Український математичний вісник
Том 2 **(2005)**, № 1, 74 – 83

Исследование устойчивости с помощью знакопостоянных функций Ляпунова

Александр О. Игнатьев

(*Представлена Н. А. Перестюком*)

Аннотация. Рассмотрена неавтономная система обыкновенных дифференциальных уравнений, допускающая нулевое решение, для которой существует неотрицательная функция Ляпунова, производная которой в силу системы неположительна. Предполагается, что нулевое решение системы равномерно асимптотически устойчиво на том множестве, на котором функция Ляпунова обращается в нуль. Доказаны теоремы о равномерной и равномерной асимптотической устойчивости. Приведен иллюстративный пример.

2000 MSC. 34D20.

Ключевые слова и фразы. Равномерная асимптотическая устойчивость, метод функций Ляпунова.

1. Введение

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = X(t,x), \tag{1.1}$$

где $x = (x^1, x^2, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}_+ = [0,\infty)$, $X = (X_1, X_2, \dots, X_n) : \mathbb{R}_+ \times B_H \to \mathbb{R}^n$, $B_H = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \le H\}$. Функции $X_i(t,x)$ $(i = 1,\dots,n)$ предполагаем непрерывными и удовлетворяющими условию Липшица по x равномерно по t в области $\mathbb{R}_+ \times B_H$, где $H > 0$ — некоторая константа; $X(t,0) \equiv 0$. При этих предположениях система (1.1) допускает тривиальное решение

$$x = 0. \tag{1.2}$$

Статья поступила в редакцию 4.06.2004

ISSN 1810 – 3200.

При исследовании равномерной асимптотической устойчивости решения (1.2) системы (1.1) обычно используют прямой метод Ляпунова. Этот метод предполагает существование определенно-положительной функции $V(t,x)$, такой, что ее производная $\dfrac{dV}{dt}$ в силу системы (1.1) есть функция определенно-отрицательная. Однако стандартных методов построения функций Ляпунова для систем общего вида не существует, поэтому для приложений представляет интерес получение критериев равномерной асимптотической устойчивости с использованием функций, обладающих более мягкими свойствами по отношению к функциям V и $\dfrac{dV}{dt}$. В работах [2, 8, 10, 11] получены такие критерии в предположении, что V положительно определена, а $\dfrac{dV}{dt}$ отрицательно-постоянна. В статьях [3, 4, 7] были ослаблены также условия на функцию V, которая уже предполагалась не определенно-положительной, а положительно-постоянной ($V \geq 0$), причем в [3, 4] правые части системы предполагались автономными или периодическими по t. В работе [7] в качестве правых частей системы рассматривался частный случай неавтономных систем, и при доказательстве теорем об устойчивости и асимптотической устойчивости использовались свойства предельных уравнений. Настоящая работа представляет собой развитие работ [3, 4, 7] в предположении, что система (1.1) неавтономна, и ее нулевое решение равномерно асимптотически устойчиво на интегральном множестве $V(t,x)=0$.

2. Основные определения

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений (1.1). Обозначим $\Gamma = \mathbb{R}_+ \times B_H$, где H — некоторое положительное число. Введем ряд определений, которые использовались в работах [5, 6].

Определение 2.1. *Множество M пространства (t,x) называется интегральным, если для любой точки $(t_0,x_0) \in M$ выполняется $(t,x(t)) \in M,\ t \geq t_0$, где $x(t)=x(t,t_0,x_0)$ — решение системы* (1.1) *с начальными данными $x(t_0)=x_0$.*

Пусть $M \subset \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$. Обозначим через M_s пересечение этого множества с гиперплоскостью $t=s$, а через $\rho(x,M_s)$ — расстояние от точки x до множества M_s.

По аналогии с работами [4, 9], введем следующие определения.

Определение 2.2. *Решение* (1.2) *системы* (1.1) *назовем устойчивым относительно интегрального множества M, если для любых*

$\varepsilon > 0$ и $t_0 \in \mathbb{R}_+$ найдется $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$, такое, что если только $(t_0, x_0) \in M, \|x_0\| < \delta$, то $\|x(t, t_0, x_0)\| < \varepsilon$ при $t \geq t_0$.

Определение 2.3. *Если в предыдущем определении число δ можно выбрать не зависящим от t_0 (т.е. $\delta = \delta(\varepsilon)$), то решение* (1.2) *назовем равномерно устойчивым относительно M.*

Определение 2.4. *Нулевое решение системы* (1.1) *назовем притягивающим относительно интегрального множества M, если для любого $t_0 \in \mathbb{R}_+$ найдется $\eta = \eta(t_0) > 0$ и для любых $\varepsilon > 0$ и $x_0 \in M_{t_0} \bigcap B_\eta$ найдется $\sigma = \sigma(\varepsilon, t_0, x_0) > 0$, такое, что $\|x(t, t_0, x_0)\| < \varepsilon$ для всех $t \geq t_0 + \sigma$.*

Определение 2.5. *Тривиальное решение уравнений* (1.1) *называется равномерно притягивающим относительно M, если для некоторого $\eta > 0$ и любого $\varepsilon > 0$ найдется $\sigma = \sigma(\varepsilon) > 0$, такое, что $\|x(t, t_0, x_0)\| < \varepsilon$ при всех $t_0 \in \mathbb{R}_+,\ x_0 \in M_{t_0} \bigcap B_\eta$ и $t \geq t_0 + \sigma$.*

Определение 2.6. *Решение* (1.2) *системы дифференциальных уравнений* (1.1) *называется:*

— асимптотически устойчивым относительно интегрального множества M, если оно устойчиво и притягивающее относительно M;

— равномерно асимптотически устойчивым относительно интегрального множества M, если оно равномерно устойчиво и равномерно притягивающее относительно M.

Определение 2.7. *Будем говорить, что функция $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ есть функция Хана ($g \in \mathcal{K}$), если она непрерывна, монотонно-возрастающая и $g(0) = 0$.*

Так как, по предположению, правые части уравнений (1.1) удовлетворяют условию Липшица, то существует $L > 0$, такое, что

$$\|X(t, x_1) - X(t, x_2)\| \leq L\|x_1 - x_2\|, \quad x_1 \in B_H,\ x_2 \in B_H;$$

поэтому, если $x(t, t_0, x_0) \in B_H,\ y(t, t_0, y_0) \in B_H$, то, используя оценку [1, с. 14], получаем

$$\|x(t, t_0, x_0) - y(t, t_0, y_0)\| \leq \delta e^{L(t-t_0)}, \tag{2.1}$$

если $\|x_0 - y_0\| \leq \delta$.

3. Теорема о равномерной устойчивости

Теорема 3.1. *Пусть система* (1.1) *такова, что существует непрерывная функция* $V(t,x) : \mathbb{R}_+ \times B_H \to \mathbb{R}$, *такая, что:*

а) V *периодична по* t *с периодом* ω;

б) $V(t,x) \geq 0, \quad V(t,0) \equiv 0$;

в) функция V *не возрастает вдоль решений системы* (1.1);

г) решение (1.2) *системы* (1.1) *равномерно асимптотически устойчиво относительно интегрального множества* M, *где*

$$M = \{(t,x) : t \in \mathbb{R}_+,\ x \in B_H, \quad V(t,x) = 0\}.$$

Тогда нулевое решение системы (1.1) *равномерно устойчиво.*

Доказательство. Введем обозначения

$$S(\alpha) = \{(t,x) \in \mathbb{R}_+ \times B_\alpha :\ V(t,x) = 0\},$$

$$S_t(\alpha) = \{x \in B_\alpha :\ V(t,x) = 0\}.$$

Доказательство проведем от противного, т.е. предположим, что решение (1.2) системы (1.1) не является равномерно устойчивым. Это означает, что существует положительное число h и последовательность начальных данных $\{(t_{0n}, x_{0n})\}_{n=1}^{\infty}$, таких, что $t_{0n} \geq 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_{0n}\| = 0$, $\|x(t_{0n}+T_n^*, t_{0n}, x_{0n})\| \geq h$ при некоторых $T_n^* > 0$. Пусть ε — произвольное положительное число, удовлетворяющее условию $4\varepsilon < h$. В силу предположения *г*) теоремы, тривиальное решение системы (1.1) является равномерно притягивающим относительно M. Следовательно, для некоторого $\eta > 0$ найдется такое $\sigma = \sigma(\varepsilon) > 0$, что $\|x(t,t_0,x_0)\| < \varepsilon$ при всех $t_0 \in \mathbb{R}_+,\ x_0 \in S_{t_0}(\eta),\ t \geq t_0+\sigma$. В дальнейшем ε будем считать таким, что выполняется неравенство $4\varepsilon < \eta$. Пусть числа $T_n > 0$ обозначают моменты времени, такие, что

$$\|x(t_{0n}+T_n, t_{0n}, x_{0n})\| = 4\varepsilon, \quad \|x(t_{0n}+t, t_{0n}, x_{0n})\| < 4\varepsilon \ \text{ при }\ t < T_n. \tag{3.1}$$

Учитывая неравенство (2.1), заключаем, что $\lim\limits_{n\to\infty} T_n = +\infty$. Рассмотрим также последовательность $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$, такую, что при $n \geq n_0 \in \mathbb{N}$ ($\mathbb{N}$ — это множество натуральных чисел) выполняются неравенства

$$0 < t_n < T_n, \quad \sigma \leq T_n - t_n \leq Q, \tag{3.2}$$

где Q — константа, удовлетворяющая условию $Q > \sigma$ (например, в качестве Q можно взять 2σ), и последовательность $\{\tau_n\}_{n=1}^{\infty}$, члены которой удовлетворяют условиям

$$\tau_n \in [0,\omega), \qquad \tau_n = t_{0n} + t_n - p_n\omega, \tag{3.3}$$

где $p_n \in \mathbb{Z}_+$ ($\mathbb{Z}_+$ — это множество целых неотрицательных чисел).

Рассмотрим последовательность $\{y_n\}$ точек в фазовом пространстве, где

$$y_n = x(t_{0n} + t_n, t_{0n}, x_{0n}). \tag{3.4}$$

На основании предположений (3.1) и (3.2) можно сделать вывод, что $y_n \in B_{4\varepsilon}$ при любом $n \geq n_0 \in \mathbb{N}$. $B_{4\varepsilon}$ является ограниченным и замкнутым множеством в $\mathbb{R}^n$, следовательно, из последовательности $\{y_n\}$ можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к некоторому элементу $y_* \in B_{4\varepsilon}$. Аналогично, из последовательности $\{\tau_n\}$ можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к $\tau_* \in [0, \omega]$. Не нарушая общности, будем считать, что сами последовательности сходятся к соответствующим элементам: $y_n \to y_*$, $\tau_n \to \tau_*$ при $n \to \infty$.

Учитывая свойства функции V и обозначения (3.3), (3.4), получаем

$$0 \leq V(\tau_*, y_*) = \lim_{n\to\infty} V(\tau_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} V(t_{0n} + t_n, y_n) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} V(t_{0n} + t_n, x(t_{0n} + t_n, t_{0n}, x_{0n})) \leq \lim_{n\to\infty} V(t_{0n}, x_{0n}) = 0.$$

Следовательно, $V(\tau_*, y_*) = 0$ и $(\tau_*, y_*) \in S(4\varepsilon)$. Обозначим $k \in \mathbb{N}$ такое число, что выполняются условия

$$k \geq n_0, \quad t_k \geq \sigma(\varepsilon), \quad |\delta_k| < \max\Big\{1, \frac{\varepsilon}{Lh} e^{-LQ}\Big\}, \quad \|y_k - y_*\| < \varepsilon e^{-QL}, \tag{3.5}$$

где $\delta_k = t_{0k} + t_k - p_k\omega - \tau_* = \tau_k - \tau_*$. Очевидно, что выбор такого k возможен, так как $\delta_n \to 0$, $\|y_n - y_*\| \to 0$, $t_n \to +\infty$ при $n \to \infty$.

Имеем оценку

$$\|x(t_{0k} + T_k, t_{0k}, x_{0k})\| \leq J_1 + J_2 + J_3,$$

где

$$J_1 = \|x(t_{0k} + T_k, t_{0k}, x_{0k}) - x(t_{0k} + T_k, t_{0k} + t_k, y_*)\|,$$
$$J_2 = \|x(t_{0k} + T_k, t_{0k} + t_k, y_*) - x(t_{0k} + T_k, t_{0k} + t_k - \delta_k, y_*)\|,$$
$$J_3 = \|x(t_{0k} + T_k, \tau_* + p_k\omega, y_*)\| = \|x(t_{0k} + T_k, t_{0k} + t_k - \delta_k, y_*)\|.$$

В силу единственности решений $x(t_{0k}+T_k, t_{0k}, x_{0k}) = x(t_{0k}+T_k, t_{0k} + t_k, x(t_{0k}+t_k, t_{0k}, x_{0k})) = x(t_{0k}+T_k, t_{0k}+t_k, y_k)$, следовательно, в силу (2.1) и (3.5) получаем

$$J_1 = \|x(t_{0k} + T_k, t_{0k} + t_k, y_k) - x(t_{0k} + T_k, t_{0k} + t_k, y_*)\| \leq$$
$$\leq \|y_* - y_k\| e^{(T_k - t_k)L} \leq \|y_* - y_k\| e^{QL} < \varepsilon. \tag{3.6}$$

Оценим теперь J_2 и J_3 с учетом условий (3.5).

$$\begin{aligned} J_2 = \|x(t_{0k} + T_k, t_{0k} + t_k, y_*) - \\ - x(t_{0k} + T_k, t_{0k} + t_k, x(t_{0k} + t_k, t_{0k} + t_k - \delta_k, y_*))\| \leq \\ \leq \|y_* - x(t_{0k} + t_k, t_{0k} + t_k - \delta_k, y_*)\| e^{LQ} \leq |\delta_k| L h e^{LQ} < \varepsilon; \end{aligned} \tag{3.7}$$

$J_3 < \varepsilon$ в силу того, что $(\tau_* + p_k\omega, y_*) \in S(4\varepsilon)$ и $T_k - t_k \geq \sigma(\varepsilon)$.

Отметим, что оценка (3.7) проведена в предположении $\delta_k \geq 0$, но можно показать аналогично, что она справедлива также при $\delta_k \leq 0$.

Воспользовавшись полученными оценками, имеем

$$\|x(t_{0k} + T_k, t_{0k}, x_{0k})\| < 3\varepsilon,$$

что противоречит предположению (3.1). Полученное противоречие доказывает равномерную устойчивость нулевого решения уравнений (1.1). □

4. Теорема о равномерной асимптотической устойчивости

Теорема 4.1. *Пусть система* (1.1) *такова, что существует дифференцируемая функция* $V(t, x) : \mathbb{R}_+ \times B_H \to \mathbb{R}$*, такая, что:*

а) V *периодична по* t *с периодом* ω*;*

б) $V(t, x) \geq 0, \quad V(t, 0) \equiv 0$*;*

в) $\dfrac{dV}{dt} \leq -c(V(t, x)),\ c \in \mathcal{K}$*;*

г) решение (1.2) *системы* (1.1) *равномерно асимптотически устойчиво относительно интегрального множества* $S(H)$.

Тогда нулевое решение системы (1.1) *равномерно асимптотически устойчиво.*

Доказательство. Так как нулевое решение уравнений (1.1) равномерно асимптотически устойчиво относительно $S(H)$, то существует $\eta > 0$, такое, что

$$\begin{gathered} (\forall\, \xi > 0)\ (\exists\, \sigma = \sigma(\xi) > 0)\ (\forall\, t_0 \in \mathbb{R}_+)\ (\forall\, x_0 \in S_{t_0}(\eta)) \\ (\forall\, t \geq t_0 + \sigma) \|x(t, t_0, x_0)\| < \xi. \end{gathered} \tag{4.1}$$

В силу теоремы 3.1 решение (1.2) системы (1.1) является равномерно устойчивым, следовательно, можно указать $\zeta > 0$, такое, что $\|x(t, t_0, x_0)\| < \eta$ при всех $x_0 \in B_\zeta,\ t_0 \in \mathbb{R}_+,\ t \geq t_0$. Покажем теперь, что нулевое решение системы (1.1) — равномерно притягивающее.

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Из равномерной устойчивости тривиального решения следует существование такого $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для любых $x_0 \in B_\delta,\ t_0 \in \mathbb{R}_+,\ t \geq t_0$ справедливо неравенство

$$\|x(t, t_0, x_0)\| < \varepsilon. \tag{4.2}$$

Используя (4.1), получаем

$$\begin{gathered}\Big(\exists\, \sigma_1 = \sigma_1(\varepsilon) = \sigma\Big(\frac{\delta}{3}\Big) > 0\Big)(\forall\, t_0 \in \mathbb{R}_+)\ (\forall\, y_0 \in S_{t_0}(\eta))\\ (\forall\, t \geq t_0 + \sigma_1)\ \|x(t, t_0, y_0)\| < \frac{\delta}{3}.\end{gathered} \tag{4.3}$$

Из неравенства (2.1) следует, что существует

$$\gamma = \gamma(\varepsilon) = \frac{1}{3}\delta(\varepsilon)e^{-L\sigma_1(\varepsilon)} > 0,$$

такое, что если $t_0 \in \mathbb{R}_+,\ \|x_0 - y_0\| < \gamma$, то

$$\|x(t_0 + \sigma_1, t_0, x_0) - x(t_0 + \sigma_1, t_0, y_0)\| < \frac{\delta}{3}. \tag{4.4}$$

Покажем, что для всех решений $x(t)$, начинающихся в B_ζ, справедливо

$$\lim_{t\to\infty}\ \rho(x(t, t_0, x_0), S_t(\eta)) = 0, \tag{4.5}$$

причем предельное соотношение (4.5) выполняется равномерно по $t_0 \in \mathbb{R}_+,\ x_0 \in B_\zeta$. Для этого покажем вначале, что существует функция Хана a, такая, что

$$V(t, x) \geq a(\rho(x, S_t(\eta))). \tag{4.6}$$

Обозначим

$$\psi(r) = \inf V(t, x)\ \ \text{при}\ \ t \in [0, \omega],\ \rho(x, S_t(\eta)) = r,\ x \in B_\eta,$$

$\psi(r)$ — это скалярная непрерывная функция, такая, что $\psi(0) = 0$, $\psi(r) > 0$ при $r > 0$. Обозначим $a(r)$ такую непрерывную монотонно-возрастающую функцию, что $a(0) = 0,\ a(r) \leq \psi(r)$ при $0 < r < \eta$. Очевидно, что так построенная функция a удовлетворяет свойству (4.6). Покажем теперь, что

$$\begin{gathered}(\forall\, \alpha > 0)\ (\exists\, T = T(\alpha))\ (\forall\, t_0 \in \mathbb{R}_+)\ (\forall\, x_0 \in B_\zeta)\ (\forall\, t \geq t_0 + T)\\ V(t, x(t, t_0, x_0)) < \alpha.\end{gathered} \tag{4.7}$$

Обозначим $\sup\limits_{\substack{t\in[0,\omega]\\ x\in B_H}} V(t,x) = P$. Оценим промежуток времени, в течение которого может выполняться неравенство $V(t, x(t, t_0, x_0)) \geq \alpha$. В этом случае

$$V(t, x(t)) = V(t_0, x_0) + \int\limits_{t_0}^{t} \dot V dt \leq P - c(\alpha)(t - t_0);$$

$$c(\alpha)(t - t_0) \leq P - V(t, x(t)) \leq P - \alpha; \quad t - t_0 \leq \frac{P - \alpha}{c(\alpha)}.$$

Следовательно, (4.7) справедливо, если $T = \dfrac{P - \alpha}{c(\alpha)}$.

На основании свойств (4.7) и (4.6) получаем справедливость предельного соотношения (4.5):

$$(\forall\gamma > 0)\ (\exists T_1 = T_1(\gamma) > 0)\ (\forall t_0 \in \mathbb{R}_+)\ (\forall x_0 \in B_\zeta)\ (\forall t \geq t_0 + T_1)$$
$$\rho(x(t, t_0, x_0), S_t(\eta)) < \gamma.$$

Отсюда следует, что

$$(\forall t_0 \in \mathbb{R}_+)\ (\forall x_0 \in B_\zeta)\ (\exists y_0 \in S_{t_0+T_1}(\eta))\|x(t_0 + T_1, t_0, x_0) - y_0)\| < \gamma. \tag{4.8}$$

Из (4.8) и (4.4) получаем

$$\|x(t_0+T_1+\sigma_1, t_0+T_1, x(t_0+T_1, t_0, x_0)) - x(t_0+T_1+\sigma_1, t_0+T_1, y_0)\| < \frac{\delta}{3}.$$

Это неравенство может быть переписано в виде

$$\|x(t_0 + T_1 + \sigma_1, t_0, x_0) - x(t_0 + T_1 + \sigma_1, t_0 + T_1, y_0)\| < \frac{\delta}{3}. \tag{4.9}$$

На основании (4.3) получаем

$$\|x(t_0 + T_1 + \sigma_1, t_0 + T_1, y_0)\| < \frac{\delta}{3}. \tag{4.10}$$

Из (4.9) и (4.10) следует $\|x(t_0 + T_1 + \sigma_1, t_0, x_0)\| < \frac{2}{3}\delta < \delta$, откуда, воспользовавшись свойством равномерной устойчивости (4.2), имеем, что при $t > t_0 + T_1 + \sigma_1$ справедливо неравенство

$$\|x(t, t_0 + T_1 + \sigma_1, x(t_0 + T_1 + \sigma_1, t_0, x_0))\| < \varepsilon.$$

В силу единственности решений системы (1.1)

$$x(t, t_0 + T_1 + \sigma_1, x(t_0 + T_1 + \sigma_1, t_0, x_0)) = x(t, t_0, x_0).$$

Таким образом доказано, что можно указать $\zeta > 0$, такое, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $\sigma_* = \sigma_*(\varepsilon) = T_1(\varepsilon) + \sigma_1(\varepsilon)$, такое, что для любых $t_0 \in \mathbb{R}_+$, $x_0 \in B_\zeta$, $t \geq t_0 + \sigma_*$ справедливо неравенство $\|x(t, t_0, x_0)\| < \varepsilon$. Это означает, что нулевое решение системы (1.1) является равномерно притягивающим. Теорема доказана. □

5. Пример

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{x}{1+t^2} - xy^2 - x^3, \\ \frac{dy}{dt} &= x\Big(\cos t + \frac{\sin t}{1+t^2}\Big) + x^3(\sin^3 t - \sin t) - 3x^2 y \sin^2 t + 2xy^2 \sin t - y^3 \end{aligned} \tag{5.1}$$

и исследуем устойчивость ее тривиального решения

$$x = 0, \quad y = 0. \tag{5.2}$$

Заметим, что система (5.1) допускает интегральное множество M, задаваемое равенством

$$y - x \sin t = 0.$$

Возьмем функцию Ляпунова в виде $V = (y - x\sin t)^2$. Ее производная равна

$$\frac{dV}{dt} = -2(y - x\sin t)^4 = -2V^2.$$

На M первое из уравнений (5.1) принимает вид

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x}{1+t^2} - x^3(1 + \sin^2 t).$$

Нулевое решение этого уравнения равномерно асимптотически устойчиво, т.е. решение (5.2) системы (5.1) равномерно асимптотически устойчиво относительно интегрального множества M. Следовательно, для системы (5.1) выполнены все условия теоремы 4.1, и можно сделать вывод, что нулевое решение уравнений (5.1) равномерно асимптотически устойчиво.

Литература

[1] Е. А. Барбашин, *Введение в теорию устойчивости.* М.: Наука, 1967, 224 с.

[2] Е. А. Барбашин, Н. Н. Красовский, *Об устойчивости движения в целом* // Докл. АН СССР. **86** (1952), вып. 3, 453–456.

[3] Н. Г. Булгаков, Б. С. Калитин, *Обобщение теорем второго метода Ляпунова* // Весці Акадэміі Навук БССР, серыя фізіка-матэматычных навук, (1978), No 3, 32–36.

[4] Э. И. Грудо, *К теории устойчивости обыкновенных дифференциальных систем и систем Пфаффа* // Дифференциальные уравнения, **19** (1983), No 5, 782–789.

[5] А. О. Игнатьев, *Применение прямого метода Ляпунова к исследованию интегральных множеств* // Укр. мат. журнал. **44** (1992), No 10, 1342–1348.

[6] А. О. Игнатьев, *О существовании функций Ляпунова в задачах устойчивости интегральных множеств* // Укр. мат. журнал. **45** (1993), No 7, 932–941.

[7] А. А. Косов, *К методу векторных функций Ляпунова* // Функции Ляпунова и их применения. Новосибирск, 1986, 106-110.

[8] Н. Н. Красовский, *Некоторые задачи теории устойчивости движения.* М.: Физматгиз, 1959, 211 с.

[9] Н. Руш, П. Абетс, М. Лалуа, *Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости.* М.: Мир, 1980, 300 с.

[10] A. O. Ignatyev, *On the stability of equilibrium for almost periodic systems* // Nonlinear Analysis. TMA. **29** (1997), No 8, 957–962.

[11] A. O. Ignatyev, *On the asymptotic stability in functional differential equations* // Proceedings of the American Mathematical Society. **127** (1999), No 6, 1753–1760.

Сведения об авторах

Александр Олегович Игнатьев

Институт прикладной математики и механики НАН Украины,
ул. Р. Люксембург,74,
83114 Донецк,
Украина
E-Mail: `ignat@iamm.ac.donetsk.ua`, `mila@budinf.donetsk.ua`