Український математичний вісник
Том 3 **(2006)**, № 4, 547 – 580

Эллиптический оператор с однородными регулярными граничными условиями в двусторонней уточненной шкале пространств

Владимир А. Михайлец, Александр А. Мурач

(*Представлена М. Л. Горбачуком*)

Аннотация. Изучается регулярная эллиптическая краевая задача с однородными граничными условиями в ограниченной области пространства $\mathbb{R}^n$. Доказано, что оператор этой задачи имеет конечный индекс и порождает семейства изоморфизмов в двусторонней уточненной шкале функциональных гильбертовых пространств. Элементами этой шкалы являются изотропные пространства Хермандера–Волевича–Панеяха. Установлена априорная оценка решения задачи.

2000 MSC. 35J40.

Ключевые слова и фразы. Эллиптическая краевая задача, шкалы пространств, пространства Хермандера, интерполяция с функциональным параметром, фредгольмов оператор.

1. Введение

В теории эллиптических дифференциальных уравнений важное место занимают вопросы существования, единственности и регулярности решений краевых задач (см. [1–9] и приведенную там библиографию). Наиболее полно эти вопросы изучены в парах гильбертовых функциональных пространств. Напомним один из основополагающих результатов.

Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с гладкой границей Γ. Рассмотрим в Ω регулярную эллиптическую краевую задачу

$$Lu \equiv \sum_{|\mu|\leq 2q} a_\mu(x)\, D^\mu = f \;\text{ в }\; \Omega, \tag{1.1}$$

Статья поступила в редакцию 5.09.2006
Исследование первого автора поддержано Государственным фондом фундаментальных исследований Украины, грант 01.07/00252.

ISSN 1810 – 3200.

$$B_j\, u \equiv \sum_{|\mu|\le m_j<2q} b_{j,\mu}(x)\, D^{\mu} = g_j \ \text{ на } \Gamma \ \text{ при } \ j=1,\dots,q \tag{1.2}$$

с гладкими коэффициентами дифференциальных выражений.

Известно, что оператор

$$(L, B_1,\dots,B_q) : H^s(\Omega) \to H^{s-2q}(\Omega) \times \prod_{j=1}^{q} H^{s-m_j-1/2}(\Gamma) \tag{1.3}$$

является ограниченным и имеет конечный индекс (=: фредгольмов) при $s \ge 2q$. Здесь $H^{\sigma}(\Omega)$ и $H^{\sigma}(\Gamma)$ — гильбертовы пространства Соболева в Ω и на Γ соответственно.

Этот результат характеризует разрешимость задачи (1.1), (1.2) в односторонней соболевской шкале. К сожалению, его недостаточно для ряда приложений. Например, для построения функции Грина задачи необходимо брать в качестве правых частей уравнений δ-функции, которые не являются регулярными распределениями. Это обстоятельство инициировало исследование эллиптической краевой задачи в двусторонних шкалах пространств.

Легко заметить, что сформулированный выше результат не верен в случае произвольного вещественного s. Так, при $s \le m_j + 1/2$ нельзя определить на пространстве $H^s(\Omega)$ граничный дифференциальный оператор B_j. В связи с этим возникла необходимость *видоизменить* соболевские пространства таким образом, чтобы, с одной стороны они содержали нерегулярные распределения, а с другой, — чтобы на них были корректно определены граничные дифференциальные выражения. Эта задача была решена в работах Ж.-Л. Лионса, Э. Мадженеса [2] и Ю. М. Березанского, С. Г. Крейна, Я. А. Ройтберга [8,10].

В монографии Ж.-Л. Лионса и Э. Мадженеса [2], в частности, установлена ограниченность и фредгольмовость оператора

$$\begin{aligned}(L, B_1,\dots,B_q) : \bigl\{u \in H^s(\Omega) :\ Lu \in \Xi^{s-2q}(\Omega)\bigr\}\\ \to \Xi^{s-2q}(\Omega) \times \prod_{j=1}^{q} H^{s-m_j-1/2}(\Gamma) \ \text{ при } \ s<2q.\end{aligned}$$

Здесь $\Xi^{s-2q}(\Omega)$ — подходящее гильбертово пространство распределений в области Ω; оно у́же пространства $H^{s-2q}(\Omega)$, однако, содержит распределения $u \in H^{s-2q}(\Omega)$ с $\operatorname{supp} u \Subset \Omega$. Отсюда и из (1.3) вытекает ограниченность и фредгольмовость оператора

$$\begin{aligned}(B_1,\dots,B_q) : \{u \in H^s(\Omega) :\ Lu = 0 \ \text{ в } \ \Omega\}\\ \to \prod_{j=1}^{q} H^{s-m_j-1/2}(\Gamma) \ \text{ при любом } \ s \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Таким образом, задача (1.1), (1.2) исследована для однородного уравнения в области (случай $f = 0$) в двусторонней шкале пространств Соболева.

Дуальная к ней задача с однородными граничными условиями (случай $g_j = 0$) изучалась Ю. М. Березанским, С. Г. Крейном, Я. А. Ройтбергом [10]. Ими была установлена теорема о наборе изоморфизмов, который осуществляет оператор задачи в двусторонней шкале пространств Соболева (см. п. 2 настоящей статьи). Отметим, что позитивная часть этой шкалы (случай $s \geq 0$) образована пространствами распределений, заданными в области Ω, а негативная часть (случай $s < 0$) — пространствами распределений, сосредоточенными в замыкании области Ω. Это обстоятельство не позволяет свести изучение общей неоднородной задачи (1.1), (1.2) к упомянутым результатам, поскольку в них при $s < 2q$ решение u и правая часть f являются распределениями различной природы.

Указанная трудность была преодолена Я. А. Ройтбергом в серии статей, подытоженных в его монографии [8]. Им установлена теорема о полном наборе изоморфизмов, который осуществляет оператор неоднородной задачи (1.1), (1.2) в двусторонней шкале пространств типа соболевских для любого вещественного s. При этом решение задачи трактуется как вектор-функция, компоненты которой принадлежат пространствам Соболева и связаны образом между собой определенным.

Упомянутые результаты (и в этом их первостепенное значение) позволяют исследовать гладкость как классического, так и обобщенного решения задачи (1.1), (1.2). В связи с этим оператор эллиптической краевой задачи исследовался в различных классах функциональных пространств: в пространствах Гельдера и в L_p-пространствах Соболева [1], в пространствах Зигмунда, Никольского–Бесова и Лизоркина–Трибеля (односторонние шкалы) [6, 7]. Я. А. Ройтберг [8] установил теорему о полном наборе изоморфизмов для L_p-пространств Соболева и перенес на них упомянутые результаты Ж.-Л. Лионса, Э. Мадженеса и Ю. М. Березанского, С. Г. Крейна, Я. А. Ройтберга [11]. В работах одного из авторов [12,13] результаты Я. А. Ройтберга распространены на пространства Никольского–Бесова и Лизоркина–Трибеля.

Упомянутые пространства, вообще говоря, банаховы или квазибанаховы. Однако, наиболее важным для приложений остается гильбертов случай. Широкое и содержательное обобщение соболевских пространств предложено Л. Хермандером [3, 4] и Л. Р. Волевичем, Б. П. Панеяхом [14]. В отличие от соболевских, введенные ими пространства $H^{\mu}(\mathbb{R}^n)$ параметризуются с помощью не числового, а функционального параметра μ, которым является достаточно общая весовая функция n переменных. Пространство $H^\mu(\mathbb{R}^n)$ состоит из всех таких распределений u медленного роста на R^n, что $\mu\widehat{u} \in L_2(\mathbb{R}^n)$, где $\widehat{u}$ — преобразование Фурье распределения u. В частном случае, когда $\mu(\xi) = \langle\xi\rangle^s$, $\langle\xi\rangle = (1+\xi_1^2+\cdots+\xi_n^2)^{1/2}$, пространство $H^\mu(\mathbb{R}^n)$ совпадает с обычным пространством Соболева $H^s(\mathbb{R}^n)$.

В некоторых изотропных пространствах $H^\mu(\mathbb{R}^n)$ фредгольмовость оператора задачи (1.1), (1.2) была установлена Г. Шлензак в работе [15]. При этом рассматривались лишь регулярные правые части. Однако, эта работа не получила развития, т.к. использованный в ней класс функциональных параметров μ не имеет явного описания и не очень удобен для приложений.

Вместе с тем пространства, в которых гладкость задается посредством функциональных параметров, стали в последние десятилетия предметом многих исследований (см. дополнение П. И. Лизоркина к монографии [7], статью [16] и цитированную там литературу). Это, а также потребности приложений, побудило авторов исследовать возможность уточнения классических результатов теории эллиптических краевых задач применительно к таким пространствам.

В этом направлении наиболее естественными представляются пространства $H^\mu(\mathbb{R}^n)$, для которых функциональный параметр μ имеет вид

$$\mu(\xi) = \psi(\langle\xi\rangle) = \langle\xi\rangle^s\varphi(\langle\xi\rangle),$$

где ψ — правильно меняющаяся на $+\infty$ функция. Эти пространства образуют уточненную шкалу и исследованы авторами в предшествующих работах [17–21]. Основной результат данной статьи — теорема об изоморфизмах, которые порождает эллиптический оператор в уточненной шкале пространств при всех действительных s, за исключением $2q$ полуцелых значений. Установлена также фредгольмовость оператора и априорная оценка решения задачи в уточненной шкале. Двойственная задача об эллиптической краевой задаче для однородного уравнения в двусторонней уточненной шкале пространств решена в работе [20].

Статья состоит из 6 пунктов. В п. 2 изложена постановка задачи и описаны пространства, в которых эта задача изучается. В конце пункта сформулирована теорема об изоморфизмах. Пункт 3 посвящен изложению интерполяции с функциональным параметром как основного инструмента при работе с уточненной шкалой. В пп. 4, 5 определены и исследованы необходимые пространства, связанные с уточненной шкалой. Установлены их интерполяционные свойства. Основные результаты статьи приведены в п. 6. Там доказано утверждение об изоморфизмах (теорема 6.1), а также фредгольмовость оператора и априорная оценка решения (теорема 6.2).

2. Постановка задачи и результат

Пусть Ω — ограниченная область в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ с границей Γ, которая является бесконечно гладким многообразием без края размерности $n-1$. Предполагается, что область Ω локально лежит по одну сторону от Γ. Обозначим $\overline{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$.

Пусть L — линейное дифференциальное выражение в замкнутой области $\overline{\Omega}$ произвольного четного порядка $2q \geq 2$. Предполагается, что коэффициенты выражения L являются комплекснозначными функциями, бесконечно гладкими в $\overline{\Omega}$, а само выражение L *правильно эллиптическое* в $\overline{\Omega}$ [22, с. 165–166].

Рассмотрим решения *u неоднородного* эллиптического уравнения

$$L\,u = f \;\; \text{в} \;\; \Omega, \tag{2.1}$$

которые удовлетворяют *однородным* граничным условиям

$$B_j\,u = 0 \;\; \text{на} \;\; \Gamma \;\; \text{при} \;\; j = 1, \ldots, q. \tag{2.2}$$

Здесь B_j — граничное линейное дифференциальное выражение на Γ порядка $m_j \leq 2q-1$. Предполагается, что все коэффициенты выражения B_j являются комплекснозначными функциями, бесконечно гладкими на Γ.

Всюду далее также предполагается, что система $\{B_j : j = 1, \ldots, q\}$ *нормальна* и удовлетворяет условию *дополнительности* по отношению к L на Γ [22, с. 167]. Это наряду с правильной эллиптичностью выражения L означает, что (2.1), (2.2) является *регулярной эллиптической краевой задачей.* Заметим, что из условия нормальности вытекает различность порядков m_j граничных дифференциальных выражений.

Обозначим через (b.c.) однородные регулярные граничные условия (2.2). Положим

$$C^{\infty}(\text{b.c.}) = \bigl\{u \in C^{\infty}(\,\overline{\Omega}\,) : \, B_j u = 0 \;\; \text{на} \;\; \Gamma \;\; \text{для каждого} \;\; j = 1, \ldots, q\bigr\}\,.$$

Свяжем с задачей (2.1), (2.2) линейное отображение

$$u \mapsto Lu, \;\; \text{где} \;\; u \in C^{\infty}(\text{b.c.}). \tag{2.3}$$

Мы будем изучать его продолжения по непрерывности в специально подобранных парах гильбертовых пространств, построенных на основе семейства пространств

$$\{\, H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n) : \, s \in \mathbb{R}, \varphi \in \mathcal{M} \} \,.$$

Оно изучено авторами в [18] и названо *уточненной шкалой* в $\mathbb{R}^n$. Определение пространства $H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ приведено ниже в п. 4. Здесь отметим лишь, что это пространство гильбертово и состоит из распределений в $\mathbb{R}^n$, гладкость которых охарактеризована с помощью двух параметров — числового s и функционального φ. Последний пробегает достаточно широкое множество $\mathcal{M}$, состоящее из медленно меняющихся на $+\infty$ функций, и уточняет основную (степенную) гладкость, задаваемую параметром s. В частном случае $\varphi \equiv 1$ пространство $H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ совпадает с классическим гильбертовым пространством $H^s(\mathbb{R}^n)$.

Опишем вкратце пространства, в которых мы исследуем отображение (2.3) (детально они будут рассмотрены в пп. 4, 5). Пусть $s \in \mathbb{R}$, $\varphi \in \mathcal{M}$. В случае $s \geq 0$ обозначим через $H^{s,\varphi}$ гильбертово пространство сужений в область Ω всех распределений из $H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)$. Далее, в случае $s < 0$ обозначим через $H^{s,\varphi}$ пространство, сопряженное к пространству $H^{-s,\,1/\varphi}$ относительно расширения по непрерывности скалярного произведения в $L_2(\Omega)$. (Здесь уместно отметить, что $\varphi \in \mathcal{M} \Leftrightarrow 1/\varphi \in \mathcal{M}$.) Теперь для произвольного вещественного s обозначим через $H^{s,\varphi}(\mathrm{b.c.})$ замыкание множества $C^\infty(\mathrm{b.c.})$ в топологии гильбертова пространства $H^{s,\varphi}$. Пространство $H^{s,\varphi}(\mathrm{b.c.})$ возьмем в качестве области определения оператора L.

Для описания области значений этого оператора рассмотрим граничную задачу

$$L^{+}\, v = g \;\text{ в }\; \Omega, \tag{2.4}$$

$$B_j^{+}\, v = \;\text{ на }\; \Gamma \;\text{ при }\; j = 1, \ldots, q, \tag{2.5}$$

формально сопряженную к задаче (2.1), (2.2) относительно формулы Грина:

$$(L\,u,\, v)_\Omega + \sum_{j=1}^{q} \, (B_j\, u,\, C_j^{+}\, v)_\Gamma = (u,\, L^{+}\, v)_\Omega + \sum_{j=1}^{q} \, (C_j\, u,\, B_j^{+}\, v)_\Gamma,$$

где $u, v \in C^\infty(\,\overline{\Omega}\,)$. Здесь L^{+} — сопряженное к L линейное дифференциальное выражение порядка $2q$, а $\{B_j^{+}\}$, $\{C_j\}$, $\{C_j^{+}\}$ — некоторые нормальные системы линейных дифференциальных граничных выражений. Коэффициенты этих выражений бесконечно гладкие в $\overline{\Omega}$ и на Γ соответственно. Кроме того, порядки граничных выражений удовлетворяют условию

$$\operatorname{ord} B_j + \operatorname{ord} C_j^{+} = \operatorname{ord} C_j + \operatorname{ord} B_j^{+} = 2q - 1.$$

Здесь через $(\cdot,\cdot)_\Omega$ и $(\cdot,\cdot)_\Gamma$ обозначены скалярные произведения в пространствах $L_2(\Omega)$ и $L_2(\Gamma)$ функций, квадратично суммируемых в Ω и на Γ соответственно, а также (см. далее) расширения по непрерывности этих скалярных произведений.

Известно [22, с. 168], что граничные задачи (2.1), (2.2) и (2.4), (2.5) являются регулярными эллиптическими одновременно.

Обозначим через $(\mathrm{b.c.})^+$ однородные регулярные граничные условия (2.5). По аналогии с принятым выше, положим

$$C^\infty(\mathrm{b.c.})^+ = \bigl\{v\in C^\infty(\,\overline{\Omega}\,):\, B_j^+ v=0 \text{ на } \Gamma \text{ для каждого } j=1,\dots,q\bigr\}$$

и обозначим через $H^{s,\varphi}(\mathrm{b.c.})^+$ замыкание множества $C^\infty(\mathrm{b.c.})^+$ в норме гильбертова пространства $H^{s,\varphi}$.

Заметим, что система граничных выражений B_j^+ определяется в формально сопряженной задаче (2.4), (2.5) неоднозначно. Однако, известно [22, с. 168], что множество $C^\infty(\mathrm{b.c.})^+$, а значит, и пространство $H^{s,\varphi}(\mathrm{b.c.})^+$ *не* зависят от выбора выражений B_j^+ в этой задаче.

В силу формулы Грина

$$(Lu,v)_\Omega=(u,L^+v)_\Omega \text{ для произвольных } u\in C^\infty(\mathrm{b.c.}),\ v\in C^\infty(\mathrm{b.c.})^+. \tag{2.6}$$

Это равенство продолжается по непрерывности на произвольные распределения $u\in H^{s,\varphi}(\mathrm{b.c.})$, $v\in H^{2q-s,1/\varphi}(\mathrm{b.c.})^+$. При этом образ Lu трактуется как антилинейный ограниченный функционал $(Lu,\cdot)_\Omega = (u,L^+\cdot)_\Omega$ на пространстве $H^{2q-s,1/\varphi}(\mathrm{b.c.})^+$. Кроме того, поскольку пространства $H^{2q-s,\,1/\varphi}$ и $H^{s-2q,\,\varphi}$ взаимно сопряжены относительно формы $(\cdot,\cdot)_\Omega$, то относительно ее также сопряжены подпространство $H^{2q-s,\,1/\varphi}(\mathrm{b.c.})^+$ и фактор-пространство $H^{s-2q,\,\varphi}/M_{s-2q,\,\varphi}$, где

$$M_{s-2q,\,\varphi}:=\bigl\{h\in H^{s-2q,\,\varphi}:\,(h,w)_\Omega=0 \ \text{ для любого } \ w\in C^\infty(\mathrm{b.c.})^+\bigr\}\,.$$

Поэтому Lu естественно также рассматривать как класс смежности

$$\{Lu+h:\, h\in M_{s-2q,\,\varphi}\}\,,$$

принадлежащий фактор-пространству $H^{s-2q,\,\varphi}/M_{s-2q,\,\varphi}$.

Таким образом, наша задача состоит в изучении отображения (2.3) как оператора, действующего из пространства $H^{s,\varphi}(\mathrm{b.c.})$ в пространство $H^{s-2q,\,\varphi}/M_{s-2q,\,\varphi}$, которое мы отождествляем с пространством $\bigl(H^{2q-s,\,1/\varphi}(\mathrm{b.c.})^+\bigr)'$. Здесь и далее $(\,\cdot\,)'$ обозначает пространство, сопряженное к данному и состоящее из антилинейных функционалов. В п. 6 мы покажем, что этот оператор является ограниченным фредгольмовым (с конечным индексом) и порождает набор изоморфизмов. В частности, будет установлен следующий результат.

Пусть

$$
\begin{aligned}
N &:= \{u \in C^{\infty}(\text{b.c.}):\ L\,u = 0 \text{ в } \Omega\} \quad \text{и} \\
N^{+} &:= \{v \in C^{\infty}(\text{b.c.})^{+}:\ L^{+}\,v = 0 \text{ в } \Omega\}.
\end{aligned}
\tag{2.7}
$$

Известно [22, с. 169], что поскольку задачи (2.1), (2.2) и (2.4), (2.5) регулярные эллиптические, то их ядра N и N^{+} конечномерны. Одним из основных результатов работы является

Теорема 2.1 (об изоморфизмах). *Предположим, что пространства N и N^{+} тривиальны. Тогда отображение* (2.3) *продолжается по непрерывности до топологических изоморфизмов*

$$
L : H^{s,\varphi}(\text{b.c.}) \leftrightarrow H^{s-2q,\varphi}/M_{s-2q,\varphi} = \left(H^{2q-s,\,1/\varphi}(\text{b.c.})^{+} \right)',
$$

где $s \in \mathbb{R} \setminus \{1/2, 3/2, \ldots, 2q-1/2\}$, а $\varphi \in \mathcal{M}$.

Более общее утверждение приведено в п. 6.

3. Интерполяция с функциональным параметром

Интерполяция с функциональным параметром пар гильбертовых пространств — это естественное обобщение классического интерполяционного метода [2, с. 21–23], [22, с. 251] на случай, когда в качестве параметра интерполяции вместо степенной берется более общая функция. Приведем здесь определение такой интерполяции (см. [15, 17, 19]). Для наших целей достаточно ограничиться сепарабельными гильбертовыми пространствами.

Определение 3.1. *Упорядоченную пару $[X_0, X_1]$ комплексных гильбертовых пространств X_0 и X_1 будем называть допустимой, если пространства X_0, X_1 сепарабельные и справедливо непрерывное плотное вложение $X_1 \hookrightarrow X_0$.*

Пусть задана допустимая пара $X = [X_0, X_1]$ гильбертовых пространств. Как известно [2, с. 22], для X существует такой изометрический изоморфизм $A : X_1 \leftrightarrow X_0$, что A является самосопряженным положительно определенным оператором в пространстве X_0 с областью определения X_1. Оператор A называется *порождающим* для пары X, этот оператор определяется парой X однозначно.

Обозначим через $\mathcal{B}$ множество всех положительных функций, измеримых по Борелю на $(0, +\infty)$. Пусть $\psi \in \mathcal{B}$. Поскольку спектр оператора A является подмножеством полуоси $(0, +\infty)$, то в пространстве X_0 определен как функция от A оператор $\psi(A)$. Область определения оператора $\psi(A)$ есть линейное множество плотное в X_0.

Обозначим через $[X_0, X_1]_\psi$ или, короче, X_ψ — область определения оператора $\psi(A)$, наделенную таким скалярным произведением:

$$(u, v)_{X_\psi} = (u, v)_{X_0} + (\psi(A)u, \psi(A)v)_{X_0}.$$

Пространство X_ψ — гильбертово сепарабельное, причем справедливо непрерывное плотное вложение $X_\psi \hookrightarrow X_0$.

Определение 3.2. *Будем называть функцию $\psi \in \mathcal{B}$ интерполяционным параметром, если для произвольных допустимых пар $X = [X_0, X_1], Y = [Y_0, Y_1]$ гильбертовых пространств и для любого линейного отображения T, заданного на X_0, выполняется следующее условие. Если при $j = 0, 1$ сужение отображения T на пространство X_j является ограниченным оператором $T : X_j \to Y_j$, то и сужение отображения T на пространство X_ψ является ограниченным оператором $T : X_\psi \to Y_\psi$.*

Иными словами, функция ψ является интерполяционным параметром тогда и только тогда, когда отображение $X \mapsto X_\psi$ является интерполяционным функтором, заданным на категории допустимых пар X гильбертовых пространств (см. [6, с. 18]). В этом случае будем говорить, что *пространство X_ψ получено в результате интерполяции пары X с функциональным параметром ψ.*

Классический результат (см., например, [22, с. 250–255], [2, с. 41]) в теории интерполяции гильбертовых пространств состоит в том, что степенная функция $\psi(t) = t^\theta$ порядка $\theta \in (0, 1)$ является интерполяционным параметром (в этом случае θ естественным образом выступает в качестве числового параметра интерполяции). Иные, значительно более широкие классы интерполяционных функциональных параметров найдены в [15, 17, 19]. Среди таковых нам понадобится очень удобный в приложениях класс, состоящий из правильно меняющихся функций порядка $\theta \in (0, 1)$. Напомним их определение (см., например, [23, с. 9]).

Определение 3.3. *Положительная функция ψ, заданная на полуоси $[b, +\infty)$, называется правильно меняющейся на $+\infty$ функцией порядка $\theta \in \mathbb{R}$, если ψ измерима по Борелю на $[b_0, +\infty)$ для некоторого $b_0 \geq b$ и удовлетворяет условию*

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{\psi(\lambda t)}{\psi(t)} = \lambda^\theta \quad \textit{для любого} \quad \lambda > 0.$$

Правильно меняющаяся на $+\infty$ функция порядка $\theta = 0$ называется медленно меняющейся на $+\infty$.

Теория правильно меняющихся функций была основана И. Караматой в 30-х годах XX столетия. Эти функции родственны степенным, допускают удобное описание и имеют многочисленные приложения, в основном благодаря их особой роли в теоремах тауберова типа (см. монографии [23, 24] и приведенную там библиографию). Укажем лишь, что характерным примером правильно меняющейся на $+\infty$ функции порядка θ является функция

$$\psi(t) = t^{\theta}\,(\ln t)^{r_1}\,(\ln\ln t)^{r_2}\cdots(\ln\cdots\ln t)^{r_k},\ \text{где } r_1, r_2, \ldots, r_k \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{N}.$$

В работе авторов [17, с. 222] доказано следующее интерполяционное свойство правильно меняющихся функций.

Предложение 3.1. *Пусть функция $\psi \in \mathcal{B}$ ограничена на каждом отрезке $[a; b]$, где $0 < a < b < +\infty$. Пусть, кроме того, ψ — правильно меняющаяся на $+\infty$ функция порядка θ, где $0 < \theta < 1$. Тогда ψ является интерполяционным параметром, причем для любой допустимой пары $X = [X_0, X_1]$ гильбертовых пространств справедливы непрерывные плотные вложения $X_1 \hookrightarrow X_\psi \hookrightarrow X_0$.*

Мы будем интерполировать с функциональным параметром $\psi \in \mathcal{B}$, удовлетворяющим условию предложения 3.1. При этом понадобится следующее утверждение об интерполяции подпространств и фактор-пространств [19], [6, с. 136–139]. Предварительно напомним, что, по определению, подпространство замкнуто. Далее, для гильбертовых пространств H_0 и H_1 будем писать $H_0 \cong H_1$, если эти пространства равны как множества и нормы в них эквивалентны.

Предложение 3.2. *Пусть $X = [X_0, X_1]$ — допустимая пара гильбертовых пространств, а Y_0 — подпространство в X_0. Тогда $Y_1 = X_1 \cap Y_0$ — подпространство в X_1. Предположим, что существует линейное отображение P, которое для каждого $j = 0, 1$ является проектором пространства X_j на подпространство Y_j. Тогда пары $[Y_0, Y_1]$, $[X_0/Y_0, X_1/Y_1]$ допустимые и для произвольного интерполяционного параметра $\psi \in \mathcal{B}$ справедливо*

$$[Y_0, Y_1]_\psi \cong X_\psi \cap Y_0, \quad [X_0/Y_0, X_1/Y_1]_\psi \cong X_\psi/(X_\psi \cap Y_0);$$

здесь $X_\psi \cap Y_0$ — подпространство в X_ψ.

4. Уточненные шкалы пространств

Сначала дадим определение уточненной шкалы в $\mathbb{R}^n$, рассмотренной авторами в [18]. Обозначим через $\mathcal{M}$ совокупность всех таких функций $\varphi : [1, +\infty) \to (0, +\infty)$, что:

а) φ измерима по Борелю на полуоси $[1,+\infty)$;

б) функции φ и $1/\varphi$ ограничены на каждом отрезке $[1,b]$, где $1 < b < +\infty$;

в) функция φ медленно меняющаяся на $+\infty$.

Пусть $s \in \mathbb{R}$, $\varphi \in \mathcal{M}$. Обозначим через $H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ совокупность всех таких антилинейных распределений u медленного роста, заданных в $\mathbb{R}^n$, что преобразование Фурье $\widehat{u}$ распределения u является локально суммируемой по Лебегу в $\mathbb{R}^n$ функцией, удовлетворяющей условию

$$\int \langle\xi\rangle^{2s}\varphi^2(\langle\xi\rangle)\,|\widehat{u}(\xi)|^2\,d\xi < \infty.$$

Здесь интеграл берется по $\mathbb{R}^n$, а $\langle\xi\rangle = (1+\xi_1^2+\cdots+\xi_n^2)^{1/2}$ — сглаженный модуль вектора $\xi = (\xi_1,\ldots,\xi_n) \in \mathbb{R}^n$. В пространстве $\mathrm{H}^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ в качестве скалярного произведения возьмем величину

$$(u,v)_{\mathrm{H}^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)} = \int \langle\xi\rangle^{2s}\varphi^2(\langle\xi\rangle)\,\widehat{u}(\xi)\,\overline{\widehat{v}(\xi)}\,d\xi.$$

Она естественным образом порождает норму.

Пространство $H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ — это частный изотропный гильбертов случай пространств, введенных Л. Хермандером [3, с. 54], [4, с. 18] и Л. Р. Волевичем, Б. П. Панеяхом [14, с. 14]. В случае $\varphi \equiv 1$ пространство $H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ будем обозначать также через $H^s(\mathbb{R}^n)$. Это классическое гильбертово пространство Соболева в $\mathbb{R}^n$ порядка s (или, в иной терминологии, — пространство бесселевых потенциалов).

Гильбертово сепарабельное пространство $H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ тесно связано с соболевской шкалой. Это проявляется в том, что, во-первых, справедливы непрерывные плотные вложения

$$H^{s+\varepsilon}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H^{s-\varepsilon}(\mathbb{R}^n) \ \text{ для любого } \ \varepsilon > 0. \tag{4.1}$$

Откуда вытекает, что в семействе $\{H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n) : s \in \mathbb{R},\ \varphi \in \mathcal{M}\}$ функциональный параметр φ *уточняет* основную (степенную) s-гладкость пространства. Во-вторых (и это делает уточненную шкалу удобной для изучения и приложений), каждое пространство уточненной шкалы получается интерполяцией с подходящим *функциональным* параметром пары соболевских пространств. А именно, справедлив следующий результат [18, с. 354].

Предложение 4.1. *Пусть задано функцию $\varphi \in \mathcal{M}$ и положительные числа ε, δ. Положим $\psi(t) = t^{\varepsilon/(\varepsilon+\delta)}\,\varphi(t^{1/(\varepsilon+\delta)})$ при $t \geq 1$ и $\psi(t) = \varphi(1)$ при $0 < t < 1$. Тогда:*

а) *функция* $\psi \in \mathcal{B}$ *удовлетворяет всем условиям предложения* 3.1, *где* $\theta = \varepsilon/(\varepsilon+\delta)$ *и, следовательно, является интерполяционным параметром;*

б) *для произвольного* $s \in \mathbb{R}$ *выполняется*

$$\Big[H^{s-\varepsilon}(\mathbb{R}^n),\, H^{s+\delta}(\mathbb{R}^n)\Big]_{\psi} \cong H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n).$$

Определим теперь аналоги пространства $H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ для замкнутых и открытых множеств в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$.

Пусть Q — замкнутое множество в $\mathbb{R}^n$; обозначим

$$H^{s,\varphi}_Q(\mathbb{R}^n) := \{u \in H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n) : \operatorname{supp} u \subseteq Q\}.$$

Отметим, что линейное множество $H^{s,\varphi}_Q(\mathbb{R}^n)$ замкнуто, т. е. является подпространством в $H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)$. В самом деле, пусть распределение $u \in H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)$, такое, что

$$u = \lim_{k\to\infty} u_k, \ \text{ где } \ u_k \in H^{s,\varphi}_Q(\mathbb{R}^n).$$

Тогда в силу правого вложения (4.1) этот предел справедлив в пространстве Соболева $H^{s-1}(\mathbb{R}^n)$ и, следовательно, в топологическом пространстве Шварца распределений в $\mathbb{R}^n$. Отсюда вытекает включение $\operatorname{supp} u \subseteq Q$, которое и означает указанную замкнутость. Таким образом, $H^{s,\varphi}_Q(\mathbb{R}^n)$ — гильбертово сепарабельное пространство относительно скалярного произведения в $H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)$.

Далее, пусть G — открытое множество в $\mathbb{R}^n$, а $\widehat{G} = \mathbb{R}^n \setminus G$ — дополнение множества G. Рассмотрим фактор-пространство

$$H^{s,\varphi}(G) := H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n) \,/\, H^{s,\varphi}_{\widehat{G}}(\mathbb{R}^n)$$

пространства $H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ по подпространству $H^{s,\varphi}_{\widehat{G}}(\mathbb{R}^n)$. Скалярное произведение в $H^{s,\varphi}(G)$ классов смежности

$$\big\{v_j + w : w \in H^{s,\varphi}_{\widehat{G}}(\mathbb{R}^n)\big\}, \ \text{ где } \ v_j \in H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n), \ j = 1,\, 2,$$

равно, по определению, скалярному произведению в $H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ распределений $v_j - \Pi v_j$, где $j = 1,\, 2$, а Π — ортопроектор в $H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ на подпространство $H^{s,\varphi}_{\widehat{G}}(\mathbb{R}^n)$. Фактор-пространство $H^{s,\varphi}(G)$ гильбертово сепарабельное, поскольку таковым является пространство $H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)$. Отметим, что $H^{s,\varphi}(G)$ естественно трактовать как пространство сужений в G всех распределений из $H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)$. При этом норма такого сужения v равна

$$\|v\|_{H^{s,\varphi}(G)} := \inf\big\{\|u\|_{H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)} : u = v \ \text{ в } \ \Omega\big\}.$$

Как и прежде, в частном случае $\varphi \equiv 1$ индекс φ в обозначении пространств $H^{s,\varphi}_{Q}(\mathbb{R}^n)$ и $H^{s,\varphi}(G)$ будем опускать. Таким образом, $H^{s}_{Q}(\mathbb{R}^n)$ и $H^{s}(G)$ — это пространства Соболева соответственно распределений сосредоточенных в замкнутой области Q и заданных в открытой области G.

Нас будут интересовать пространства $H^{s,\varphi}(\Omega)$ и $H^{s,\varphi}_{\overline{\Omega}}(\mathbb{R}^n)$, где Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с бесконечно гладкой границей. Здесь полезно иметь в виду следующее. Поскольку $\overline{\Omega}$ является бесконечно гладким компактным многообразием размерности n с краем, то пространство $H^{s,\varphi}(\Omega)$ допускает эквивалентное определение с помощью стандартной процедуры локального распрямления многообразия $\overline{\Omega}$, см. [18, с. 358–359, 363]. Поэтому все, что установлено авторами в цитированной статье для уточненной шкалы на многообразии с краем, справедливо и для шкалы пространств $H^{s,\varphi}(\Omega)$ распределений, заданных в области Ω.

Изучим некоторые необходимые далее свойства пространств $H^{s,\varphi}(\Omega)$ и $H^{s,\varphi}_{\overline{\Omega}}(\mathbb{R}^n)$.

Теорема 4.1. *Пусть задано функцию $\varphi \in \mathcal{M}$ и положительные числа ε, δ. Тогда для произвольного $s \in \mathbb{R}$ справедливы формулы*

$$\Big[H^{s-\varepsilon}(\Omega),\, H^{s+\delta}(\Omega)\Big]_{\psi} \cong H^{s,\varphi}(\Omega), \tag{4.2}$$

$$\Big[H^{s-\varepsilon}_{\overline{\Omega}}(\mathbb{R}^n),\, H^{s+\delta}_{\overline{\Omega}}(\mathbb{R}^n)\Big]_{\psi} \cong H^{s,\varphi}\overline{\Omega}(\mathbb{R}^n), \tag{4.3}$$

где ψ — интерполяционный параметр из формулировки предложения 4.1.

Доказательство. Формула (4.2) установлена в [18, с. 359]. Докажем формулу (4.3). Поскольку Ω — ограниченная область с бесконечно гладкой границей, то (см., например, [6, с. 395]) множество

$$C^{\infty}_{0}(\Omega) = \{u \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n) : \operatorname{supp} u \subset \Omega\} \tag{4.4}$$

плотно в $H^{\sigma}_{\overline{\Omega}}(\mathbb{R}^n)$ при любом $\sigma \in \mathbb{R}$. Следовательно, непрерывное вложение $H^{s+\delta}_{\overline{\Omega}}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H^{s-\varepsilon}_{\overline{\Omega}}(\mathbb{R}^n)$ плотное; тем самым пара $\big[H^{s-\varepsilon}_{\overline{\Omega}}(\mathbb{R}^n),$ $H^{s+\delta}_{\overline{\Omega}}(\mathbb{R}^n)\big]$ допустимая и левая часть формулы (4.3) определена. Мы выведем эту формулу из предложения 4.1 с помощью предложения 3.2 (интерполяция подпространств). Нам понадобится отображение, являющееся проектором каждого пространства $H^{\sigma}(\mathbb{R}^n)$, где $s-\varepsilon \le \sigma \le s+\delta$, на подпространство $H^{\sigma}_{\overline{\Omega}}(\mathbb{R}^n)$. Построим это отображение следующим образом. Возьмем такое число $r > 0$, что $|x| < r$ для всех $x \in \Omega$, и положим

$$G = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 4r\} \setminus \overline{\Omega}.$$

Обозначим через R отображение, которое каждому распределению в $\mathbb{R}^n$ ставит в соответствие его сужение в область G. Получим линейный ограниченный оператор

$$R:\, H^{\sigma}(\mathbb{R}^n)\to H^{\sigma}(G)\ \text{ для каждого }\ \sigma\in\mathbb{R}. \tag{4.5}$$

Заметим далее, что G — ограниченная открытая область с бесконечно гладкой границей. Тогда, как известно (см., например, [6, с. 386]), для любого компакта $K\subset\mathbb{R}^n$ существует линейное отображение T, которое является ограниченным оператором

$$T:\, H^{\sigma}(G)\to H^{\sigma}(\mathbb{R}^n)\ \text{ для каждого }\ \sigma\in K, \tag{4.6}$$

и продолжает распределение с области G в $\mathbb{R}^n$. Это означает, что оператор (4.6) правый обратный к оператору (4.5). Возьмем здесь $K=[s-\varepsilon,\,s+\delta]$ и рассмотрим отображение

$$P_0:\, u\mapsto u-TR\,u,\ \text{ где }\ u\in H^{s-\varepsilon}(\mathbb{R}^n).$$

В силу (4.5), (4.6) имеем линейный ограниченный оператор

$$P_0:\, H^{\sigma}(\mathbb{R}^n)\to H^{\sigma}(\mathbb{R}^n)\ \text{ для каждого }\ \sigma\in[s-\varepsilon,\,s+\delta].$$

Он проектирует пространство $H^{\sigma}(\mathbb{R}^n)$ на подпространство $H^{\sigma}_{\widehat{G}}(\mathbb{R}^n)$ при каждом $\sigma\in[s-\varepsilon,\,s+\delta]$. В самом деле,

$$\begin{aligned} u\in H^{\sigma}(\mathbb{R}^n)\ \Rightarrow\ RP_0\,u=R(u-TR\,u)=Ru-RTR\,u=Ru-Ru=0\\ \Rightarrow\ P_0\,u\in H^{\sigma}_{\widehat{G}}(\mathbb{R}^n);\end{aligned}$$

$$u\in H^{\sigma}_{\widehat{G}}(\mathbb{R}^n)\ \Rightarrow\ Ru=0\ \Rightarrow\ P_0u=u-TR\,u=u.$$

Теперь возьмем такую функцию $\chi\in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$, что $\chi(x)=1$ при $|x|\leq 2r$ и $\chi(x)=0$ при $|x|\geq 3r$, и рассмотрим отображение

$$P:\, u\mapsto \chi\cdot P_0\,u,\ \text{ где }\ u\in H^{s-\varepsilon}(\mathbb{R}^n).$$

Поскольку оператор умножения на функцию χ ограничен в каждом пространстве Соболева в $\mathbb{R}^n$, то P — проектор пространства $H^{\sigma}(\mathbb{R}^n)$ на подпространство $H^{\sigma}_{\overline{\Omega}}(\mathbb{R}^n)$ при любом $\sigma\in[s-\varepsilon,\,s+\delta]$. Следовательно, в силу предложения 3.2 (интерполяция подпространств) и предложения 4.1 напишем

$$\begin{aligned}\Bigl[H^{s-\varepsilon}_{\overline{\Omega}}(\mathbb{R}^n),\,H^{s+\delta}_{\overline{\Omega}}(\mathbb{R}^n)\Bigr]_{\psi}\cong\Bigl[H^{s-\varepsilon}(\mathbb{R}^n),\,H^{s+\delta}(\mathbb{R}^n)\Bigr]_{\psi}\cap H^{s-\varepsilon}_{\overline{\Omega}}(\mathbb{R}^n)\\ \cong H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)\cap H^{s-\varepsilon}_{\overline{\Omega}}(\mathbb{R}^n)\cong H^{s,\varphi}_{\overline{\Omega}}(\mathbb{R}^n),\end{aligned}$$

что и требовалось доказать. □

Теорема 4.2. *Пусть $s \in \mathbb{R}$, $\varphi \in \mathcal{M}$. Тогда:*

а) *множество $C^{\infty}(\overline{\Omega})$ плотно в $H^{s,\varphi}(\Omega)$;*

б) *множество $C_0^{\infty}(\Omega)$ плотно в $H^{s,\varphi}(\Omega)$ при $s < 1/2$ и в $H^{s,\varphi}_{\overline{\Omega}}(\mathbb{R}^n)$ при любом s;*

в) *справедлива формула*

$$H^{s,\varphi}_{\overline{\Omega}}(\mathbb{R}^n) \cong H^{s,\varphi}(\Omega) \ \text{ при } \ |s| < 1/2; \tag{4.7}$$

г) *пространства $H^{s,\varphi}_{\overline{\Omega}}(\mathbb{R}^n)$ и $H^{-s,\,1/\varphi}(\Omega)$ взаимно сопряжены с равенством норм относительно расширения по непрерывности скалярного произведения в $L_2(\Omega)$.*

Замечание 4.1. Как обычно, мы отождествляем функции из множества $C_0^{\infty}(\Omega)$ (см. формулу (4.4)) с их сужениями в область Ω. Таким образом, корректно говорить в пункте б) о плотности множества $C_0^{\infty}(\Omega)$ в пространстве $H^{s,\varphi}(\Omega)$ при $s < 1/2$. Теперь формула (4.7) означает, как это принято в теории функциональных пространств, что при $|s| < 1/2$ пространства $H^{s,\varphi}_{\overline{\Omega}}(\mathbb{R}^n)$ и $H^{s,\varphi}(\Omega)$ являются пополнениями множества $C_0^{\infty}(\Omega)$ по эквивалентным нормам и поэтому равны. Далее, перейдя к пунку г), заметим, что $\varphi \in \mathcal{M} \Leftrightarrow 1/\varphi \in \mathcal{M}$; значит, пространство $H^{-s,\,1/\varphi}(\Omega)$ определено. Наконец, указанная в этом пункте взаимная сопряженность (двойственность) пространств трактуется, напомним, следующим образом. Для любых $u \in C_0^{\infty}(\Omega)$, $v \in C^{\infty}(\overline{\Omega})$ справедливо неравенство

$$|(u,v)_{\Omega}| \leq \|u\|_{H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)} \cdot \|v\|_{H^{-s,1/\varphi}(\Omega)}. \tag{4.8}$$

Следовательно, скалярное произведение в $L_2(\Omega)$ продолжается по непрерывности до полуторалинейной формы $(u,v)_{\Omega}$ аргументов $u \in H^{s,\varphi}_{\overline{\Omega}}(\mathbb{R}^n)$, $v \in H^{-s,\,1/\varphi}(\Omega)$, удовлетворяющей оценке (4.8). При этом отображение $u \mapsto (u,\,\cdot\,)_{\Omega}$ задает изометрический изоморфизм между пространством $H^{s,\varphi}_{\overline{\Omega}}(\mathbb{R}^n)$ и пространством, сопряженным к $H^{-s,\,1/\varphi}(\Omega)$ и состоящим из антилинейных функционалов, а отображение $v \mapsto (\,\cdot\,,v)_{\Omega}$ задает изометрический изоморфизм между пространством $H^{-s,\,1/\varphi}(\Omega)$ и пространством, сопряженным к $H^{s,\varphi}_{\overline{\Omega}}(\mathbb{R}^n)$ и состоящим из линейных функционалов.

Доказательство теоремы 4.2. В случае $\varphi \equiv 1$ (пространства Соболева) эта теорема известна (см., например, [6, с. 395–396, 414]). Отсюда для пунктов а), б), в) общий случай $\varphi \in \mathcal{M}$ выводится с помощью теоремы 4.1. Так, из ее формул (4.2) и (4.3) вытекают на основании предложения 3.1 непрерывные плотные вложения

$$H^{s+\delta}(\Omega) \hookrightarrow H^{s,\varphi}(\Omega) \ \text{ и } \ H^{s+\delta}_{\overline{\Omega}}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H^{s,\varphi}_{\overline{\Omega}}(\mathbb{R}^n) \ \text{ для любого } \ \delta > 0.$$

Они влекут пункты а) и б) в силу того, что множество $C^\infty(\,\overline{\Omega}\,)$ плотно в $H^{s+\delta}(\Omega)$, а множество $C_0^\infty(\Omega)$ плотно в $H^{s+\delta}(\Omega)$ при $s+\delta < 1/2$ и в $H^{s+\delta}_{\overline{\Omega}}(\mathbb{R}^n)$ при любом s.

Далее, для пространств Соболева тождественное отображение, заданное на множестве $C_0^\infty(\Omega)$, продолжается по непрерывности до топологического изоморфизма

$$I:\, H^{\sigma}_{\overline{\Omega}}(\mathbb{R}^n) \leftrightarrow H^{\sigma}(\Omega) \ \text{ при } \ |\sigma| < 1/2. \tag{4.9}$$

Пусть $|s| < 1/2$; выберем такое положительное число $\delta = \varepsilon$, чтобы $|s \pm \delta| < 1/2$. Возьмем в (4.9) сначала $\sigma = s - \varepsilon$, а потом $\sigma = s + \delta$ и проинтерполируем с параметром ψ из формулировки теоремы 4.1 пространства, в которых действует изоморфизм (4.9). В силу формул (4.2), (4.3) получим топологический изоморфизм

$$I:\, H^{s,\varphi}_{\overline{\Omega}}(\mathbb{R}^n) \leftrightarrow H^{s,\varphi}(\Omega) \ \text{ при } \ |s| < 1/2,$$

чем и доказывется пункт в).

Последний пункт г) вытекает из результатов Л. Р. Волевича и Б. П. Панеяха [14] следующим образом. Как отмечалось нами в [18, с. 353], $H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ — это пространство Волевича–Панеяха H^{μ}, где $\mu(\xi) = \langle\xi\rangle^s \varphi(\langle\xi\rangle)$ — функция аргумента $\xi \in \mathbb{R}^n$. Тогда, следуя обозначениям Волевича и Панеяха, имеем $H^{s,\varphi}_{\overline{\Omega}}(\mathbb{R}^n) = H^{\mu}_{\overline{\Omega}}$ и $H^{-s,\,1/\varphi}(\Omega) = H^{1/\mu}(\Omega)$. Эти авторы установили [14, с. 23, 25], что пространства $H^{\mu}_{\overline{\Omega}}$ и $H^{1/\mu}(\Omega)$ взаимно сопряжены с равенством норм относительно расширения по непрерывности скалярного произведения в $L_2(\Omega)$. Тем самым справедлив пункт г).

Теорема 4.2 доказана. □

Далее мы будем исследовать эллиптический дифференциальный оператор в шкале

$$\{\, H^{s,\varphi} :\, s \in \mathbb{R},\ \varphi \in \mathcal{M}\} \,, \tag{4.10}$$

которую построим следующим образом. Пусть $s \in \mathbb{R}$, $\varphi \in \mathcal{M}$. В случае $s \geq 0$ обозначим через $H^{s,\varphi}$ гильбертово пространство $H^{s,\varphi}(\Omega)$. В случае $s < 0$ обозначим через $H^{s,\varphi}$ гильбертово пространство $H^{s,\varphi}_{\overline{\Omega}}(\mathbb{R}^n)$, сопряженное в силу теоремы 4.2 г) к пространству $H^{-s,\,1/\varphi}(\Omega)$ относительно расширения по непрерывности скалярного произведения в $L_2(\Omega)$.

Шкала (4.10) двусторонняя по параметру s и уточненная по параметру φ. При $s \geq 0$ имеем позитивную часть шкалы, состоящую из пространств $H^{s,\varphi} = H^{s,\varphi}(\Omega)$ распределений, *заданных* в области Ω. При $s < 0$ имеем негативную часть шкалы, состоящую из пространств $H^{s,\varphi} = H^{s,\varphi}_{\overline{\Omega}}(\mathbb{R}^n)$ распределений, *сосредоточенных* в замыкании области Ω. Таким образом, шкала (4.10) образована пространствами распределений различной природы.

С точки зрения приложений к дифференциальным операторам удобна трактовка шкалы (4.10) как семейства гильбертовых пространств, каждое из которых является пополнением линейного множества $C^\infty(\,\overline{\Omega}\,)$ по соответствующей норме. Действительно, в силу пункта а) теоремы 4.2 позитивное пространство $H^{s,\varphi}$, где $s \geq 0$, совпадает с пополнением множества $C^\infty(\,\overline{\Omega}\,)$ по норме пространства $H^{s,\varphi}(\Omega)$. Далее заметим, что естественно отождествлять функции из пространства $L_2(\Omega) = H^0(\Omega)$ с их продолжениями нулем в $\mathbb{R}^n$; в этом смысле $L_2(\Omega) = H^0_{\overline{\Omega}}(\mathbb{R}^n)$. При таком отождествлении получим в виду (4.1) включения

$$C_0^\infty(\Omega) \subset C^\infty(\,\overline{\Omega}\,) \subset L_2(\Omega) = H^0_{\overline{\Omega}}(\mathbb{R}^n) \subset H^{s,\varphi}_{\overline{\Omega}}(\mathbb{R}^n) = H^{s,\varphi} \ \text{ при } \ s < 0.$$

Отсюда в силу теоремы 4.2 б) вытекает, что функции класса $C^\infty(\,\overline{\Omega}\,)$ (продолженные нулем в $\mathbb{R}^n$) образуют плотное подмножество в негативном пространстве $H^{s,\varphi}$, где $s < 0$. Значит, это пространство является пополнением множества функций $u \in C^\infty(\,\overline{\Omega}\,)$ по норме

$$\|u\|_{H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)} = \sup\left\{ \frac{|(u,v)_\Omega|}{\|v\|_{H^{-s,1/\varphi}(\Omega)}} \,:\, v \in H^{-s,1/\varphi}(\Omega),\, v \neq 0 \right\}.$$

Указанная трактовка шкалы (4.10) позволяет рассматривать непрерывное плотное вложение вида $H^{r,\chi} \hookrightarrow H^{s,\varphi}$, где $s, r \in \mathbb{R}$, $\varphi, \chi \in \mathcal{M}$. Оно естественным образом означает, что

$$\|u\|_{H^{s,\varphi}} \leq \text{const}\, \|u\|_{H^{r,\chi}} \ \text{ для любого } \ u \in C^\infty(\,\overline{\Omega}\,),$$

причем тождественное отображение, заданное на множестве $C^\infty(\,\overline{\Omega}\,)$, продолжается по непрерывности до ограниченного *инъективного* оператора $I : H^{r,\chi} \to H^{s,\varphi}$. Его называют оператором вложения пространства $H^{r,\chi}$ в пространство $H^{s,\varphi}$ (по этому поводу см. [25, с. 504–505]).

Отметим следующие свойства шкалы (4.10).

Теорема 4.3. *Пусть $s, r \in \mathbb{R}$ и $\varphi, \chi \in \mathcal{M}$. Тогда:*

а) *множество $C^\infty(\,\overline{\Omega}\,)$ плотно в $H^{s,\varphi}$;*

б) *справедливы равенства*

$$H^{s,\varphi} \cong H^{s,\varphi}_{\overline{\Omega}}(\mathbb{R}^n) \text{ при } s < 1/2 \quad \text{и} \quad H^{s,\varphi} \cong H^{s,\varphi}(\Omega) \text{ при } s > -1/2;$$

в) *множество* $C_0^\infty(\Omega)$ *плотно в* $H^{s,\varphi}$ *при* $s < 1/2$*;*

г) *пространства* $H^{s,\varphi}$ *и* $H^{-s,\,1/\varphi}$ *взаимно сопряжены (при* $s \neq 0$ *с равенством норм, а при* $s = 0$ *с эквивалентностью норм) относительно расширения по непрерывности скалярного произведения в* $L_2(\Omega)$*;*

д) *если* $s < r$, *то справедливо компактное плотное вложение* $H^{r,\chi} \hookrightarrow H^{s,\varphi}$*;*

е) *если* $\varphi(t) \leq c\,\chi(t)$ *при* $t \gg 1$ *для некоторого числа* $c > 0$, *то справедливо непрерывное плотное вложение* $H^{s,\chi} \hookrightarrow H^{s,\varphi}$; *это вложение компактно, если* $\varphi(t)/\chi(t) \to 0$ *при* $t \to +\infty$*;*

ж) *если*

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{d\,t}{t\,\varphi^2(t)} < \infty, \tag{4.11}$$

то для любого $r \geq 0$ *справедливо компактное вложение* $H^{r+n/2,\,\varphi} \hookrightarrow C^r(\overline{\Omega})$, *где* $C^r(\overline{\Omega})$ *— пространство Гельдера в* $\overline{\Omega}$ *порядка* r.

Доказательство. Пункт а) обоснован выше. Пункт б) является следствием формулы (4.7) и определения пространства $H^{s,\varphi}$. Из этого пункта и теоремы 4.2 б) непосредственно вытекает пункт в). Пункт г) в случае $s \neq 0$ следует из определения шкалы (4.10) и теоремы 4.2 г), а в случае $s = 0$ — также и из пункта б).

Докажем пункт д). В случае $0 \leq s < r$ он установлен нами в [18, с. 362 (теорема 3.6 б)]). Отсюда случай $s < r \leq 0$ получается переходом от компактного оператора вложения $H^{-s,1/\varphi} \hookrightarrow H^{-r,1/\chi}$ к сопряженному оператору, который в виду пункта г) означает компактность вложения $H^{r,\chi} \hookrightarrow H^{s,\varphi}$. Теперь оставшийся случай $s < 0 < r$ является следствием компактности вложений $H^{r,\chi} \hookrightarrow H^{0,\varphi} \hookrightarrow H^{s,\varphi}$. В силу пункта а) вложения плотные.

Установим пункт е). В случае $s \geq 0$ он совпадает с пунктом г) теоремы 3.6 цитированной работы [18]. Пусть теперь $s < 0$; тогда условия пункта е) влекут непрерывность (соответственно компактность) оператора вложения $H^{-s,1/\varphi} \hookrightarrow H^{-s,1/\chi}$. Перейдя от него к сопряженному оператору получим нужное вложение (оно плотное в силу пункта а)).

Последний пункт ж) совпадает с пунктом д) теоремы 3.6 работы [18]. Теорема 4.3 доказана. □

5. Пространства распределений, удовлетворяющих однородным граничным условиям

В этом пункте рассматриваются регулярные однородные граничные условия (2.2) и (2.5), обозначенные для удобства дальнейших построений через (b.c.) и (b.c.)$^+$ соответственно. Напомним, что C^∞(b.c.) и C^∞(b.c.)$^+$ — это множества всех функций класса $C^\infty(\,\overline{\Omega}\,)$, удовлетворяющих соответственно условиям (b.c.) и (b.c.)$^+$.

Пусть $s\in\mathbb{R}$, $\varphi\in\mathcal{M}$. Обозначим через $H^{s,\varphi}$(b.c.) и через $H^{s,\varphi}$(b.c.)$^+$ замыкания соответственно множеств C^∞(b.c.) и C^∞(b.c.)$^+$ в гильбертовом пространстве $H^{s,\varphi}$. Пространства $H^{s,\varphi}$(b.c.) и $H^{s,\varphi}$(b.c.)$^+$ рассматриваются как гильбертовы относительно скалярного произведения в $H^{s,\varphi}$. Их естественно называть пространствами распределений, удовлетворяющих условиям (b.c.) и (b.c.)$^+$ соответственно. Как и прежде, в случае $\varphi\equiv 1$ (соболевские пространства) индекс φ в обозначениях пространств будем опускать.

Теорема 5.1. *Пусть $s\in\mathbb{R}$, $\varphi\in\mathcal{M}$, причем*

$$s\neq m_j+1/2 \;\; \text{для каждого} \;\; j=1,\dots,q. \tag{5.1}$$

Тогда:

а) *для указанного s найдется такое число $\rho>0$, не зависящее от φ, что при любом $\varepsilon\in(0,\rho)$ справедливо*

$$\bigl[\,H^{s-\varepsilon}(\mathrm{b.c.}),\,H^{s+\varepsilon}(\mathrm{b.c.})\,\bigr]_{\psi}\cong H^{s,\varphi}(\mathrm{b.c.}),$$

где ψ — не зависящий от s интерполяционный параметр из формулировки предложения 4.1, в которой берем $\varepsilon=\delta$;

б) *если число s, удовлетворяющее условию (5.1), положительно, то*

$$H^{s,\varphi}(\mathrm{b.c.})=\bigl\{\,u\in H^{s,\varphi}(\Omega):\,B_j\,u=0\;\;\text{на}\;\;\Gamma \\ \text{для всех}\;\;j=1,\dots,q,\;\;\text{таких, что}\;\;s>m_j+1/2\bigr\};$$

в) *если $s<1/2$, то $H^{s,\varphi}(\mathrm{b.c.})=H^{s,\varphi}$.*

Эта теорема сохраняет силу, если в ее формулировке заменить m_j на m_j^+, (b.c.) на (b.c.)$^+$ и B_j на B_j^+.

Замечание 5.1. В связи с пунктом а) отметим, что интерполяция со степенным параметром пространств Соболева, удовлетворяющих однородным граничным условиям, рассматривалась в [26, 27] (см. также [6, с. 400]). Из результатов этих работ вытекает, что условие (5.1) отбросить нельзя. Далее, в пункте б) выражение $B_j\,u$ понимается в смысле теоремы о следах [18, с. 363–364]. А именно, пусть $s > m_j+1/2$ для некоторого номера $j = 1, \ldots, q$. Тогда согласно теореме о следах отображение $u \mapsto B_j\,u$, где $u \in C^{\infty}(\,\overline{\Omega}\,)$, продолжается по непрерывности до ограниченного оператора

$$B_j : \, H^{s,\varphi}(\Omega) \to H^{s-m_j-1/2,\,\varphi}(\Gamma) \hookrightarrow L_2(\Gamma),$$

где $H^{s-m_j-1/2,\,\varphi}(\Gamma)$ — пространство распределений на границе Γ, принадлежащих локально пространству $H^{s-m_j-1/2,\,\varphi}(\mathbb{R}^{n-1})$. Тем самым для произвольного $u \in H^{s,\varphi}(\Omega)$ определена посредством замыкания функция $B_j\,u \in L_2(\Gamma)$. Условие (5.1) для пункта б) обусловлено теоремой о следах. Так, если $s = m_j + 1/2$ для некоторого номера j, а φ не удовлетворяет условию (4.11), то след $B_j u$ нельзя корректно определить даже как элемент пространства распределений на Γ (это вытекает из результата [14, с. 36]).

Доказательство теоремы 5.1. Проведем отдельно для случаев $s > 0$ и $s < 1/2$.

Случай $s > 0$. Изменив при необходимости нумерацию операторов системы $\{B_j : \, j = 1, \ldots, q\}$, получим, что

$$0 \leq m_1 < m_2 < \ldots < m_q \leq 2q - 1.$$

Дополнительно положим $m_0 := -1/2$ и $m_{q+1} := +\infty$. В силу условия (5.1) найдется такой номер $r \in \{0, 1, \ldots, q\}$, что $m_r + 1/2 < s < m_{r+1} + 1/2$. Обозначим через $\rho = \rho(s)$ положительное расстояние от точки s до множества

$$\{j + 1/2 : \, j = -1/2, \, 0, \, 1, \ldots, 2q - 1\} \setminus \{s\}$$

и возьмем произвольное $\varepsilon \in (0, \rho)$. Тогда

$$s \mp \varepsilon \neq j + 1/2 \;\text{ для каждого номера }\; j = 0, \, 1, \ldots, 2q - 1, \tag{5.2}$$

$$0 \leq m_r + 1/2 < s - \varepsilon < s < s + \varepsilon < m_{r+1} + 1/2. \tag{5.3}$$

Пусть ψ — интерполяционный параметр из формулировки предложения 4.1, в которой $\varepsilon = \delta$; этот параметр не зависит от s. Мы проинтерполируем с параметром ψ пару пространств $H^{s\mp\varepsilon}(\mathrm{b.c.})$ на основании теоремы 4.1 (формула (4.2)) и предложения 3.2 (интерполяция подпространств). Для этого необходим некоторый проектор P каждого пространства $H^{s\mp\varepsilon}(\Omega)=H^{s\mp\varepsilon}$ на подпространство $H^{s\mp\varepsilon}(\mathrm{b.c.})$. Он существует в силу следующих соображений. Предположим сначала, что $r\neq 0$ и рассмотрим набор $\{B_j:\,j=1,\ldots,r\}$. Поскольку система $\{B_j:\,j=1,\ldots,q\}$ нормальна, то и рассмотренный набор, как ее часть, является нормальной системой граничных выражений. Теперь сошлемся на результат монографии [6, с. 484–485], в которой построено линейное отображение P, являющееся проектором каждого пространства $H^{\sigma}(\Omega)=H^{\sigma}$, где $\sigma>m_r+1/2$, на подпространство

$$\{\,u\in H^{\sigma}(\Omega):\,B_j\,u=0\ \text{ на }\ \Gamma\ \text{ для всех }\ j=1,\ldots,r\,\}. \tag{5.4}$$

Возьмем здесь $\sigma=s\mp\varepsilon$; тогда в силу (5.3) подпространство (5.4) допускает следующее описание:

$$\bigl\{u\in H^{\sigma}(\Omega):\,B_j\,u=0\ \text{ на }\ \Gamma\ \text{ для всех }\ j=1,\ldots,q,\\ \text{таких, что }\ \sigma>m_j+1/2\bigr\}. \tag{5.5}$$

Но, как показано в [8, § 5.5.2], из регулярной эллиптичности задачи (2.1), (2.2) вытекает в виду условия (5.2) плотность множества $C^{\infty}(\mathrm{b.c.})$ в подпространстве (5.5) пространства $H^{\sigma}(\Omega)$. Значит, множество $C^{\infty}(\mathrm{b.c.})$ плотно в пространстве (5.4), т.е. последнее совпадает с $H^{\sigma}(\mathrm{b.c.})$. Таким образом, отображение P является проектором пространства $H^{s\mp\varepsilon}(\Omega)$ на подпространство $H^{s\mp\varepsilon}(\mathrm{b.c.})$. Напомним, что мы предполагали $r\neq 0$. Если же $r=0$, то $0<s\mp\varepsilon<m_j+1/2$ для каждого номера $j=1,\ldots,q$. Следовательно [8, § 5.5.2], множество $C^{\infty}(\mathrm{b.c.})$ плотно в пространстве $H^{s\mp\varepsilon}(\Omega)=H^{s\mp\varepsilon}$ и поэтому $H^{s\mp\varepsilon}(\mathrm{b.c.})=H^{s\mp\varepsilon}(\Omega)$. Значит, при $r=0$ в качестве P надо взять тождественное отображение. Итак, проектор P существует. Это позволяет на основании предложения 3.2 (интерполяция подпространств) и теоремы 4.1 (формула (4.2)) написать следующие равенства:

$$\begin{aligned}
&\bigl[\,H^{s-\varepsilon}(\mathrm{b.c.}),\,H^{s+\varepsilon}(\mathrm{b.c.})\,\bigr]_{\psi}\\
&\quad\cong\bigl[\,H^{s-\varepsilon}(\Omega),\,H^{s+\varepsilon}(\Omega)\,\bigr]_{\psi}\cap H^{s-\varepsilon}(\mathrm{b.c.})\cong H^{s,\varphi}(\Omega)\cap H^{s-\varepsilon}(\mathrm{b.c.})\\
&\quad=H^{s,\varphi}(\Omega)\cap\bigl\{\,u\in H^{s-\varepsilon}(\Omega):\,B_j\,u=0\ \text{ на }\ \Gamma\ \text{ для всех }\ j=1,\ldots,r\,\bigr\}\\
&\quad=\bigl\{\,u\in H^{s,\varphi}(\Omega):\,B_j\,u=0\ \text{ на }\ \Gamma\ \text{ для всех }\ j=1,\ldots,q,\\
&\qquad\qquad\text{таких, что }\ s>m_j+1/2\,\bigr\}.
\end{aligned} \tag{5.6}$$

Заметим, что здесь последнее равенство пространств вытекает из условия (5.3). Таким образом, интерполяционное пространство

$$\bigl[\,H^{s-\varepsilon}(\mathrm{b.c.}),\,H^{s+\varepsilon}(\mathrm{b.c.})\,\bigr]_{\psi}$$

совпадает (с эквивалентностью норм) с подпространством (5.6) пространства $H^{s,\varphi}(\Omega) = H^{s,\varphi}$. Следовательно, в виду предложения 3.1 пространство $H^{s+\varepsilon}(\text{b.c.})$ непрерывно и плотно вложено в (5.6). Отсюда вытекает, что множество $C^{\infty}(\text{b.c.})$ плотно в (5.6), т. е. (5.6) — это $H^{s,\varphi}(\text{b.c.})$. Тем самым пункт а) (для случая $s > 0$) и пункт б) теоремы 5.1 доказаны.

Случай $s < 1/2$. Положим $\rho = 1/2 - s > 0$ и возьмем произвольное число $\varepsilon \in (0, \rho)$. Поскольку $s - \varepsilon < s < s + \varepsilon < 1/2$, то в силу пункта б) теоремы 4.3 справедливо

$$H^{s,\varphi} \cong H^{s,\varphi}_{\overline{\Omega}}(\mathbb{R}^n) \quad \text{и} \quad H^{s\mp\varepsilon} \cong H^{s\mp\varepsilon}_{\overline{\Omega}}(\mathbb{R}^n).$$

Согласно пункту в) этой теоремы множество $C_0^{\infty}(\Omega)$, а значит, и более широкое множество $C^{\infty}(\text{b.c.})$ плотно в написанных пространствах. Следовательно,

$$H^{s,\varphi}(\text{b.c.}) \cong H^{s,\varphi}_{\overline{\Omega}}(\mathbb{R}^n) \quad \text{и} \quad H^{s\mp\varepsilon}(\text{b.c.}) \cong H^{s\mp\varepsilon}_{\overline{\Omega}}(\mathbb{R}^n).$$

Отсюда в силу теоремы 4.1 (формула (4.3)) немедленно вытекает пункт а) теоремы 5.1 в случае $s < 1/2$. Пункт в) этой теоремы является следствием плотности множества $C^{\infty}(\text{b.c.})$ в пространстве $H^{s,\varphi}$.

Доказательство теоремы 5.1 для условия (b.c.) закончено. Заметим, что оно опирается лишь на регулярную эллиптичность краевой задачи (2.1), (2.2). Следовательно, поскольку формально сопряженная задача (2.4), (2.5) также регулярная эллиптическая, то теорема 5.1 сохраняет силу (с указанными изменениями в формулировке) и для условия $(\text{b.c.})^{+}$. Теорема 5.1 доказана. $\square$

Пусть $\sigma \in \mathbb{R}$, $\varphi \in \mathcal{M}$. Изучим далее пространство $(H^{-\sigma,\,1/\varphi}(\text{b.c.})^{+})'$, сопряженное к пространству $H^{-\sigma,\,1/\varphi}(\text{b.c.})^{+}$. (Напомним, что в качестве элементов сопряженного пространства мы берем антилинейные ограниченные функционалы). Как и прежде, полагаем

$$M_{\sigma,\varphi} = \left\{ h \in H^{\sigma,\varphi} : \, (h, w)_{\Omega} = 0 \ \text{ для любого } \ w \in C^{\infty}(\text{b.c.})^{+} \right\}.$$

Множество $M_{\sigma,\varphi}$ замкнуто в пространстве $H^{\sigma,\varphi}$. В самом деле, в силу теоремы 4.3 г) функция $w \in C^{\infty}(\text{b.c.})^{+} \subset H^{-\sigma,\,1/\varphi}$ порождает линейный непрерывный функционал $(\,\cdot\,, w)_{\Omega}$ на пространстве $H^{\sigma,\varphi}$. Следовательно, если последовательность распределений $h_j \in M_{\sigma,\varphi}$ такая, что $h_j \to h$ в $H^{\sigma,\varphi}$ при $j \to \infty$, то

$$(h, w)_{\Omega} = \lim_{j\to\infty} (h_j, w)_{\Omega} = 0 \text{ для любого } w \in C^{\infty}(\text{b.c.})^{+}, \text{ т. е. } h \in M_{\sigma,\varphi}.$$

Итак, $M_{\sigma,\varphi}$ — подпространство в гильбертовом пространстве $H^{\sigma,\varphi}$. Поэтому факторпространство $H^{\sigma,\varphi}/\,M_{\sigma,\varphi}$ тоже гильбертово. Как и прежде, в случае $\varphi \equiv 1$ индекс φ в обозначении пространства $M_{\sigma,\varphi}$ будем опускать.

Теорема 5.2. *Пусть $\sigma \in \mathbb{R}$, $\varphi \in \mathcal{M}$. Тогда:*

а) *$M_{\sigma,\varphi} = \{0\}$ при $\sigma > -1/2$;*

б) *фактор-пространство $H^{\sigma,\varphi}/\,M_{\sigma,\varphi}$ и подпространство $H^{-\sigma,\,1/\varphi}(\mathrm{b.c.})^{+}$ взаимно сопряжены (при $s \neq 0$ с равенством норм, а при $s = 0$ с эквивалентностью норм) относительно расширения по непрерывности скалярного произведения в $L_2(\Omega)$; точнее, относительно билинейной формы $\bigl([u], v\bigr)_\Omega := (u, v)_\Omega$, где $[u] = \{u + h : h \in M_{\sigma,\varphi}\}$ — класс смежности элемента $u \in H^{\sigma,\varphi}$, а $v \in H^{-\sigma,\,1/\varphi}(\mathrm{b.c.})^{+}$;*

в) *справедливы компактные плотные вложения*

$$H^{\sigma+\varepsilon}/\,M_{\sigma+\varepsilon} \hookrightarrow H^{\sigma,\varphi}/\,M_{\sigma,\varphi} \hookrightarrow H^{\sigma-\varepsilon}/\,M_{\sigma-\varepsilon} \;\; \text{для любого} \;\; \varepsilon > 0;$$

г) *если число σ удовлетворяет условию*

$$-\sigma \neq m_j^{+} + 1/2 \;\; \text{для каждого номера} \;\; j = 1, \ldots, q, \tag{5.7}$$

то для σ найдется такое число $\rho > 0$, не зависящее от φ, что при любом $\varepsilon \in (0, \rho)$ справедливо

$$\bigl[\,H^{\sigma-\varepsilon}/\,M_{\sigma-\varepsilon},\, H^{\sigma+\varepsilon}/\,M_{\sigma+\varepsilon}\,\bigr]_\psi \cong H^{\sigma,\varphi}/\,M_{\sigma,\varphi},$$

где ψ — не зависящий от σ интерполяционный параметр из формулировки предложения 4.1, в которой берем $\varepsilon = \delta$.

Доказательство. Пункт а). Предположим, что $\sigma > -1/2$ и $h \in M_{\sigma,\varphi}$. В силу теоремы 4.3 г) функционал $(h, \cdot\,)_\Omega$ ограничен на пространстве $H^{-\sigma,\,1/\varphi}$. Согласно предположению, он равен нулю на множестве $C^\infty(\mathrm{b.c.})^{+}$, которое в виду теоремы 3.3 в) плотно в этом пространстве. Значит указанный функционал равен нулю как элемент сопряженного пространства $\bigl(H^{-\sigma,\,1/\varphi}\bigr)'$. Отсюда на основании теоремы 4.3 г) вытекает равенство $h = 0$. Пункт а) доказан.

Пункт б). Поскольку множество $C^\infty(\mathrm{b.c.})^{+}$ плотно в пространстве $H^{-\sigma,\,1/\varphi}(\mathrm{b.c.})^{+}$, то

$$M_{\sigma,\varphi} = \bigl\{h \in H^{\sigma,\varphi} : (h, w)_\Omega = 0 \;\; \text{для любого} \;\; w \in H^{-\sigma,\,1/\varphi}(\mathrm{b.c.})^{+}\bigr\}$$

и, следовательно,

$$H^{-\sigma,\,1/\varphi}(\mathrm{b.c.})^{+} = \bigl\{w \in H^{-\sigma,\,1/\varphi} : (h, w)_\Omega = 0 \;\; \text{для любого} \;\; h \in M_{\sigma,\varphi}\bigr\}.$$

Теперь пункт б) является следствием теоремы 4.3 г) и общеизвестного описания пространств, сопряженных к подпространству и факторпространству данного пространства.

Пункт в). Согласно теореме 4.3 д) справедливы компактные плотные вложения

$$H^{\sigma+\varepsilon} \hookrightarrow H^{\sigma,\varphi} \hookrightarrow H^{\sigma-\varepsilon} \ \text{ для любого } \ \varepsilon > 0.$$

Отсюда вытекает, что отображения

$$\{u+h:\, h\in M_{\sigma+\varepsilon}\} \mapsto \{u+h:\, h\in M_{\sigma,\varphi}\} \mapsto \{u+h:\, h\in M_{\sigma-\varepsilon}\},$$

где $u\in H^{\sigma+\varepsilon}$ для первого отображения и $u\in H^{\sigma,\varphi}$ для второго отображения, определяют компактные плотные вложения, сформулированные в пункте в).

Пункт г). Предположим, что число $s=-\sigma$ удовлетворяет условию (5.7). Рассмотрим сначала случай $s>0$. Обратимся к доказательству теоремы 5.1, в котором вместо задачи (2.1), (2.2) возьмем формально сопряженную задачу (2.4), (2.5). При этом в доказательстве следует заменить обозначения m_j, B_j, (b.c.) и P на m_j^+, B_j^+, (b.c.)$^+$ и P^+ соответственно. По доказанному, P^+ — проектор каждого пространства $H^{s\mp\varepsilon}$ на подпространство $H^{s\mp\varepsilon}(\text{b.c.})^+$. Здесь $\varepsilon\in(0,\rho)$, где ρ — некоторое достаточно малое положительное число, причем $s\mp\varepsilon>0$. Пусть Π^+ — оператор, сопряженный к P^+ относительно билинейной формы $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)_\Omega$. В силу пункта г) теоремы 4.3 и установленного пункта б) настоящей теоремы имеем линейный ограниченный оператор

$$\Pi^+:\, H^{\sigma\pm\varepsilon}/\,M_{\sigma\pm\varepsilon}\to H^{\sigma\pm\varepsilon}. \tag{5.8}$$

Он обладает следующим свойством:

$$u\in H^{\sigma\pm\varepsilon} \ \Rightarrow\ u-\Pi^+[u]\in M_{\sigma\pm\varepsilon}; \tag{5.9}$$

здесь $[u]=\{u+h:\, h\in M_{\sigma\pm\varepsilon}\}$ — класс смежности элемента u. Это вытекает из того, что для любых $u\in H^{\sigma\pm\varepsilon}$, $w\in C^\infty(\text{b.c.})^+$ справедливо

$$\bigl(\Pi^+[u],w\bigr)_\Omega=\bigl([u],P^+w\bigr)_\Omega=\bigl([u],w\bigr)_\Omega=\bigl(u,w\bigr)_\Omega,$$
$$\text{т. е. } \ \bigl(u-\Pi^+[u],w\bigr)_\Omega=0.$$

Теперь из свойств (5.8), (5.9) следует, что отображение

$$u\mapsto u-\Pi^+[u], \ \text{ где } \ u\in H^{\sigma\pm\varepsilon},$$

является проектором пространства $H^{\sigma\pm\varepsilon}=H^{\sigma\pm\varepsilon}_{\overline{\Omega}}(\mathbb{R}^n)$ на подпространство $M_{\sigma\pm\varepsilon}$ (последнее равенство вытекает из условия $\sigma\pm\varepsilon=-(s\mp\varepsilon)<0$). Это позволяет на основании предложения 3.2 (интерполяция фактор-пространств) и теоремы 4.1 (формула (4.3)) записать следующее:

$$
\begin{aligned}
&\bigl[\,H^{\sigma-\varepsilon}/\,M_{\sigma-\varepsilon}\,,\,H^{\sigma+\varepsilon}/\,M_{\sigma+\varepsilon}\,\bigr]_{\psi}\\
&\qquad=\Bigl[\,H^{\sigma-\varepsilon}_{\overline{\Omega}}(\mathbb{R}^n)/\,M_{\sigma-\varepsilon}\,,\,H^{\sigma+\varepsilon}_{\overline{\Omega}}(\mathbb{R}^n)/\,M_{\sigma+\varepsilon}\,\Bigr]_{\psi}\\
&\cong\Bigl[\,H^{\sigma-\varepsilon}_{\overline{\Omega}}(\mathbb{R}^n),\,H^{\sigma+\varepsilon}_{\overline{\Omega}}(\mathbb{R}^n)\Bigr]_{\psi}\Big/\biggl(\Bigl[\,H^{\sigma-\varepsilon}_{\overline{\Omega}}(\mathbb{R}^n),\,H^{\sigma+\varepsilon}_{\overline{\Omega}}(\mathbb{R}^n)\Bigr]_{\psi}\cap\,M_{\sigma-\varepsilon}\biggr)\\
&\qquad\cong\,H^{\sigma,\varphi}_{\overline{\Omega}}(\mathbb{R}^n)\Big/\Bigl(\,H^{\sigma,\varphi}_{\overline{\Omega}}(\mathbb{R}^n)\cap\,M_{\sigma-\varepsilon}\Bigr)\\
&\qquad\qquad=H^{\sigma,\varphi}\big/\,(\,H^{\sigma,\varphi}\cap\,M_{\sigma-\varepsilon}\,)\,=\,H^{\sigma,\varphi}\,/\,M_{\sigma,\varphi}.
\end{aligned}
$$

Здесь ψ — интерполяционный параметр из формулировки предложения 4.1, где берем $\varepsilon=\delta$. Тем самым пункт г) доказан в случае $s=-\sigma>0$. Противоположный случай $\sigma\geq 0$ тривиален в силу пункта а). В самом деле, положим $\rho=1/2$ и для произвольного $\varepsilon\in(0,\,1/2)$ запишем на основании теорем 4.3 б) и 4.1 (формула (4.2)) следующее:

$$
\begin{aligned}
&\bigl[\,H^{\sigma-\varepsilon}/\,M_{\sigma-\varepsilon}\,,\,H^{\sigma+\varepsilon}/\,M_{\sigma+\varepsilon}\,\bigr]_{\psi}\,=\,\bigl[\,H^{\sigma-\varepsilon},\,H^{\sigma+\varepsilon}\,\bigr]_{\psi}\\
&\qquad\cong\,\bigl[\,H^{\sigma-\varepsilon}(\Omega),\,H^{\sigma+\varepsilon}(\Omega)\,\bigr]_{\psi}\,\cong\,H^{\sigma,\varphi}(\Omega)\,=\,H^{\sigma,\varphi}\,=\,H^{\sigma,\varphi}\,/\,M_{\sigma,\varphi}.
\end{aligned}
$$

Пункт г), а с ним и теорема 5.2 доказаны. □

Как отмечалось выше, мы отождествляем в смысле теоремы 5.2 б) фактор-пространство $H^{\sigma,\varphi}/\,M_{\sigma,\varphi}$ и сопряженное пространство $\bigl(\,H^{-\sigma,\,1/\varphi}(\mathrm{b.c.})^{+}\,\bigr)'$. При этом для каждого распределения $u\in H^{\sigma,\varphi}$ его класс смежности $[u]=\{u+h:\,h\in M_{\sigma,\varphi}\}$ отождествляется с антилинейным ограниченным функционалом $(u,\,\cdot)_{\Omega}$ на пространстве $H^{-\sigma,\,1/\varphi}(\mathrm{b.c.})^{+}$. Соответствующие нормы класса смежности и функционала равны при $s\neq 0$ и эквивалентны при $s=0$. Для краткости это отождествление пространств мы записываем (несколько условно) как их равенство:

$$
H^{\sigma,\varphi}/\,M_{\sigma,\varphi}=\bigl(\,H^{-\sigma,\,1/\varphi}(\mathrm{b.c.})^{+}\,\bigr)'\ \text{ для произвольных } \sigma\in\mathbb{R},\ \varphi\in\mathcal{M}. \tag{5.10}
$$

6. Эллиптический оператор с однородными граничными условиями в уточненной шкале

Напомним, что мы рассматриваем регулярную граничную эллиптическую задачу (2.1), (2.2) и связываем с ней линейное отображение $u \mapsto Lu$, где $u \in C^\infty(\mathrm{b.c.})$. Изучим его в парах пространств, введенных в п. 5.

Напомним также, что N — ядро задачи (2.1), (2.2), а N^+ — ядро формально сопряженной задачи (2.4), (2.5) (см. определение (2.7)). Нам понадобятся проекторы пространства $H^{s,\varphi}$ на подпространства, ортогональные соответственно к N и N^+ относительно билинейной формы $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)_\Omega$. Эти проекторы существуют, поскольку пространства N и N^+ конечномерны. А именно, справедлива

Лемма 6.1. *Пусть $s \in \mathbb{R}$, $\varphi \in \mathcal{M}$. Произвольный элемент $u \in H^{s,\varphi}$ допускает единственное представление вида $u = u_0 + u_1$, где $u_0 \in N$, а $u_1 \in H^{s,\varphi}$ удовлетворяет условию $(u_1, w)_\Omega = 0$ для любого $w \in N$. При этом отображение $P : u \mapsto u_1$ является проектором пространства $H^{s,\varphi}$ на подпространство*

$$\{u_1 \in H^{s,\varphi} :\ (u_1, w)_\Omega = 0 \ \ \text{для любого} \ \ w \in N\}, \tag{6.1}$$

таким, что образ Pu не зависит от s, φ. Сужение отображения P на $H^{s,\varphi}(\mathrm{b.c.})$ является проектором пространства $H^{s,\varphi}(\mathrm{b.c.})$ на подпространство

$$\{u_1 \in H^{s,\varphi}(\mathrm{b.c.}) :\ (u_1, w)_\Omega = 0 \ \ \text{для любого} \ \ w \in N\}. \tag{6.2}$$

Эта лемма сохраняет силу, если в ее формулировке заменить N на N^+, P на P^+ и $(\mathrm{b.c.})$ на $(\mathrm{b.c.})^+$. При этом $M_{s,\varphi}$ — подпространство в $P^+(H^{s,\varphi})$.

Доказательство. Как отмечалось выше, N — конечномерное подпространство в $H^{s,\varphi}$. Ясно, что $\dim N$ совпадает с коразмерностью подпространства (6.1), причем N и (6.1) имеют тривиальное пересечение. Следовательно [22, с. 56], пространство $H^{s,\varphi}$ разлагается в прямую сумму подпространств N и (6.1) с проектором P на подпространство (6.1), который, очевидно, не зависит от s и φ. Отсюда, поскольку $N \subset H^{s,\varphi}(\mathrm{b.c.})$, вытекает, что пространство $H^{s,\varphi}(\mathrm{b.c.})$ разлагается в прямую сумму подпространств N и (6.2) с тем же проектором P на подпространство (6.2). Как видим, существование проектора P следует из двух условий: пространство N конечномерно и $N \subset H^{s,\varphi}(\mathrm{b.c.})$. Значит, поскольку пространство N^+ конечномерно и $N^+ \subset H^{s,\varphi}(\mathrm{b.c.})^+$, то лемма остается верной и для проектора P^+

при указанных заменах обозначений в ее формулировке. Наконец, заметим, что последнее предложение леммы вытекает из включения $N^{+}\subset C^{\infty}(\mathrm{b.c.})^{+}$. Лемма 6.1 доказана. $\square$

Установим теперь центральный результат настоящей статьи.

Теорема 6.1. *Пусть $s\in\mathbb{R}$, $\varphi\in\mathcal{M}$, причем*

$$s\neq j+1/2 \ \ \text{для каждого} \ \ j=0,\,1,\dots,2q-1. \tag{6.3}$$

Отображение $u\mapsto Lu$, где $u\in C^{\infty}(\mathrm{b.c.})$, а Lu интерпретируется либо как класс смежности $\{Lu+h:\,h\in M_{s-2q,\,\varphi}\}$, либо как функционал $(Lu,\,\cdot\,)_{\Omega}$, продолжается по непрерывности до линейного ограниченного оператора

$$L:H^{s,\varphi}(\mathrm{b.c.})\to H^{s-2q,\,\varphi}/M_{s-2q,\,\varphi}=\bigl(\,H^{2q-s,\,1/\varphi}(\mathrm{b.c.})^{+}\,\bigr)'. \tag{6.4}$$

Сужение оператора (6.4) *на подпространство* (6.1) *является топологическим изоморфизмом*

$$L:P(H^{s,\varphi}(\mathrm{b.c.}))\leftrightarrow P^{+}(H^{s-2q,\,\varphi})/M_{s-2q,\,\varphi}. \tag{6.5}$$

Доказательство. В случае $\varphi\equiv 1$ (пространства Соболева) эта теорема доказана в монографии Я. А. Ройтберга [8, § 5.5 (теорема 5.5.2)]. Случай призвольного $\varphi\in\mathcal{M}$ мы выведем из этого результата с помощью интерполяции с функциональным параметром следующим образом. В силу условия (6.3) имеем

$$s\neq m_j+1/2 \ \text{ и } \ 2q-s\neq m_j^{+}+1/2 \ \text{ для каждого номера } \ j=1,\dots,q. \tag{6.6}$$

Следовательно, согласно теоремам 5.1 а) и 5.2 г) (в последней берем $\sigma=s-2q$) существует такое достаточно малое число $\varepsilon>0$, что

$$\bigl[\,H^{s-\varepsilon}(\mathrm{b.c.}),\,H^{s+\varepsilon}(\mathrm{b.c.})\,\bigr]_{\psi}\cong H^{s,\varphi}(\mathrm{b.c.}), \tag{6.7}$$

$$\bigl[\,H^{s-2q-\varepsilon}/\,M_{s-2q-\varepsilon}\,,\,H^{s-2q+\varepsilon}/\,M_{s-2q+\varepsilon}\,\bigr]_{\psi}\cong H^{s-2q,\,\varphi}/\,M_{s-2q,\,\varphi}. \tag{6.8}$$

Здесь $s\mp\varepsilon\neq j+1/2$ для каждого $j=0,\,1,\dots,2q-1$, а ψ — интерполяционный параметр. Теперь сошлемся на теорему 5.5.2 монографии [8, § 5.5], согласно которой существуют линейные ограниченные операторы

$$L:H^{s\mp\varepsilon}(\mathrm{b.c.})\to H^{s\mp\varepsilon-2q}/M_{s\mp\varepsilon-2q}$$

и топологические изоморфизмы

$$L:P(H^{s\mp\varepsilon}(\mathrm{b.c.})\,)\leftrightarrow P^{+}(H^{s\mp\varepsilon-2q})/M_{s\mp\varepsilon-2q}.$$

Применив к ним интерполяцию с параметром ψ, получим ограниченный оператор

$$\begin{aligned} L:\bigl[\,H^{s-\varepsilon}(\mathrm{b.c.}),\,H^{s+\varepsilon}(\mathrm{b.c.})\,\bigr]_{\psi} \\ \to \bigl[\,H^{s-\varepsilon-2q}/\,M_{s-\varepsilon-2q}\,,\,H^{s+\varepsilon-2q}/\,M_{s+\varepsilon-2q}\,\bigr]_{\psi} \end{aligned} \tag{6.9}$$

и топологический изоморфизм

$$\begin{aligned} L:\bigl[\,P(H^{s-\varepsilon}(\mathrm{b.c.})),\,P(H^{s+\varepsilon}(\mathrm{b.c.}))\,\bigr]_{\psi} \\ \leftrightarrow \bigl[\,P^{+}(H^{s-\varepsilon-2q})/\,M_{s-\varepsilon-2q}\,,\,P^{+}(H^{s+\varepsilon-2q})/\,M_{s+\varepsilon-2q}\,\bigr]_{\psi}. \end{aligned} \tag{6.10}$$

(Пары пространств, написанные в (6.10), допустимые, что вытекает из предложения 3.2; см. ниже.) В силу интерполяционных формул (6.7), (6.8) (а также равенства (5.10)) оператор (6.9) становится ограниченным оператором (6.4) из формулировки доказываемой теоремы. Остается показать, что (6.10) означает изоморфизм (6.5).

Докажем сначала, что область определения изоморфизма (6.10) совпадает с подпространством $P(H^{s,\varphi}(\mathrm{b.c.}))$. Согласно лемме 6.1 отображение P является проектором пространства $H^{s\mp\varepsilon}(\mathrm{b.c.})$ на подпространство

$$P(H^{s\mp\varepsilon}(\mathrm{b.c.}))=\bigl\{u\in H^{s\mp\varepsilon}(\mathrm{b.c.}):\ (u,w)_{\Omega}=0\ \text{ для любого }\ w\in N\bigr\}.$$

Это позволяет на основании предложения 3.2 (интерполяция подпространств) и формулы (6.7) записать следующее:

$$\begin{aligned} &\bigl[\,P(H^{s-\varepsilon}(\mathrm{b.c.})),\,P(H^{s+\varepsilon}(\mathrm{b.c.}))\,\bigr]_{\psi} \\ &\qquad\cong\ \bigl[\,H^{s-\varepsilon}(\mathrm{b.c.}),\,H^{s+\varepsilon}(\mathrm{b.c.})\,\bigr]_{\psi}\cap P(H^{s-\varepsilon}(\mathrm{b.c.})) \\ &\qquad\qquad\cong\ H^{s,\varphi}(\mathrm{b.c.})\cap P(H^{s-\varepsilon}(\mathrm{b.c.}))\ =P(H^{s,\varphi}(\mathrm{b.c.})). \end{aligned}$$

Итак,

$$\bigl[\,P(H^{s-\varepsilon}(\mathrm{b.c.})),\,P(H^{s+\varepsilon}(\mathrm{b.c.}))\,\bigr]_{\psi}\ \cong\ P(H^{s,\varphi}(\mathrm{b.c.})). \tag{6.11}$$

Покажем далее, что область значений изоморфизма (6.10) равна $P^{+}(H^{s-2q,\,\varphi})/M_{s-2q,\,\varphi}$. Согласно лемме 6.1 отображение P^{+} является проектором пространства $H^{s\mp\varepsilon-2q}$ на подпространство

$$P^{+}(H^{s\mp\varepsilon-2q})=\bigl\{f\in H^{s\mp\varepsilon-2q}:\ (f,w)_{\Omega}=0\ \text{ для любого }\ w\in N^{+}\bigr\}.$$

Рассмотрим линейное отображение

$$[f] = \{f + h : h \in M_{s\mp\varepsilon-2q}\} \mapsto [P^+ f] = \{P^+ f + h : h \in M_{s\mp\varepsilon-2q}\},$$
$$\text{где } f \in H^{s\mp\varepsilon-2q}. \quad (6.12)$$

Оно определено корректно: поскольку $M_{s\mp\varepsilon-2q} \subset P^+(H^{s\mp\varepsilon-2q})$, то $P^+h = h$ для каждого $h \in M_{s\mp\varepsilon-2q}$; следовательно, класс смежности $[P^+ f]$ не зависит от выбора представителя f класса смежности $[f]$. Из сказанного выше об отображении P^+ вытекает, что отображение (6.12) является проектором пространства $H^{s\mp\varepsilon-2q}/M_{s\mp\varepsilon-2q}$ на подпространство $P^+(H^{s\mp\varepsilon-2q})/M_{s\mp\varepsilon-2q}$. Это позволяет на основании предложения 3.2 (интерполяция подпространств) и формулы (6.8) записать следующее:

$$\begin{aligned}
&\big[\, P^+(H^{s-\varepsilon-2q})/\, M_{s-\varepsilon-2q}\,,\; P^+(H^{s+\varepsilon-2q})/\, M_{s+\varepsilon-2q}\,\big]_\psi \\
&\cong \big[H^{s-\varepsilon-2q}/M_{s-\varepsilon-2q}, H^{s+\varepsilon-2q}/M_{s+\varepsilon-2q}\big]_\psi \cap \big(P^+(H^{s-\varepsilon-2q})/M_{s-\varepsilon-2q}\big) \\
&\cong \big(\, H^{s-2q,\varphi}/\, M_{s-2q,\varphi}\,\big) \cap \big(\, P^+(H^{s-\varepsilon-2q})/\, M_{s-\varepsilon-2q}\,\big) \\
&= \big(\, H^{s-2q,\varphi} \cap P^+(H^{s-\varepsilon-2q})\,\big) \,/\, M_{s-2q,\varphi} \;=\; P^+(H^{s-2q,\varphi})/M_{s-2q,\varphi}.
\end{aligned}$$

Итак,

$$\big[\, P^+(H^{s-\varepsilon-2q})/\, M_{s-\varepsilon-2q}\,,\; P^+(H^{s+\varepsilon-2q})/\, M_{s+\varepsilon-2q}\,\big]_\psi$$
$$\cong\; P^+(H^{s-2q,\varphi})/M_{s-2q,\varphi}. \quad (6.13)$$

Теперь из интерполяционных формул (6.11), (6.13) вытекает, что (6.10) означает топологический изоморфизм (6.5). Теорема 6.1 доказана. □

Теорема 6.1 обобщает и уточняет известный результат Ю. М. Березанского, С. Г. Крейна, Я. А. Ройтберга [10], [8, § 5.5] (см. также обзор [9, p. 85–86]). Как видим, оператор L оставляет инвариантным функциональный параметр φ, уточняющий основную гладкость в пространстве. Отметим, что, если ядра N и N^+ тривиальны, то оператор (6.4) становится топологическим изоморфизмом. Значит, теорема об изоморфизме, сформулированная в п. 2, является частным случаем теоремы 6.1. Отметим также, что в силу теорем 4.3 б) и 5.2 а) оператор (6.5) есть топологический изоморфизм

$$L : P(H^{s,\varphi}(\mathrm{b.c.})) \leftrightarrow P^+(H^{s-2q,\varphi}(\Omega)) \;\text{ при }\; s > 2q - 1/2.$$

Поэтому теорема 6.1 для $s > 2q - 1/2$ является частным случаем результата авторов [18, с. 369].

Нетрудно показать, что изоморфизм (6.5) влечет фредгольмовость оператора (6.4) и априорную оценку решения задачи (2.1), (2.2). Напомним, что линейный ограниченный оператор $T : X \to Y$, где X, Y — банаховы пространства, называется *фредгольмовым*, если его ядро конечномерно, а область значений $T(X)$ замкнута в Y и имеет там конечную коразмерность (последняя равна, по определению, размерности факторпространства $Y/\,T(X)$). Фредгольмов оператор T имеет конечный индекс

$$\operatorname{ind} T = \dim\ker T - \dim(Y/\,T(X)).$$

Теорема 6.2. *Пусть $s \in \mathbb{R}$, $\varphi \in \mathcal{M}$, причем выполняется условие* (6.3). *Тогда ограниченный оператор* (6.4) *фредгольмов с ядром N, областью значений*

$$\bigl\{[f] \in H^{s-2q,\,\varphi}/\,M_{s-2q,\,\varphi} : \ (f, w)_\Omega = 0 \ \text{ для любого } \ w \in N^+\bigr\} \tag{6.14}$$

и постоянным индексом, равным $\dim N - \dim N^+$. *Здесь* $[f] = \{f+h : h \in M_{s-2q,\,\varphi}\}$ *— класс смежности элемента* $f \in H^{s-2q,\,\varphi}$.

Кроме того, справедлива следующая априорная оценка решения $u \in H^{s,\varphi}(\mathrm{b.c.})$ уравнения $Lu = [f]$: для произвольного числа $\rho > 0$ существует такое число $c > 0$, не зависящее от u, что

$$\|u\|_{s,\varphi} \le c\,\Bigl(\|f|_{s-2q,\,\varphi} + \|u\|_{s-\rho}\Bigr). \tag{6.15}$$

Здесь $\|\cdot\|_{\sigma,\varphi}$ — норма в пространстве $H^{\sigma,\varphi}$ (как обычно в случае $\varphi \equiv 1$ индекс φ в обозначении нормы опускаем).

Доказательство. Напомним, что пространства N и N^+ конечномерны. Покажем сначала, что N — ядро оператора (6.4). Поскольку $N \subset C^\infty(\mathrm{b.c.})$, то образом элемента $u \in N$ при отображении (6.4) является класс смежности

$$\{Lu + h : \ h \in M_{s-2q,\,\varphi}\} = \{0 + h : \ h \in M_{s-2q,\,\varphi}\},$$

т. е. нулевой элемент фактор-пространства $H^{s-2q,\,\varphi}/M_{s-2q,\,\varphi}$. Верно и наоборот: если элемент $u \in H^{s,\varphi}$ удовлетворяет условию $Lu = 0$, то написав в силу леммы 6.1 разложение $u = u_0 + Pu$, где $u_0 \in N$, получим, по доказанному, равенство

$$0 = Lu = Lu_0 + LPu = LPu.$$

Отсюда в силу изоморфизма (6.5) вытекает, что $Pu = 0$, т. е. $u = u_0 \in N$. Итак, N — конечномерное ядро оператора (6.4).

Из изоморфизма (6.5) также следует, что область значений оператора (6.4) совпадает с фактор-пространством $P^{+}(H^{s-2q,\varphi})/M_{s-2q,\varphi}$, т. е. с (6.14) и поэтому замкнута в пространстве $H^{s-2q,\varphi}/M_{s-2q,\varphi}$. Теперь коразмерность области значений равна размерности "сложного" фактор-пространства

$$\bigl(H^{s-2q,\varphi}/M_{s-2q,\varphi}\bigr)\,/\,\bigl(P^{+}(H^{s-2q,\varphi})/M_{s-2q,\varphi}\bigr) = H^{s-2q,\varphi}/P^{+}(H^{s-2q,\varphi}).$$

Последняя в силу леммы 6.1 совпадает с $\dim N^{+}$ и поэтому конечна. Таким образом, оператор (6.4) фредгольмов и имеет индекс, равный $\dim N-\dim N^{+}$.

Остается установить априорную оценку (6.15). Возьмем произвольное распределение $u\in H^{s,\varphi}(\mathrm{b.c.})$ и число $\rho>0$. Согласно лемме 6.1 справедливо $u-Pu\in N$. Но N — конечномерное подпространство в пространствах $H^{s,\varphi}$ и $H^{s-\rho}$; следовательно, нормы в них эквивалентны на N. В частности,

$$\|u-Pu\|_{s,\varphi}\le c_1\,\|u-Pu\|_{s-\rho}$$

с постоянной $c_1>0$, не зависящей от u. Отсюда получаем

$$\begin{aligned}\|u\|_{s,\varphi}&\le \|u-Pu\|_{s,\varphi}+\|Pu\|_{s,\varphi}\\ &\le c_1\,\|u-Pu\|_{s-\rho}+\|Pu\|_{s,\varphi}\\ &\le c_1\,\|u\|_{s-\rho}+c_1\,\|Pu\|_{s-\rho}+\|Pu\|_{s,\varphi}\\ &\le c_1\,\|u\|_{s-\rho}+(c_1c_2+1)\,\|Pu\|_{s,\varphi},\end{aligned}$$

где c_2 — норма оператора вложения $H^{s,\varphi}\hookrightarrow H^{s-\rho}$ (см. теорему 4.3 д)). Итак,

$$\|u\|_{s,\varphi}\le c_1\,\|u\|_{s-\rho}+(c_1c_2+1)\,\|Pu\|_{s,\varphi}. \tag{6.16}$$

Пусть теперь $Lu=[f]$. Поскольку, по доказанному, N — ядро оператора (6.4) и $u-Pu\in N$, то также $LPu=[f]$. Таким образом, Pu — прообраз класса смежности $[f]$ при топологическом изоморфизме (6.5). Следовательно,

$$\|Pu\|_{s,\varphi}\le c_0\,\|f\|_{s-2q,\varphi},$$

где c_0 — норма оператора, обратного к (6.5). Отсюда и из неравенства (6.16) немедленно вытекает априорная оценка (6.15). Теорема 6.2 доказана. □

Из теоремы 6.2 (формула (6.14)) вытекает, что N^+ является дефектным подпространством оператора (6.4). Оценка (6.15) называется также *неравенством коэрцитивности*. В случае $N \neq \{0\}$ ее правая часть содержит соболевскую норму $\|u\|_{s-\rho}$, которую можно сделать как угодно малой за счет выбора достаточно большого числа ρ.

В заключение отметим следующее. Поскольку формально сопряженная граничная задача (2.4), (2.5) регулярная эллиптическая, то теоремы 6.1 и 6.2 сохраняют силу для оператора L^+ вместо L (с очевидными изменениями в формулировке). Так, линейное отображение $v \mapsto L^+v$, где $v \in C^\infty(\mathrm{b.c.})^+$, продолжается по непрерывности до ограниченного фредгольмового оператора

$$L^+ : H^{2q-s,\,1/\varphi}(\mathrm{b.c.})^+ \to H^{-s,\,1/\varphi}/\, M^+_{-s,\,1/\varphi} = \bigl(\, H^{s,\varphi}(\mathrm{b.c.})\,\bigr)' \tag{6.17}$$

с ядром N^+ и дефектным подпространством N. Здесь обозначено

$$M^+_{-s,\,1/\varphi} = \bigl\{h \in H^{-s,\,1/\varphi} : \ (h,w)_\Omega = 0 \ \text{ для любого } \ w \in C^\infty(\mathrm{b.c.})\bigr\},$$

а предположения относительно параметров s и φ такие, как в теоремах 6.1, 6.2. Сужение оператора (6.17) на подпространство

$$P^+(H^{2q-s,\,1/\varphi}(\mathrm{b.c.})^+) = \bigl\{v \in H^{2q-s,\,1/\varphi}(\mathrm{b.c.})^+ : \ (v,w)_\Omega = 0 \\ \text{для любого } \ w \in N^+\bigr\}$$

является топологическим изоморфизмом

$$L^+ : P^+(H^{2q-s,\,1/\varphi}(\mathrm{b.c.})^+) \leftrightarrow P(H^{-s,\,1/\varphi})/M^+_{-s,\,1/\varphi}.$$

В силу ограниченности операторов (6.4) и (6.17) равество (2.6) продолжается по непрерывности до соотношения

$$(Lu,v)_\Omega = (u, L^+v)_\Omega$$

для произвольных $u \in H^{s,\varphi}(\mathrm{b.c.}),\ v \in H^{2q-s,\,1/\varphi}(\mathrm{b.c.})^+$, упомянутого в п. 2. Оно означает, что операторы (6.4) и (6.17) сопряжены относительно полуторалинейной формы $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)_\Omega$ — расширения по непрерывности скалярного произведения в $L_2(\Omega)$.

Литература

[1] С. Агмон, А. Дуглис, Л. Ниренберг, *Оценки вблизи границы решений эллиптических уравнений в частных производных при общих граничных условиях. I*, М.: Изд-во иностранной литературы, 1962, 206 с.

[2] Ж.-Л. Лионс, Э. Мадженес, *Неоднородные граничные задачи и их приложения*, М.: Мир, 1971., 372 с.

[3] Л. Хермандер, *Линейные дифференциальные операторы с частными производными*, М.: Мир, 1965, 380 с.

[4] Л. Хермандер, *Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными: В 4-х т. Т. 2. Дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами*, М.: Мир, 1986, 456 с.

[5] Л. Хермандер, *Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными: В 4-х т. Т. 3. Псевдодифференциальные операторы*, М.: Мир, 1987, 696 с.

[6] Х. Трибель, *Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы*, М.: Мир, 1980, 664 с.

[7] Х. Трибель, *Теория функциональных пространств*, М.: Мир, 1986, 447 с.

[8] Ya. A. Roitberg, *Elliptic boundary value problems in the spaces of distributions*, Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1996, 427 p.

[9] M. S. Agranovich, *Elliptic boundary problems*, Encycl. Math. Sci., 79. Part. Different. Equat., Berlin: Springer, 1997, 1–144.

[10] Ю. М. Березанский, С. Г. Крейн, Я. А. Ройтберг, *Теорема о гомеоморфизмах и локальное повышение гладкости вплоть до границы решений эллиптических уравнений* // Докл. АН СССР. **148** (1963), N 4, 745-748.

[11] Я. А. Ройтберг, *Теорема о гомеоморфизмах, осуществляемых эллиптическими операторами* // Докл. АН СССР. **180** (1968), N 3, 542–545.

[12] А. А. Мурач, *Эллиптические краевые задачи в полных шкалах пространств типа Лизоркина–Трибеля* // Докл. АН Украины. (1994), N 12, 36–39.

[13] А. А. Мурач, *Эллиптические краевые задачи в полных шкалах простргнатсв типа Никольского* // Укр. мат. журн. **46** (1994), N 12, 1647–1654.

[14] Л. Р. Волевич, Б. П. Панеях, *Некоторые пространства обобщенных функций и теоремы вложения* // Успехи мат. наук. **20** (1965), N 1, 3–74.

[15] Г. Шлензак, *Эллиптические задачи в уточненной шкале пространств* // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, мат., мех. **29** (1974), N 4, 48–58.

[16] W. Farkas, H.-G. Leopold, *Characterization of function spaces of generalised smoothness* // Ann. Mat. Pura Appl. **185** (2006), N 1, 1–62.

[17] В. А. Михайлец, А. А. Мурач, *Уточненные шкалы пространств и эллиптические краевые задачи. I* // Укр. мат. журн. **58** (2006), N 2, 217–235.

[18] В. А. Михайлец, А. А. Мурач, *Уточненные шкалы пространств и эллиптические краевые задачи. II* // Укр. мат. журн. **58** (2006), N 3, 352–370.

[19] В. А. Михайлец, А. А. Мурач, *Интерполяция с функциональным параметром и пространства дифференцируемых функций* // Доп. НАН України. (2006), N 6, 13–18.

[20] В. А. Михайлец, А. А. Мурач, *Эллиптический оператор в уточненной шкале пространств на замкнутом многообразии* // Доп. НАН України. (2006), N 10, 27–33.

[21] В. А. Михайлец, А. А. Мурач, *Регулярная эллиптическая граничная задача для однородного уравнения в двусторонней уточненной шкале пространств* // Укр. мат. журн. **58** (2006), N 11, 1536–1555.

[22] *Функциональный анализ* под общ. ред. С. Г. Крейна, М.: Наука, 1972, 544 с.

[23] Е. Сенета, *Правильно меняющиеся функции*, М.: Наука, 1985, 142 с.

[24] N. H. Bingham, C. M. Goldie, J. L. Teugels, *Regular variation*, Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1989, 512 p.

[25] Ю. М. Березанский, Г. Ф. Ус, З. Г. Шефтель, *Функциональный анализ*, Киев.: Выща шк., 1990, 600 с.

[26] P. Grisvard, *Caracterisation de quelques espaces d'interpolation* // Arch. Rat. Mech. Anal. **25** (1967), 40–63.

[27] R. Seeley, *Interpolation in L_p with boundary conditions* // Studia Math. **44** (1972), 47–60.

Сведения об авторах

Владимир Андреевич Михайлец, Александр Александрович Мурач

Институт математики НАН Украины,
ул. Терещенковская 3,
01601, Киев-4,
Украина
E-Mail: mikhailets@imath.kiev.ua,
murach@imath.kiev.ua