). \tag{4.79}$$

Кроме того, в силу (4.49) и неравенства $|x| < \alpha_{m+1}$ имеем $\ln\frac{1}{|x|} > 2n$. Отсюда и из (4.79) вытекает, что

$$b_2\left(\frac{1}{|x|}\right) \geqslant \frac{1}{2}\,b_2(k).$$

Используя это неравенство и (4.49), индукцией по j устанавливаем, что для любого $j \in \{2,\dots,m+1\}$

$$b_j\left(\frac{1}{|x|}\right) \geqslant \frac{1}{2}\,b_j(k).$$

Тогда

$$g_{m+1}(|x|) \geqslant 2^{-m}\left[\,\prod_{j=2}^{m+1} b_j(k)\right]\ln\frac{1}{|x|}.$$

Отсюда и из (4.78) следует, что

$$|f(x)| \leqslant 3n(m+1)2^m\mu^{p-1}(n-p)^{p-2}\left[\,\prod_{j=2}^{m+1} b_j(k)\right]^{-(n-1)/n} H(x).$$

Полученный результат и неравенство (4.77) позволяют заключить, что

$$\int\limits_{\tilde{B}\cap\tilde{B}_k} |f|\,dx \leqslant 9n^2\varkappa_n(m+1)2^m\mu^{p-1}(n-p)^{p-2}\left[\,\prod_{j=1}^{m+1} b_j(k)\right]^{-(n-1)/n}. \tag{4.80}$$

Покажем, что

$$\{\,|f|>k\,\}\subset \tilde{B}\cap\tilde{B}_k\,. \tag{4.81}$$

Действительно, пусть $x\in\{\,|f|>k\,\}$. Значит,

$$k<|f(x)|. \tag{4.82}$$

Если $x=0$, то очевидно, что $x\in\tilde{B}\cap\tilde{B}_k$. Пусть $x\neq 0$. Ясно, что $|x|<\alpha_{m+1}$. Предположим, что $|x|>\alpha_{m+1}/3$. Тогда в силу леммы 4.3

$$\Phi_{m+1}(|x|)\leqslant\left(\frac{3}{\alpha_{m+1}}\right)^{p+2}\tau_{m+1}^{p}\,.$$

Отсюда и из (4.76) вытекает, что

$$|f(x)|\leqslant n\mu^{p-1}\left(\frac{3}{\alpha_{m+1}}\right)^{n+p+1}\tau_{m+1}^{p}\,.$$

Из этого неравенства, учитывая (4.75) и неравенство $s_{m+1}<k$, получаем, что $|f(x)|<k$. Тем самым имеем противоречие с (4.82). Следовательно, $|x|\leqslant\alpha_{m+1}/3$. Значит, $x\in\tilde{B}$. Кроме того, в силу леммы 4.2 и неравенства $g_{m+1}(|x|)>1$ имеем

$$\Phi_{m+1}(|x|)\leqslant 3(m+1)(n-p)^{p-2}|x|^{-1}\left(\ln\frac{1}{|x|}\right)^{-1}.$$

Отсюда и из (4.76) вытекает, что

$$|f(x)|\leqslant 3n(m+1)\mu^{p-1}(n-p)^{p-2}|x|^{-n}\left(\ln\frac{1}{|x|}\right)^{-1}. \tag{4.83}$$

Заметим, что в силу (4.49)

$$\ln\frac{1}{|x|}>\frac{(m+1)n^2}{n-p}\,. \tag{4.84}$$

Из неравенств (4.82)–(4.84) выводим, что

$$k<3\mu^{p-1}n^{p-2}|x|^{-n}\,. \tag{4.85}$$

Используя (4.49) и (4.75), получаем

$$4(\mu n)^{2(p-1)}<4\mu^{p-1}\alpha_{m+1}^{-2p}<s_{m+1}<k.$$

Отсюда и из (4.85) вытекает, что $|x|^n<k^{-1/2}$. Следовательно, $x\in\tilde{B}_k$, и окончательно получаем, что $x\in\tilde{B}\cap\tilde{B}_k$. Тем самым включение (4.81) установлено.

Заметим, что в силу (4.49), (4.74) и неравенства $p > 3/2$ имеет место оценка

$$9n^2\varkappa_n(m+1)2^m\mu^{p-1}(n-p)^{p-2} < c. \tag{4.86}$$

Из (4.80), (4.81) и (4.86) выводим оценку сверху для интеграла функции $|f|$ по множеству $\{\,|f| > k\,\}$, которая позволяет заключить, что предложение (iv) справедливо.

Докажем, наконец, что справедливо следующее предложение:

(v) *для любого* $t \in (0,\,(n-1)/n)$ $\quad f[\ln(1+|f|)]^t \in L^1(\Omega)$.

Действительно, пусть $t \in (0,\,(n-1)/n)$. Используя лемму 4.2, (4.76), (4.75) и (4.49), устанавливаем, что для любого $x \in \tilde{B}\backslash\{0\}$

$$|f(x)| \leqslant \frac{1}{|x|^n}\left(\ln\frac{1}{|x|}\right)^{-2+1/n}.$$

Тогда, учитывая (4.49), получаем, что для любого $x \in \tilde{B}\backslash\{0\}$

$$|f(x)|\,[\ln(1+|f(x)|)\,]^t \leqslant \frac{n}{|x|^n}\left(\ln\frac{1}{|x|}\right)^{t-2+1/n}.$$

Отсюда вытекает, что функция $|f|\,[\ln(1+|f|)\,]^t$ суммируема на $\tilde{B}$. Кроме того, в силу леммы 4.3, (4.76) и (4.75) имеем $|f| \leqslant s_{m+1}$ на $\Omega\backslash\tilde{B}$. Следовательно, функция $|f|\,[\ln(1+|f|)\,]^t$ суммируема на $\Omega\backslash\tilde{B}$. Теперь можно заключить, что $f[\ln(1+|f|)\,]^t \in L^1(\Omega)$. Тем самым справедливость предложения (v) установлена.

Замечание 4.4. Из предложений (ii)–(iv) примера 4.3 следует, что условие теоремы 1.7 относительно функции f, вообще говоря, нельзя ослабить, не нарушая свойство принадлежности энтропийного решения задачи (1.4) пространству $\overset{\circ}{W}{}^{1,r}(\Omega)$. Минимальное ослабление условия теоремы 1.7 относительно функции f (т.е. допущение $\sigma = (n-1)/n$) приводит, как показывает пример 4.3, к ситуациям, в которых энтропийное решение задачи (1.4) (единственное в силу теоремы 1.1) не принадлежит $\overset{\circ}{W}{}^{1,r}(\Omega)$, и существует слабое решение задачи (1.4), также не принадлежащее $\overset{\circ}{W}{}^{1,r}(\Omega)$.

Замечание 4.5. В силу предложения 4.1 выполнение условия теоремы 1.7 относительно функции f влечет справедливость свойства: для любого $t \in (0,\,(n-1)/n)$ функция $f[\ln(1+|f|)\,]^t$ принадлежит $L^1(\Omega)$. Обратное, как следует из предложений (ii), (iii), (v) примера 4.3 и теоремы 1.7, вообще говоря, не верно.

Литература

[1] L. Boccardo, T. Gallouët, *Non-linear elliptic and parabolic equations involving measure data* // J. Funct. Anal. **87** (1989), 149–169.

[2] L. Boccardo, T. Gallouët, *Nonlinear elliptic equations with right hand side measures* // Comm. Partial Differential Equations. **17** (1992), 641–655.

[3] Ph. Bénilan, L. Boccardo, T. Gallouët, R. Gariepy, M. Pierre, J. L. Vazquez, *An L^1-theory of existence and uniqueness of solutions of nonlinear elliptic equations* // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. **22** (1995), 241–273.

[4] А. А. Ковалевский, *О суммируемости решений нелинейных эллиптических уравнений с правыми частями из классов, близких к L^1* // Матем. заметки. **70** (2001), 375–385.

[5] D. Gilbarg, N. S. Trudinger, *Elliptic partial differential equations of second order.* Berlin: Springer-Verlag, 1983.

[6] А. А. Ковалевский, *О суммируемости решений нелинейных эллиптических уравнений с правыми частями из логарифмических классов* // "Математические заметки", **74** (2003), 676–685.

[7] A. A. Kovalevsky, *Summability of solutions of the Dirichlet problem for some classes of nonlinear elliptic equations*: Preprint no. 2002.02. Donetsk: IAMM, 2002.

[8] A. A. Kovalevsky, *Summability of solutions of nonlinear elliptic equations with data of logarithmic classes* // Book of Abstracts. Int. Conf. on Differential and Functional Differential Equations. Moscow, Russia, August 11–17, 2002. Moscow, 2002, 57–58.

[9] А. А. Ковалевский, *Энтропийные решения задачи Дирихле для одного класса нелинейных эллиптических уравнений четвертого порядка с L^1-правыми частями* // Известия РАН. Сер. матем. **65** (2001), 27–80.

[10] A. A. Kovalevsky, *Entropy solutions of Dirichlet problem for a class of nonlinear elliptic high-order equations with L^1-data* // Нелинейные граничные задачи. (2002), No 12, 119–127.

Сведения об авторах

Александр Альбертович Ковалевский

Институт прикладной математики
и механики НАН Украины,
Р. Люксембург 74,
83114, Донецк,
Украина
E-Mail: alexkvl@iamm.ac.donetsk.ua