Український математичний вісник
Том 3 **(2006)**, № 2, 275 – 299

Ортогональные матричные полиномы Лорана на вещественной оси

Кирилл Симонов

(Представлена М. М. Маламудом)

Аннотация. В статье рассматриваются матричные полиномы Лорана первого и второго рода, соответствующие сильной матричной проблеме моментов на вещественной оси. Для этих полиномов устанавливаются рекуррентные соотношения и формулы типа Кристоффеля–Дарбу и Остроградского–Лиувилля. Определяется и факторизуется на элементарные множители обобщенная матрица Неванлинны.

2000 MSC. 42C05, 44A60, 42C05.

Ключевые слова и фразы. Сильная матричная проблема моментов, ортогональные полиномы Лорана.

1. Введение

Сильной матричной проблемой моментов Гамбургера называется следующая задача: дана последовательность самосопряженных $N\times N$-матриц $\{S_k\}_{-\infty}^{+\infty}$, которые называются *моментами*, найти все самосопряженные неубывающие $N\times N$-матрицы-функции $\Sigma(t)$ на вещественной оси такие, что выполнены тождества

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} t^k \, d\Sigma(t) = S_k \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \tag{1.1}$$

Также рассматривают *сильную усеченную матричную проблему моментов Гамбургера*: дана конечная последовательность $\{S_k\}_{-m}^{m}$, найти все неубывающие матрицы-функции $\Sigma(t)$ такие, что выполнены тождества (1.1) при $k = 0, \pm 1, \ldots, \pm m$. Напомним, что в классической проблеме моментов даны моменты только неотрицательных степеней $\{S_k\}_0^\infty$, соответственно требуется выполнение тождеств (1.1) при $k \geqslant 0$.

Статья поступила в редакцию 29.04.2005

Как известно, с классической проблемой моментов (см. [1]) тесно связаны такие объекты, как *ортогональные полиномы* и *якобиева матрица*. При исследовании сильной проблемы моментов (1.1) естественно возникают так называемые *полиномы Лорана*, т. е. рациональные функции вида $f(z) = \sum_{k=-m}^{m} f_k z^k$. В этой работе определяются и изучаются матричные полиномы Лорана первого и второго рода, соответствующие задаче (1.1). В последующих работах мы намерены применить полученные результаты для описания решений сильной проблемы моментов (1.1).

В скалярном случае, исследования сильной проблемы моментов были начаты в работах [3–5]. Описание решений скалярной сильной проблемы моментов было получено в [8] и [9] для проблемы Гамбургера и в [7] для проблемы Стилтьеса. Детальную библиографию по сильной проблеме моментов можно найти в обзоре [6].

Всюду в этой работе мы предполагаем, что заданная последовательность моментов $\{S_k\}_{-\infty}^{+\infty}$ *нормирована*, т. е. $S_0 = I$, и *позитивна*, т. е. все квадратичные формы вида

$$\sum_{i,j=-m}^{m} \xi_j^* S_{i+j} \xi_i \qquad \left(\{\xi_k\}_{-m}^{m} \subset \mathbb{C}^N,\ m = 0, 1, 2, \ldots\right) \tag{1.2}$$

положительно определены и невырождены.

Заметим, что в работе [8] при описании всех решений проблемы (1.1) в скалярном случае кроме невырожденности и положительной определенности форм (1.2) требуется дополнительно невырожденность всех квадратичных форм вида

$$\sum_{i,j=-m}^{m} \xi_j^* S_{i+j-1} \xi_i, \quad \sum_{i,j=-m}^{m+1} \xi_j^* S_{i+j-1} \xi_i \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots). \tag{1.3}$$

В нашей работе условие невырожденности форм (1.3) не используется, что позволяет получить новые результаты даже в скалярном случае.

В пространстве N-мерных векторных полиномов Лорана определим скалярное произведение по формуле

$$(f, g) = \sum_{i,j=-m}^{m} g_j^* S_{i+j} f_i,$$

где

$$f(z) = \sum_{i=-m}^{m} f_i z^i, \quad g(z) = \sum_{j=-m}^{m} g_j z^j \quad (f_i, g_j \in \mathbb{C}^N,\ m = 0, 1, 2, \ldots).$$

Обозначим через $\mathfrak{L}$ гильбертово пространство, полученное в результате пополнения пространства полиномов Лорана относительно этого скалярного произведения.

Опишем кратко содержание этой работы.

В разделе 2 определяются матричные полиномы Лорана $\{P_k(z)\}_0^\infty$ и $\{Q_k(z)\}_0^\infty$ первого и второго рода (определения 2.1 и 2.3) и устанавливается явный вид полиномов Лорана $\{P_k(z)\}_0^\infty$ (предложение 2.1).

В разделе 3 мы находим пятичленные рекуррентные соотношения для полиномов Лорана первого и второго рода (теорема 3.1). Из коэффициентов этих соотношений мы составляем обобщенную якобиеву матрицу, соответствующую проблеме моментов (1.1) (определение 3.1)

В разделе 4 доказываются аналоги формул Кристоффеля–Дарбу и Остроградского–Лиувилля для сильной матричной проблемы моментов (теоремы 4.1 и 4.2). В этом же разделе определяется и факторизуется на элементарные множители обобщенная матрица Неванлинны $W_m(\lambda, \mu)$ (определение 4.1 и теорема 4.3)

В разделе 5 изучается вполне неопределенный случай сильной проблемы моментов (1.1) (определение 5.1, теорема 5.2). В этом случае существует предельная матрица Неванлинны

$$W_\infty(\lambda, \mu) = \lim_{m\to\infty} W_m(\lambda, \mu).$$

Матрица $W_\infty(\cdot, \mu)$ аналитична в $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ и имеет минимальный экспоненциальный тип в своих особых точках (теорема 5.3).

2. Полиномы первого и второго рода

Определение 2.1. *Последовательность $N\times N$-матричных полиномов Лорана $P.(z) = \{P_k(z)\}_0^\infty$ вида*

$$P_{2k}(z) = \sum_{j=-k}^{k} P_{2k}^{(j)} z^j, \quad P_{2k+1}(z) = \sum_{j=-k-1}^{k} P_{2k+1}^{(j)} z^j \qquad (P_k^{(j)} \in \mathbb{C}^{N\times N})$$

называется последовательностью полиномов Лорана первого рода, *если выполнены условия:*

(A) *Коэффициенты $P_{2k}^{(k)}$ и $P_{2k+1}^{(-k-1)}$ являются невырожденными самосопряженными положительными матрицами.*

(B) *Полиномы Лорана $\{P_k\}_0^\infty$ ортонормированы, т. е.*

$$(P_i(z)\xi, P_j(z)\eta) = 0, \quad (P_k(z)\xi, P_k(z)\eta) = \eta^*\xi$$
$$(\xi, \eta \in \mathbb{C}^N,\ i, j, k = 0, 1, 2, \ldots,\ i \neq j).$$

Условия (A) и (B) однозначно определяют полиномы Лорана $\{P_k(z)\}_0^\infty$.

Определение 2.2. *Индекс $n = 2k$ называется* регулярным *для последовательности полиномов Лорана $\{P_k(z)\}_0^\infty$, если коэффициент $P_{2k}^{(-k)}$ является невырожденным. Индекс $n = 2k+1$ называется регулярным, если коэффициент $P_{2k+1}^{(k)}$ является невырожденным. В противном случае соответствующие индексы называются* сингулярными.

Определение 2.3. *Последовательность $N\times N$-матричных полиномов Лорана $Q.(z) = \{Q_k(z)\}_0^\infty$, определенная формулами*

$$\eta^* Q_k(z)\xi = (R_k(\cdot, z)\xi, \eta) \qquad (\xi, \eta \in \mathbb{C}^N,\ k = 0, 1, 2, \ldots),$$

где

$$R_k(\zeta, z) = \frac{P_k(\zeta) - P_k(z)}{\zeta - z} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots),$$

называется последовательностью полиномов Лорана второго рода.

В дополнение к определениям 2.1 и 2.3, положим

$$P_{-2}(z) = 0, \quad P_{-1}(z) = 0, \quad Q_{-2}(z) = -I, \quad Q_{-1}(z) = 0.$$

Полиномы Лорана первого рода можно представить и в явном виде.

Предложение 2.1. *Полиномы Лорана первого рода имеют вид*

$$P_k(z) = Z_k(z) H_k^{-1} \Omega_k D_k \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots),$$

где

$$\begin{aligned}
Z_{2k}(z) &= \begin{pmatrix} z^{-k}I & \cdots & z^k I \end{pmatrix}, & Z_{2k+1}(z) &= \begin{pmatrix} z^{-k-1}I & \cdots & z^k I \end{pmatrix}, \\
H_{2k} &= (S_{i+j})_{i,j=-k}^k, & H_{2k+1} &= (S_{i+j})_{i,j=-k-1}^k, \\
\Omega_{2k} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & I \end{pmatrix}^*, & \Omega_{2k+1} &= \begin{pmatrix} I & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}^*, \\
D_{2k} &= \left(H_{2k}^{-1}\right)_{2k,2k}^{-\frac{1}{2}}, & D_{2k+1} &= \left(H_{2k+1}^{-1}\right)_{0,0}^{-\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Доказательство. Покажем, что для полиномов Лорана $P_k(z) = Z_k(z) H_k^{-1} \Omega_k D_k$ выполнены условия (A) и (B). Коэффициенты $P_{2k}^{(k)}$ и $P_{2k+1}^{(-k-1)}$ равны соответственно

$$P_{2k}^{(k)} = D_{2k}^{-1}, \quad P_{2k+1}^{(-k-1)} = D_{2k+1}^{-1}. \tag{2.1}$$

Ясно, что эти коэффициенты строго положительны, значит условие (A) выполнено.

Далее, верны тождества

$$
\begin{aligned}
(P_{2k}(z)\xi, z^j\eta) &= \eta^* \begin{pmatrix} S_{j-k} & S_{j-k+1} & \dots & S_{j+k} \end{pmatrix} \\
&\times \begin{pmatrix} S_{-2k} & S_{-2k+1} & \dots & S_0 \\ S_{-2k+1} & S_{-2k+2} & \dots & S_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_0 & S_1 & \dots & S_{2k} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ I \end{pmatrix} D_{2k}\xi \\
&= \begin{cases} 0 & (j = -k, -k+1, \dots, k-1), \\ \eta^* D_{2k}\xi & (j = k), \end{cases}
\end{aligned} \tag{2.2}
$$

$$
\begin{aligned}
(P_{2k+1}(z)\xi, z^j\eta) &= \eta^* \begin{pmatrix} S_{j-k-1} & S_{j-k} & \dots & S_{j+k} \end{pmatrix} \\
&\times \begin{pmatrix} S_{-2k-2} & S_{-2k-1} & \dots & S_{-1} \\ S_{-2k-1} & S_{-2k} & \dots & S_0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_{-1} & S_0 & \dots & S_{2k} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} I \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} D_{2k+1}\xi \\
&= \begin{cases} \eta^* D_{2k+1}\xi & (j = -k-1), \\ 0 & (j = -k, -k+1, \dots, k), \end{cases}
\end{aligned} \tag{2.3}
$$

из которых следует, что полиномы Лорана $\{P_k\}_0^\infty$ ортогональны

$$(P_i(z)\xi, P_j(z)\eta) = 0 \qquad (\xi, \eta \in \mathbb{C}^N,\ i, j = 0, 1, 2, \dots,\ i \neq j)$$

и нормированы

$$
\begin{gathered}
(P_{2k}(z)\xi, P_{2k}(z)\eta) = \left(P_{2k}(z)\xi,\ z^k D_{2k}^{-1}\eta\right) = \eta^*\xi, \\
(P_{2k+1}(z)\xi, P_{2k+1}(z)\eta) = \left(P_{2k+1}(z)\xi,\ z^{-k-1} D_{2k+1}^{-1}\eta\right) = \eta^*\xi \\
(\xi, \eta \in \mathbb{C}^N,\ k = 0, 1, 2, \dots),
\end{gathered}
$$

т. е. выполнено условие (B). □

3. Рекуррентные соотношения

Если обозначить через $\{\epsilon_j\}_1^N$ стандартный базис в пространстве $\mathbb{C}^N$, то последовательность

$$\{P_i(z)\epsilon_j\} = \{P_0(z)\epsilon_1, \dots, P_0(z)\epsilon_N, P_1(z)\epsilon_1, \dots, P_1(z)\epsilon_N, \dots\}$$

образует ортонормированный базис в пространстве $\mathfrak{L}$. Поэтому каждый элемент $f \in \mathfrak{L}$ однозначно представляется в виде ряда Фурье

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(z)\varphi_k, \tag{3.1}$$

где коэффициенты Фурье $\varphi_k \in \mathbb{C}^N$ определяются из равенств

$$\epsilon_j^* \varphi_k = (f(z), P_k(z)\epsilon_j) \qquad (j = 1, \ldots, N).$$

Вектор вида (3.1) принадлежит пространству $\mathfrak{L}$ тогда и только тогда, когда выполнено условие

$$\|f\|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \|\varphi_k\|^2_{\mathbb{C}^N} < \infty.$$

Теорема 3.1. *Полиномы Лорана $\{P_k(z)\}_0^\infty$ и $\{Q_k(z)\}_0^\infty$ удовлетворяют системе рекуррентных соотношений (для $k = 0, 1, 2, \ldots$)*

$$\begin{aligned}
zP_{2k}(z) &= P_{2k-2}(z)C^*_{2k-2} + P_{2k-1}(z)B^*_{2k-1} \\
&\quad + P_{2k}(z)A_{2k} + P_{2k+1}(z)B_{2k} + P_{2k+2}(z)C_{2k}, \\
zQ_{2k}(z) &= Q_{2k-2}(z)C^*_{2k-2} + Q_{2k-1}(z)B^*_{2k-1} \\
&\quad + Q_{2k}(z)A_{2k} + Q_{2k+1}(z)B_{2k} + Q_{2k+2}(z)C_{2k}, \\
zP_{2k+1}(z) &= P_{2k}(z)B^*_{2k} + P_{2k+1}(z)A_{2k+1} + P_{2k+2}(z)B_{2k+1}, \\
zQ_{2k+1}(z) &= Q_{2k}(z)B^*_{2k} + Q_{2k+1}(z)A_{2k+1} + Q_{2k+2}(z)B_{2k+1}
\end{aligned} \tag{3.2}$$

с начальными условиями

$$P_{-2}(z) = 0, \quad P_0(z) = I, \quad Q_{-2}(z) = -I, \quad Q_0(z) = 0, \tag{3.3}$$

где коэффициенты $\{A_k\}_0^\infty$, $\{B_k\}_{-1}^\infty$, $\{C_k\}_{-2}^\infty$ — некоторые $N \times N$-матрицы.

Доказательство. Докажем сперва, что рекуррентные соотношения (3.2) выполнены для полиномов Лорана первого рода $P_k(z)$. Равенство $P_0(z) = S_0^{-\frac{1}{2}} = I$ выполнено в силу предложения 2.1. Далее, каждый вектор $zP_k(z)\xi$ разлагается в ряд Фурье

$$zP_k(z)\xi = \sum_{j=0}^{\infty} P_j(z)\Phi_k^{(j)}\xi \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots), \tag{3.4}$$

где коэффициенты $\Phi_k^{(j)}$ определяются из равенств

$$\eta^* \Phi_k^{(j)} \xi = (zP_k(z)\xi, P_j(z)\eta).$$

Ясно, что $\Phi_k^{(j)} = \left(\Phi_j^{(k)}\right)^*$. Кроме того, из равенств (2.2) и (2.3) следует, что

$$\begin{aligned} &\Phi_{2k}^{(j)} = 0 \qquad (j \notin \{2k-2, 2k-1, 2k, 2k+1, 2k+2\}), \\ &\Phi_{2k+1}^{(j)} = 0 \qquad (j \notin \{2k, 2k+1, 2k+2\}). \end{aligned}$$

Поэтому, если обозначить

$$A_k = \Phi_k^{(k)}, \quad B_k = \Phi_k^{(k+1)}, \quad C_k = \Phi_k^{(k+2)},$$

то из разложений (3.4) получатся в точности формулы (3.2) и (3.3) для полиномов Лорана $P_k(z)$.

Теперь покажем, что соотношения (3.2) выполнены и для полиномов $Q_k(z)$. Для этого нужно лишь доказать, что

$$\left(\frac{\zeta P_k(\zeta) - zP_k(z)}{\zeta - z}\xi, \eta\right)_\zeta = \begin{cases} \eta^*\xi & (k = 0), \\ \eta^* z Q_k(z)\xi & (k = 1, 2, 3, \dots) \end{cases}$$

(в этой формуле скалярное произведение берется относительно переменной ζ). Действительно, $\zeta P_k(\zeta) - zP_k(z) = (\zeta - z)P_k(\zeta) + z(P_k(\zeta) - P_k(z))$. Поэтому

$$\left(\frac{\zeta P_k(\zeta) - zP_k(z)}{\zeta - z}\xi, \eta\right)_\zeta = (P_k(\zeta)\xi, \eta)_\zeta + \eta^* z Q_k(z)\xi.$$

При $k = 0$ имеем $(P_0(\zeta)\xi, \eta)_\zeta = \eta^*\xi$ и $Q_0(z) = 0$, а при $k > 0$ имеем $(P_k(\zeta)\xi, \eta)_\zeta = 0$. □

Замечание 3.1. В работах [4,5,8] используются трехчленные рекуррентные соотношения вида

$$z^{(-1)^{k+1}} P_k(z) = P_{k-1}(z)\beta_{k-1} + P_k(z)\alpha_k + P_{k+1}(z)\beta_k \qquad (k = 0, 1, 2, \dots),$$

которые, однако, верны тогда и только тогда, когда все индексы $k = 0, 1, 2, \dots$ регулярны.

В пространстве $\mathfrak{L}$ на множестве полиномов Лорана определим оператор $\mathring{A}$ умножения на z

$$\mathring{A} f(z) = z f(z) \qquad \left(f(z) = \sum_{-m}^{m} f_k z^k,\ m = 0, 1, 2, \dots\right).$$

Замыкание этого оператора в пространстве $\mathfrak{L}$ обозначим A. Из теоремы 3.1 следует, что в базисе $\{P_i(z)\epsilon_j\}$ матрица оператора A принимает следующий блочно-матричный вид

$$\begin{pmatrix} A_0 & B_0^* & C_0^* & & & & & \cdots \\ B_0 & A_1 & B_1^* & & & & & \cdots \\ C_0 & B_1 & A_2 & B_2^* & C_2^* & & & \cdots \\ & & B_2 & A_3 & B_3^* & & & \cdots \\ & & C_2 & B_3 & A_4 & B_4^* & C_4^* & \cdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}. \tag{3.5}$$

Определение 3.1. *Матрица* (3.5) *называется* обобщенной матрицей Якоби*, соответствующей сильной матричной проблеме моментов* (1.1)*.*

Конечно, можно аналогичным образом разложить полиномы Лорана $z^{-1}P_k(z)$. В этом случае рекуррентные соотношения примут вид (для $k = 0, 1, 2, \ldots$)

$$\begin{aligned} z^{-1}P_{2k}(z) &= P_{2k-1}(z)\widetilde{B}_{2k-1}^* + P_{2k}(z)\widetilde{A}_{2k} + P_{2k+1}(z)\widetilde{B}_{2k}, \\ z^{-1}P_{2k+1}(z) &= P_{2k-1}(z)\widetilde{C}_{2k-1}^* + P_{2k}(z)\widetilde{B}_{2k}^* + P_{2k+1}(z)\widetilde{A}_{2k+1} \\ &\quad + P_{2k+2}(z)\widetilde{B}_{2k+1} + P_{2k+3}(z)\widetilde{C}_{2k+1}. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Матрица, составленная из коэффициентов этого разложения

$$\begin{pmatrix} \widetilde{A}_0 & \widetilde{B}_0^* & & & & & \cdots \\ \widetilde{B}_0 & \widetilde{A}_1 & \widetilde{B}_1^* & \widetilde{C}_1^* & & & \cdots \\ & \widetilde{B}_1 & \widetilde{A}_2 & \widetilde{B}_2^* & & & \cdots \\ & \widetilde{C}_1 & \widetilde{B}_2 & \widetilde{A}_3 & \widetilde{B}_3^* & \widetilde{C}_3^* & \cdots \\ & & & \widetilde{B}_3 & \widetilde{A}_4 & \widetilde{B}_4^* & \cdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}, \tag{3.7}$$

является обратной к матрице (3.5). Коэффициенты $\widetilde{B}_0$ и $\widetilde{C}_{2k+1}$ разложения (3.6) фигурируют в следующей теореме.

Предложение 3.1. *Коэффициенты* $\{A_k\}_0^\infty$, $\{B_k\}_{-1}^\infty$, $\{C_k\}_{-2}^\infty$ *рекуррентных соотношений* (3.2) *удовлетворяют следующим условиям* (*для* $k = 0, 1, 2, \ldots$)*:*

(*i*) $C_{-2} = I$, $B_{-1} = 0$, $C_{2k-1} = 0$;

(*ii*) *существуют и корректно определены матрицы*

$$C_{2k}^{-1}, \quad \widetilde{B}_0 = (B_0^* - A_0 C_0^{-1} B_1)^{-1},$$

$$\widetilde{C}_{2k+1} = -\left[\begin{pmatrix} B_{2k} & B_{2k+1}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{2k} & A_{2k+2} \\ 0 & C_{2k+2} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} B_{2k+2}^* \\ B_{2k+3} \end{pmatrix} \right]^{-1};$$

(*iii*) *верны неравенства*

$$C_{2k}C_{2k-2}\cdots C_0 > 0, \quad \widetilde{C}_{2k+1}\widetilde{C}_{2k-1}\cdots\widetilde{C}_1\widetilde{B}_0 > 0;$$

(*iv*) *матрицы A_k самосопряжены и верны тождества*

$$A_{2k+1} = B_{2k}C_{2k}^{-1}B_{2k+1}. \tag{3.8}$$

При этом старшие и младшие коэффициенты полиномов Лорана первого рода выражаются следующим образом:

$$\begin{aligned}
P_0^{(0)} &= I,\\
P_1^{(-1)} &= \widetilde{B}_0^{-1},\\
P_{2k+1}^{(-k-1)} &= P_{2k-1}^{(-k)}\widetilde{C}_{2k-1}^{-1} = \widetilde{B}_0^{-1}\widetilde{C}_1^{-1}\widetilde{C}_3^{-1}\cdots\widetilde{C}_{2k-1}^{-1},\\
P_{2k+1}^{(k)} &= P_{2k}^{(k)}C_{2k}^{-1}B_{2k+1} = C_0^{-1}C_2^{-1}\cdots C_{2k}^{-1}B_{2k+1},\\
P_{2k+2}^{(k+1)} &= P_{2k}^{(k)}C_{2k}^{-1} = C_0^{-1}C_2^{-1}\cdots C_{2k}^{-1},\\
P_{2k+2}^{(-k-1)} &= -P_{2k+1}^{(-k-1)}B_{2k}C_{2k}^{-1} = -\widetilde{B}_0^{-1}\widetilde{C}_1^{-1}\widetilde{C}_3^{-1}\cdots\widetilde{C}_{2k-1}^{-1}B_{2k}C_{2k}^{-1}.
\end{aligned}$$

Доказательство. Сравнивая коэффициенты при z^{k+1} и z^{-k-1} в тождестве

$$\begin{aligned}
zP_{2k}(z) = P_{2k-2}(z)C_{2k-2}^* + P_{2k-1}(z)B_{2k-1}^* + P_{2k}(z)A_{2k}&\\
+ P_{2k+1}(z)B_{2k} + P_{2k+2}(z)C_{2k},&
\end{aligned} \tag{3.9}$$

получим

$$P_{2k}^{(k)} = P_{2k+2}^{(k+1)}C_{2k}, \qquad 0 = P_{2k+1}^{(-k-1)}B_{2k} + P_{2k+2}^{(-k-1)}C_{2k}.$$

Следовательно, матрица C_{2k} невырождена. Сравнивая коэффициенты при z^{k+1} в равенстве

$$zP_{2k+1}(z) = P_{2k}(z)B_{2k}^* + P_{2k+1}(z)A_{2k+1} + P_{2k+2}(z)B_{2k+1}, \tag{3.10}$$

получим

$$P_{2k+1}^{(k)} = P_{2k+2}^{(k+1)}B_{2k+1}.$$

Умножая (3.9) на $C_{2k}^{-1}B_{2k+1}$ и вычитая из (3.10), получим

$$\begin{aligned}
zP_{2k+1}(z) - zP_{2k}(z)C_{2k}^{-1}B_{2k+1} = -P_{2k-2}(z)C_{2k-2}^*C_{2k}^{-1}B_{2k+1}&\\
- P_{2k-1}(z)B_{2k-1}^*C_{2k}^{-1}B_{2k+1} + P_{2k}(z)(B_{2k}^* - A_{2k}C_{2k}^{-1}B_{2k+1})&\\
+ P_{2k+1}(z)(A_{2k+1} - B_{2k}C_{2k}^{-1}B_{2k+1}).&
\end{aligned}$$

Сравнивая коэффициенты при z^{-k-1}, имеем

$$P_{2k+1}^{(-k-1)}(A_{2k+1} - B_{2k}C_{2k}^{-1}B_{2k+1}) = 0$$

и, следовательно,

$$A_{2k+1} = B_{2k}C_{2k}^{-1}B_{2k+1}.$$

Для коэффициента при z^{-k} получаем

$$P_{2k+1}^{(-k-1)} = -P_{2k-1}^{(-k)}B_{2k-1}^{*}C_{2k}^{-1}B_{2k+1} + P_{2k}^{(-k)}(B_{2k}^{*} - A_{2k}C_{2k}^{-1}B_{2k+1}).$$

При $k = 0$ имеем

$$P_{1}^{(-1)} = B_{0}^{*} - A_0C_0^{-1}B_1.$$

При $k > 0$, заменяя $P_{2k}^{(-k)} = -P_{2k-1}^{(-k)}B_{2k-2}C_{2k-2}^{-1}$, получаем

$$\begin{aligned} P_{2k+1}^{(-k-1)} &= P_{2k-1}^{(-k)}(B_{2k-2}C_{2k-2}^{-1}A_{2k}C_{2k}^{-1}B_{2k+1} \\ &\qquad - B_{2k-2}C_{2k-2}^{-1}B_{2k}^{*} - B_{2k-1}^{*}C_{2k}^{-1}B_{2k+1}) \\ &= P_{2k-1}^{(-k)}\left[-\begin{pmatrix} B_{2k-2} & B_{2k-1}^{*}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_{2k-2} & A_{2k} \\ 0 & C_{2k}\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} B_{2k}^{*} \\ B_{2k+1}\end{pmatrix}\right]. \end{aligned}$$

□

Следствие 3.1. *Индекс $n = 2k + 1$ является регулярным тогда и только тогда, когда матрица B_{2k+1} невырождена. Индекс $n = 2k + 2$ является регулярным тогда и только тогда, когда матрица B_{2k} невырождена.*

Предложение 3.2. *Пусть задана последовательность $N\times N$-матриц $\{A_k\}_0^{\infty}, \{B_k\}_{-1}^{\infty}, \{C_k\}_{-2}^{\infty}$ удовлетворяющих условиям (i)–(iv). Тогда существует и единственна положительно определенная и нормированная последовательность моментов $\{S_k\}_{-\infty}^{+\infty}$ такая, что соответствующие полиномы первого рода $\{P_k(z)\}_0^{\infty}$ удовлетворяют рекуррентным соотношениям* (3.2) *с заданными коэффициентами.*

Доказательство. Покажем сперва, что тождества (3.2) и начальные условия (3.3) однозначно определяют полиномы Лорана $P_k(z)$. В самом деле, рекуррентные соотношения для полиномов Лорана $P_k(z)$ можно переписать в виде

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} P_{2k+2}(z) & P_{2k+1}(z)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_{2k} & B_{2k+1} \\ B_{2k} & A_{2k+1} - z\end{pmatrix} \\ &= -\begin{pmatrix} P_{2k}(z)(A_{2k} - z) + P_{2k-1}(z)B_{2k-1}^{*} + P_{2k-2}(z)C_{2k-2}^{*} & P_{2k}(z)B_{2k}^{*}\end{pmatrix}, \end{aligned}$$

из которых по формуле Фробениуса получаем

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} P_{2k+2}(z) & P_{2k+1}(z) \end{pmatrix} \\
&= -\frac{1}{z}\begin{pmatrix} P_{2k}(z)(A_{2k}-z) + P_{2k-1}(z)B_{2k-1}^{*} + P_{2k-2}(z)C_{2k-2}^{*} & P_{2k}(z)B_{2k}^{*} \end{pmatrix} \\
&\qquad \times \begin{pmatrix} zC_{2k}^{-1} - C_{2k}^{-1}B_{2k+1}B_{2k}C_{2k}^{-1} & C_{2k}^{-1}B_{2k+1} \\ B_{2k}C_{2k}^{-1} & -I \end{pmatrix}. \qquad (3.11)
\end{aligned}$$

Кроме того, из последнего тождества следует, что

$$P_{2k+2}^{(k+1)} = P_{2k}^{(k)} C_{2k}^{-1} > 0,$$

$$\begin{aligned}
P_{2k+1}^{(-k-1)} &= P_{2k}^{(-k)}(B_{2k}^{*} - A_{2k}C_{2k}^{-1}B_{2k+1}) - P_{2k-1}^{(-k)}B_{2k-1}^{*}C_{2k}^{-1}B_{2k+1} \\
&= P_{2k-1}^{(-k)}\left[-\begin{pmatrix} B_{2k-2} & B_{2k-1}^{*} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_{2k-2} & A_{2k} \\ 0 & C_{2k} \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} B_{2k}^{*} \\ B_{2k+1} \end{pmatrix}\right] > 0.
\end{aligned}$$

Поэтому полиномы Лорана $P_k(z)$ определяются однозначно, а последовательность $\{P_k(z)\epsilon_j\}$ образует базис в линейном пространстве полиномов Лорана. В этом пространстве введем скалярное произведение $(\cdot,\cdot)$, так, чтобы последовательность $\{P_k(z)\epsilon_j\}$ была ортонормированным базисом. Легко проверить, что это скалярное произведение обладает свойством

$$(zf(z), g(z)) = (f(z), zg(z)) \qquad \left(f(z) = \sum_{i=-m}^{m} f_i z^i,\ g(z) = \sum_{j=-m}^{m} g_j z^j\right).$$

Определим моменты S_k по формуле

$$\epsilon_j^{*} S_k \epsilon_i = (\epsilon_i, z^k \epsilon_j) \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,\ i, j = 1, \ldots, N).$$

Последовательность $\{S_k\}_{-\infty}^{+\infty}$ положительно определена и выполнено равенство

$$(f(z), g(z)) = \sum_{i,j=-m}^{m} g_j^{*} S_{i+j} f_i \quad \left(f(z) = \sum_{i=-m}^{m} f_i z^i,\ g(z) = \sum_{j=-m}^{m} g_j z^j\right).$$

При этом полиномы Лорана $\{P_k(z)\}_0^{\infty}$ будут образовывать последовательность полиномов Лорана первого рода относительно $\{S_k\}_{-\infty}^{+\infty}$. □

Предложение 3.3. *Пусть последовательность векторов* $\{f_k\}_0^\infty \subset \mathbb{C}^N$ *удовлетворяет рекуррентным соотношениям (для* $k=0,1,2,\dots$*)*

$$\begin{aligned} \lambda f_{2k} &= C_{2k-2}f_{2k-2} + B_{2k-1}f_{2k-1} + A_{2k}f_{2k} + B^*_{2k}f_{2k+1} + C^*_{2k}f_{2k+2}, \\ \lambda f_{2k+1} &= B_{2k}f_{2k} + A_{2k+1}f_{2k+1} + B^*_{2k+1}f_{2k+2}, \end{aligned} \tag{3.12}$$

где $f_{-2} = f_{-1} = 0$. *Тогда верны равенства*

$$f_j = P_j(\overline{\lambda})^* f_0 \qquad (j = 0,1,2,\dots). \tag{3.13}$$

Доказательство. Тождество (3.13) очевидно выполнено при $j = 0$, а также при $j = -2$ и $j = -1$, если считать, что $f_{-2} = f_{-1} = 0$. Предположим теперь, что (3.13) выполнено при $j \in \{-2,-1,0,\dots,2k\}$, и покажем, что тогда (3.13) выполнено и при $j \in \{2k+1, 2k+2\}$. Перепишем рекуррентные соотношения (3.12) в матричной форме, подставляя при этом $f_j = P_j(\overline{\lambda})f_0$ для $j \in \{2k-2, 2k-1, 2k\}$

$$\begin{pmatrix} f_{2k+2} \\ f_{2k+1} \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} C_{2k} & B_{2k+1} \\ B_{2k} & A_{2k+1} - \overline{\lambda} \end{pmatrix}$$
$$= -f_0^* \big(P_{2k}(\overline{\lambda})(A_{2k} - \overline{\lambda}) + P_{2k-1}(\overline{\lambda})B^*_{2k-1} + P_{2k-2}(\overline{\lambda})C^*_{2k-2} \quad P_{2k}(\overline{\lambda})B^*_{2k} \big).$$

По формуле Фробениуса, с учетом (3.11), получаем

$$\begin{pmatrix} f_{2k+2} \\ f_{2k+1} \end{pmatrix}^* = -\overline{\lambda}^{-1}$$
$$\times f_0^* \big(P_{2k}(\overline{\lambda})(A_{2k} - \overline{\lambda}) + P_{2k-1}(\overline{\lambda})B^*_{2k-1} + P_{2k-2}(\overline{\lambda})C^*_{2k-2} \quad P_{2k}(\overline{\lambda})B^*_{2k} \big)$$
$$\times \begin{pmatrix} \overline{\lambda}C_{2k}^{-1} - C_{2k}^{-1}B_{2k+1}B_{2k}C_{2k}^{-1} & C_{2k}^{-1}B_{2k+1} \\ B_{2k}C_{2k}^{-1} & -I \end{pmatrix} = f_0^* \big(P_{2k+2}(\overline{\lambda}) \quad P_{2k+1}(\overline{\lambda}) \big).$$

□

4. Формулы Кристоффеля–Дарбу и матрица Неванлинны

Пусть $F. = \{F_k\}_0^\infty$, $G. = \{G_k\}_0^\infty$ — две последовательности $N\times N$-матриц. Введем обозначения

$$\left.\begin{aligned} \Delta_{2k}(F., G.) &= (F_{2k+1}B_{2k} + F_{2k+2}C_{2k})G^*_{2k} \\ &\qquad - F_{2k}(B^*_{2k}G^*_{2k+1} + C^*_{2k}G^*_{2k+2}), \\ \Delta_{2k+1}(F., G.) &= F_{2k+2}(C_{2k}G^*_{2k} + B_{2k+1}G^*_{2k+1}) \\ &\qquad - (F_{2k}C^*_{2k} + F_{2k+1}B^*_{2k+1})G^*_{2k+2} \end{aligned}\right. \quad (k = 0,1,2,\dots).$$

Положим

$$J = i\begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix},$$

$$V_{2k}(\lambda) = \begin{pmatrix} -Q_{2k}(\lambda) & -Q_{2k+1}(\lambda)B_{2k} - Q_{2k+2}(\lambda)C_{2k} \\ P_{2k}(\lambda) & P_{2k+1}(\lambda)B_{2k} + P_{2k+2}(\lambda)C_{2k} \end{pmatrix},$$

$$V_{2k+1}(\lambda) = \begin{pmatrix} -Q_{2k}(\lambda)C_{2k}^* - Q_{2k+1}(\lambda)B_{2k+1}^* & -Q_{2k+2}(\lambda) \\ P_{2k}(\lambda)C_{2k}^* + P_{2k+1}(\lambda)B_{2k+1}^* & P_{2k+2}(\lambda) \end{pmatrix}$$

$$(k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Легко проверяется тождество

$$V_m(\lambda)JV_m(\mu)^*J = \begin{pmatrix} \Delta_m(Q.(\lambda), P.(\mu)) & \Delta_m(Q.(\lambda), Q.(\mu)) \\ -\Delta_m(P.(\lambda), P.(\mu)) & -\Delta_m(P.(\lambda), Q.(\mu)) \end{pmatrix}$$

$$(m = 0, 1, 2, \ldots). \quad (4.1)$$

Предложение 4.1. *Если последовательности* $F. = \{F_k\}_0^\infty$, $G. = \{G_k\}_0^\infty$ *удовлетворяют соотношениям*

$$\lambda F_{2k} = F_{2k-2}C_{2k-2}^* + F_{2k-1}B_{2k-1}^* + F_{2k}A_{2k} + F_{2k+1}B_{2k} + F_{2k+2}C_{2k},$$

$$\mu G_{2k} = G_{2k-2}C_{2k-2}^* + G_{2k-1}B_{2k-1}^* + G_{2k}A_{2k} + G_{2k+1}B_{2k} + G_{2k+2}C_{2k},$$

$$\lambda F_{2k+1} = F_{2k}B_{2k}^* + F_{2k+1}A_{2k+1} + F_{2k+2}B_{2k+1},$$

$$\mu G_{2k+1} = G_{2k}B_{2k}^* + G_{2k+1}A_{2k+1} + G_{2k+2}B_{2k+1},$$

то справедливы тождества

$$(\lambda - \overline{\mu})F_{2k}G_{2k}^* = \Delta_{2k}(F., G.) - \Delta_{2k-1}(F., G.),$$

$$(\lambda - \overline{\mu})F_{2k+1}G_{2k+1}^* = \Delta_{2k+1}(F., G.) - \Delta_{2k}(F., G.).$$

Доказательство. Докажем второе тождество, первое доказывается аналогично.

$$\begin{aligned}(\lambda - \overline{\mu})F_{2k+1}G_{2k+1}^* &= (\lambda F_{2k+1})G_{2k+1}^* - F_{2k+1}(\mu G_{2k+1})^* \\ &= (F_{2k}B_{2k}^* + F_{2k+1}A_{2k+1} + F_{2k+2}B_{2k+1})G_{2k+1}^* \\ &\quad - F_{2k+1}(B_{2k}G_{2k}^* + A_{2k+1}G_{2k+1}^* + B_{2k+1}^*G_{2k+2}^*) \\ &= \left[F_{2k+2}B_{2k+1}G_{2k+1}^* - F_{2k+1}B_{2k+1}^*G_{2k+2}^*\right] \\ &\quad - \left[F_{2k+1}B_{2k}G_{2k}^* - F_{2k}B_{2k}^*G_{2k+1}^*\right]\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \big[F_{2k+2}(C_{2k}G_{2k}^* + B_{2k+1}G_{2k+1}^*) \\
&\quad - (F_{2k}C_{2k}^* + F_{2k+1}B_{2k+1}^*)G_{2k+2}^*\big] \\
&\quad - \big[(F_{2k+1}B_{2k} + F_{2k+2}C_{2k})G_{2k}^* \\
&\quad - F_{2k}(B_{2k}^*G_{2k+1}^* + C_{2k}^*G_{2k+2}^*)\big] \\
&= \Delta_{2k+1}(F., G.) - \Delta_{2k}(F., G.) \qquad \square
\end{aligned}
$$

Определение 4.1. *Матрицу-функцию*

$$
W_m(\lambda,\mu) = \begin{pmatrix} I + (\lambda-\overline{\mu})\sum_{j=0}^m Q_j(\lambda)P_j(\mu)^* & (\lambda-\overline{\mu})\sum_{j=0}^m Q_j(\lambda)Q_j(\mu)^* \\ -(\lambda-\overline{\mu})\sum_{j=0}^m P_j(\lambda)P_j(\mu)^* & I-(\lambda-\overline{\mu})\sum_{j=0}^m P_j(\lambda)Q_j(\mu)^* \end{pmatrix} \qquad (m=0,1,2,\dots)
$$

будем называть обобщенной матрицей Неванлинны.

Заметим, что в скалярном случае обобщенные матрицы Неванлинны изучались в работе [10].

Теорема 4.1. *Справедливы* формулы типа Кристоффеля–Дарбу

$$
W_m(\lambda,\mu) = V_m(\lambda)JV_m(\mu)^*J \qquad (m=0,1,2,\dots). \tag{4.2}
$$

Доказательство. Из теоремы 3.1 и предложения 4.1 следует, что

$$
\begin{aligned}
W_m(\lambda,\mu) &= \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta_m(Q.(\lambda),P.(\mu)) & \Delta_m(Q.(\lambda),Q.(\mu)) \\ -\Delta_m(P.(\lambda),P.(\mu)) & -\Delta_m(P.(\lambda),Q.(\mu)) \end{pmatrix} \\
&\quad - \begin{pmatrix} \Delta_{-1}(Q.(\lambda),P.(\mu)) & \Delta_{-1}(Q.(\lambda),Q.(\mu)) \\ -\Delta_{-1}(P.(\lambda),P.(\mu)) & -\Delta_{-1}(P.(\lambda),Q.(\mu)) \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Очевидная проверка показывает, что

$$
\begin{pmatrix} \Delta_{-1}(Q.(\lambda),P.(\mu)) & \Delta_{-1}(Q.(\lambda),Q.(\mu)) \\ -\Delta_{-1}(P.(\lambda),P.(\mu)) & -\Delta_{-1}(P.(\lambda),Q.(\mu)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}. \qquad \square
$$

Как следствие, получаем следующее утверждение.

Теорема 4.2. *Справедливы тождества типа Остроградского–Лиувилля*

$$
V_m(\lambda)^{-1} = JV_m(\overline{\lambda})^*J \qquad (m=0,1,2,\dots).
$$

Следующая теорема показывает, что матрица Неванлинны факторизуется на элементарные множители.

Теорема 4.3. *Справедливо представление*

$$W_m(\lambda, \overline{\lambda}_0) = \prod_{k=0}^{\widehat{m}} (I - \delta_k(\lambda, \lambda_0) S_k(\lambda_0)) \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots), \tag{4.3}$$

где

$$S_k(\lambda_0) = \begin{pmatrix} -Q_k(\lambda_0) \\ P_k(\lambda_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_k(\overline{\lambda}_0)^* & Q_k(\overline{\lambda}_0)^* \end{pmatrix},$$

$$\delta_k(\lambda, \lambda_0) = \begin{cases} \lambda - \lambda_0 & (k \text{ четно}), \\ -\lambda_0^2 \left(\dfrac{1}{\lambda} - \dfrac{1}{\lambda_0} \right) & (k \text{ нечетно}) \end{cases} \qquad (\lambda, \lambda_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}).$$

Доказательство. Пусть последовательность $N \times N$-матриц $\{U_k\}_{-2}^{\infty}$ удовлетворяет рекуррентным соотношениям (для $k = 0, 1, 2, \ldots$)

$$\lambda U_{2k} = U_{2k-2} C_{2k-2}^* + U_{2k-1} B_{2k-1}^* + U_{2k} A_{2k} + U_{2k+1} B_{2k} + U_{2k+2} C_{2k},$$

$$\lambda U_{2k+1} = U_{2k} B_{2k}^* + U_{2k+1} A_{2k+1} + U_{2k+2} B_{2k+1}.$$

В силу теоремы 4.2 существуют решения $\begin{pmatrix} \alpha_k & \beta_k \end{pmatrix}$ $(k = -1, 0, 1, \ldots)$ уравнений

$$\begin{pmatrix} U_{2k-2} C_{2k-2}^* + U_{2k-1} B_{2k-1}^* & U_{2k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{2k-1} & \beta_{2k-1} \end{pmatrix} V_{2k-1}(\lambda_0), \tag{4.4}$$

$$\begin{pmatrix} U_{2k} & U_{2k+1} B_{2k} + U_{2k+2} C_{2k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{2k} & \beta_{2k} \end{pmatrix} V_{2k}(\lambda_0), \tag{4.5}$$

причем эти решения равны соответственно

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \alpha_{2k-1} & \beta_{2k-1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} U_{2k-2} C_{2k-2}^* + U_{2k-1} B_{2k-1}^* & U_{2k} \end{pmatrix} J V_{2k-1}(\overline{\lambda}_0)^* J \\ &= \begin{pmatrix} -\Delta_{2k-1}(U_\cdot, P_\cdot(\overline{\lambda}_0)) & -\Delta_{2k-1}(U_\cdot, Q_\cdot(\overline{\lambda}_0)) \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{4.6}$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \alpha_{2k} & \beta_{2k} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} U_{2k} & U_{2k+1} B_{2k} + U_{2k+2} C_{2k} \end{pmatrix} J V_{2k}(\overline{\lambda}_0)^* J \\ &= \begin{pmatrix} -\Delta_{2k}(U_\cdot, P_\cdot(\overline{\lambda}_0)) & -\Delta_{2k}(U_\cdot, Q_\cdot(\overline{\lambda}_0)) \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Из уравнений (4.4) и (4.5), с помощью (3.8), получаем

$$\begin{aligned} \lambda U_{2k-1} &= U_{2k-2} B_{2k-2}^* + U_{2k-1} A_{2k-1} + U_{2k} B_{2k-1} = U_{2k-2} B_{2k-2}^* \\ &+ (U_{2k-1} B_{2k-2} + U_{2k} C_{2k-2}) C_{2k-2}^{-1} B_{2k-1} = (-\alpha_{2k-2} Q_{2k-2}(\lambda_0) \\ &+ \beta_{2k-2} P_{2k-2}(\lambda_0)) B_{2k-2}^* + (-\alpha_{2k-2}(Q_{2k-1}(\lambda_0) B_{2k-2} + Q_{2k}(\lambda_0) C_{2k-2}) \\ &+ \beta_{2k-2}(P_{2k-1}(\lambda_0) B_{2k-2} + P_{2k}(\lambda_0) C_{2k-2})) C_{2k-2}^{-1} B_{2k-1} \end{aligned}$$

$$= -\alpha_{2k-2}(Q_{2k-2}(\lambda_0)B^*_{2k-2} + Q_{2k-1}(\lambda_0)A_{2k-1} + Q_{2k}(\lambda_0)B_{2k-1})$$

$$+ \beta_{2k-2}(P_{2k-2}(\lambda_0)B^*_{2k-2} + P_{2k-1}(\lambda_0)A_{2k-1} + P_{2k}(\lambda_0)B_{2k-1})$$

$$= \lambda_0(-\alpha_{2k-2}Q_{2k-1}(\lambda_0) + \beta_{2k-2}P_{2k-1}(\lambda_0)), \quad (4.8)$$

$$U_{2k} = -\alpha_{2k-1}Q_{2k}(\lambda_0) + \beta_{2k-1}P_{2k}(\lambda_0). \quad (4.9)$$

С помощью предложения 4.1 и тождеств (4.8), (4.9), из формул (4.6), (4.7) получим рекуррентные формулы для $\begin{pmatrix}\alpha_k & \beta_k\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}\alpha_{2k-1} & \beta_{2k-1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\Delta_{2k-1}(U_., P_.(\overline{\lambda}_0)) & -\Delta_{2k-1}(U_., Q_.(\overline{\lambda}_0))\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}-\Delta_{2k-2}(U_., P_.(\overline{\lambda}_0)) - (\lambda-\lambda_0)U_{2k-1}P_{2k-1}(\overline{\lambda}_0)^* \\ -\Delta_{2k-2}(U_., Q_.(\overline{\lambda}_0)) - (\lambda-\lambda_0)U_{2k-1}Q_{2k-1}(\overline{\lambda}_0)^*\end{pmatrix}^T$$

$$= \begin{pmatrix}\alpha_{2k-2} - (\lambda-\lambda_0)\frac{\lambda_0}{\lambda}(-\alpha_{2k-2}Q_{2k-1}(\lambda_0) + \beta_{2k-2}P_{2k-1}(\lambda_0))P_{2k-1}(\overline{\lambda}_0)^* \\ \beta_{2k-2} - (\lambda-\lambda_0)\frac{\lambda_0}{\lambda}(-\alpha_{2k-2}Q_{2k-1}(\lambda_0) + \beta_{2k-2}P_{2k-1}(\lambda_0))Q_{2k-1}(\overline{\lambda}_0)^*\end{pmatrix}^T$$

$$= \begin{pmatrix}\alpha_{2k-2} & \beta_{2k-2}\end{pmatrix}\left(I - \left(\lambda_0 - \frac{\lambda_0^2}{\lambda}\right)\begin{pmatrix}-Q_{2k-1}(\lambda_0) \\ P_{2k-1}(\lambda_0)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}P_{2k-1}(\overline{\lambda}_0)^* \\ Q_{2k-1}(\overline{\lambda}_0)^*\end{pmatrix}^T\right), \quad (4.10)$$

$$\begin{pmatrix}\alpha_{2k} & \beta_{2k}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\Delta_{2k}(U_., P_.(\overline{\lambda}_0)) & -\Delta_{2k}(U_., Q_.(\overline{\lambda}_0))\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}-\Delta_{2k-1}(U_., P_.(\overline{\lambda}_0)) - (\lambda-\lambda_0)U_{2k}P_{2k}(\overline{\lambda}_0)^* \\ -\Delta_{2k-1}(U_., Q_.(\overline{\lambda}_0)) - (\lambda-\lambda_0)U_{2k}Q_{2k}(\overline{\lambda}_0)^*\end{pmatrix}^T$$

$$= \begin{pmatrix}\alpha_{2k-1} - (\lambda-\lambda_0)(-\alpha_{2k-1}Q_{2k}(\lambda_0) + \beta_{2k-1}P_{2k}(\lambda_0))P_{2k}(\overline{\lambda}_0)^* \\ \beta_{2k-1} - (\lambda-\lambda_0)(-\alpha_{2k-1}Q_{2k}(\lambda_0) + \beta_{2k-1}P_{2k}(\lambda_0))Q_{2k}(\overline{\lambda}_0)^*\end{pmatrix}^T$$

$$= \begin{pmatrix}\alpha_{2k-1} & \beta_{2k-1}\end{pmatrix}\left(I - (\lambda-\lambda_0)\begin{pmatrix}-Q_{2k}(\lambda_0) \\ P_{2k}(\lambda_0)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}P_{2k}(\overline{\lambda}_0)^* & Q_{2k}(\overline{\lambda}_0)^*\end{pmatrix}\right). \quad (4.11)$$

Применяя последовательно рекуррентные формулы (4.10), (4.11), получим

$$\begin{pmatrix}\alpha_m & \beta_m\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha_{-1} & \beta_{-1}\end{pmatrix}\prod_{k=0}^{\overset{\frown}{m}}\left(I - \delta_k(\lambda,\lambda_0)S_k(\lambda_0)\right). \quad (4.12)$$

Теперь подставим вместо произвольной последовательности $U_. = \{U_k\}_{-2}^{\infty}$ две последовательности матриц $-Q_.(\lambda) = \{-Q_k(\lambda)\}_{-2}^{\infty}$ и $P_.(\lambda) = \{P_k(\lambda)\}_{-2}^{\infty}$. Соответствующие решения уравнений (4.4) и (4.5) обозначим через $\begin{pmatrix}\alpha_k^{(1)} & \beta_k^{(1)}\end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix}\alpha_k^{(2)} & \beta_k^{(2)}\end{pmatrix}$. Из формул (4.6) и (4.7) получаем равенства

$$
\begin{aligned}
&\begin{pmatrix}\alpha_m^{(1)} & \beta_m^{(1)}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\Delta_m(Q_\cdot(\lambda), P_\cdot(\overline{\lambda}_0)) & \Delta_m(Q_\cdot(\lambda), Q_\cdot(\overline{\lambda}_0))\end{pmatrix}, \\
&\begin{pmatrix}\alpha_m^{(2)} & \beta_m^{(2)}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\Delta_m(P_\cdot(\lambda), P_\cdot(\overline{\lambda}_0)) & -\Delta_m(P_\cdot(\lambda), Q_\cdot(\overline{\lambda}_0))\end{pmatrix}, \\
&\begin{pmatrix}\alpha_{-1}^{(1)} & \beta_{-1}^{(1)}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}I & 0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}\alpha_{-1}^{(2)} & \beta_{-1}^{(2)}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & I\end{pmatrix}.
\end{aligned}
\tag{4.13}
$$

Сравнивая (4.1), (4.2), (4.12) и (4.13) получаем формулу (4.3). □

Следующее следствие получается из формул (4.8), (4.9), (4.12) и (4.13).

Следствие 4.1. *Справедливы тождества*

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix}-Q_{2k}(\lambda)\\ P_{2k}(\lambda)\end{pmatrix} &= W_{2k-1}(\lambda, \overline{\lambda}_0)\begin{pmatrix}-Q_{2k}(\lambda_0)\\ P_{2k}(\lambda_0)\end{pmatrix}, \\
\begin{pmatrix}-Q_{2k+1}(\lambda)\\ P_{2k+1}(\lambda)\end{pmatrix} &= \frac{\lambda_0}{\lambda}W_{2k}(\lambda, \overline{\lambda}_0)\begin{pmatrix}-Q_{2k+1}(\lambda_0)\\ P_{2k+1}(\lambda_0)\end{pmatrix}
\end{aligned}
\qquad (k = 0, 1, 2, \ldots).
\tag{4.14}
$$

5. Предельная матрица Неванлинны

Теорема 5.1. *Пусть дана положительная и нормированная последовательность моментов* $\{S_k\}_{-\infty}^{+\infty}$. *Тогда проблема моментов* (1.1) *разрешима, т. е. существует самосопряженная неубывающая* $N\times N$*-матрица-функция* $\Sigma(t)$ *такая, что все тождества* (1.1) *верны.*

Доказательство. Рассмотрим оператор A умножения на z в пространстве $\mathfrak{L}$, который мы ввели в разделе 3. A — симметрический оператор, поэтому A имеет некоторое самосопряженное расширение $\widetilde{A}$, возможно, в большем пространстве $\widetilde{\mathfrak{L}} \supset \mathfrak{L}$. Пусть $E(t)$ — спектральная мера $\widetilde{A}$, т. е.

$$
\widetilde{A}f = \int_{-\infty}^{+\infty} t\, dE(t) f \qquad (f \in \operatorname{dom} \widetilde{A}).
$$

Рассмотрим функцию $\Sigma(t) = P_{\mathfrak{L}_0} E(t)|_{\mathfrak{L}_0}$, где

$$
\mathfrak{L}_0 = \left\{ f(z) \equiv f_0 \in \mathbb{C}^N \right\} \subset \mathfrak{L},
$$

а $P_{\mathfrak{L}_0}$ — ортогональный проектор на подпространство $\mathfrak{L}_0$. Подпространство $\mathfrak{L}_0$ естественным образом отождествляется с пространством $\mathbb{C}^N$, поэтому можно считать, что $\Sigma(t)$ является $N\times N$-матрицей-функцией на вещественной оси.

Покажем, что $\Sigma(t)$ является решением проблемы моментов (1.1). Так как $\widetilde{A}$ — расширение A, то

$$t^k\varphi = A^k\varphi = \widetilde{A}^k\varphi \qquad (\varphi \in \mathbb{C}^N,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Поэтому

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} t^{i+j}\, d(E(t)\varphi, \psi) = (\widetilde{A}^i\varphi, \widetilde{A}^j\psi) = (A^i\varphi, A^j\psi) = \psi^* S_{i+j}\varphi$$
$$(\varphi, \psi \in \mathbb{C}^N,\ i, j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Значит для $\Sigma(t)$ выполнены тождества (1.1). $\square$

Замечание 5.1. В скалярном случае эта теорема получена в [2] и [5].

Решение $\Sigma(t)$ проблемы моментов (1.1) определяет гильбертово пространство $L^2(d\Sigma)$, элементами которого являются Σ-измеримые вектор-функции $f(t)$ такие, что

$$\|f\|^2_{L^2(d\Sigma)} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)^* d\Sigma(t) f(t) < \infty.$$

Пространство $\mathfrak{L}$ естественным образом вкладывается в $L^2(d\Sigma)$, поэтому векторы $\{P_k(t)\epsilon_i\}_0^\infty$ образуют ортонормированную систему в $L^2(d\Sigma)$.

Предложение 5.1. *Пусть* $\Sigma(t)$ *— решение проблемы моментов* (1.1) *и*

$$Z_\lambda = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t-\lambda}\, d\Sigma(t) \qquad (\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}).$$

Тогда верно неравенство

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left\| Q_k(\overline{\lambda})^* + P_k(\overline{\lambda})^* Z_\lambda \right\|^2_{\mathbb{C}^N} \leqslant N \frac{\|\operatorname{Im} Z_\lambda\|_{\mathbb{C}^N}}{|\operatorname{Im}\lambda|} \qquad (\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}). \quad (5.1)$$

Доказательство. Пусть $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, тогда вектор-функция $\frac{\epsilon_j}{t-\lambda}$ принадлежит пространству $L^2(d\Sigma)$. Найдем коэффициенты разложения этой функции по ортонормированной системе $\{P_k(t)\epsilon_i\}$

$$\left(\frac{\epsilon_j}{t-\lambda}, P_k(t)\epsilon_i\right)_{L^2(d\Sigma)} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\epsilon_i^* P_k(t)^* d\Sigma(t)\epsilon_j}{t-\lambda}$$

$$= \epsilon_i^* \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_k(t)^* - P_k(\overline{\lambda})^*}{t-\lambda}\, d\Sigma(t)\epsilon_j + \epsilon_i^* P_k(\overline{\lambda})^* \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\Sigma(t)}{t-\lambda}\epsilon_j$$
$$= \epsilon_i^* \left(Q_k(\overline{\lambda})^* + P_k(\overline{\lambda})^* Z_\lambda\right) \epsilon_j.$$

По неравенству Бесселя получаем

$$\sum_{i,k} \left|\epsilon_i^* \left(Q_k(\overline{\lambda})^* + P_k(\overline{\lambda})^* Z_\lambda\right) \epsilon_j\right|^2 \leqslant \left\|\frac{\epsilon_j}{t-\lambda}\right\|^2_{L^2(d\Sigma)}. \qquad (5.2)$$

С другой стороны,

$$\left\|\frac{\epsilon_j}{t-\lambda}\right\|^2_{L^2(d\Sigma)} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \epsilon_j^* \frac{d\Sigma(t)}{|t-\lambda|^2}\,\epsilon_j$$
$$= \epsilon_j^* \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{t-\lambda} - \frac{1}{t-\overline{\lambda}}\right) \frac{d\Sigma(t)}{\lambda - \overline{\lambda}}\,\epsilon_j = \epsilon_j^* \frac{\operatorname{Im} Z_\lambda}{\operatorname{Im}\lambda}\,\epsilon_j. \qquad (5.3)$$

Сравнивая (5.2) и (5.3), получаем

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left\|Q_k(\overline{\lambda})^* + P_k(\overline{\lambda})^* Z_\lambda\right\|^2_{\mathbb{C}^N} \leqslant \sum_{i,j=1}^{N} \sum_{k=0}^{\infty} \left|\epsilon_j^* \left(Q_k(\overline{\lambda})^* + P_k(\overline{\lambda})^* Z_\lambda\right) \epsilon_i\right|^2$$
$$\leqslant \sum_{j=1}^{N} \left\|\frac{\epsilon_j}{t-\lambda}\right\|^2_{L^2(d\Sigma)} = \sum_{j=1}^{N} \epsilon_j^* \frac{\operatorname{Im} Z_\lambda}{\operatorname{Im}\lambda}\epsilon_j \leqslant N \frac{\|\operatorname{Im} Z_\lambda\|_{\mathbb{C}^N}}{|\operatorname{Im}\lambda|} \qquad (\lambda \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}).$$

□

Следствие 5.1. *При любом $\lambda \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ ряды*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|P_k(\lambda)\|^2_{\mathbb{C}^N}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \|Q_k(\lambda)\|^2_{\mathbb{C}^N}$$

сходятся или расходятся одновременно.

Доказательство. Это прямое следствие неравенства (5.1), нужно лишь заметить, что матрица Z_λ невырождена при всех $\lambda \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$, поскольку матрица $\operatorname{Im}\lambda \cdot \operatorname{Im} Z_\lambda$ строго положительна при $\lambda \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$. □

Предложение 5.2. *Оператор A имеет индексы дефекта (N, N) тогда и только тогда, когда хотя бы при одном $\lambda_+ \in \mathbb{C}_+$ и при одном $\lambda_- \in \mathbb{C}_-$ сходится ряд*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|P_k(\lambda_\pm)\|^2_{\mathbb{C}^N}. \qquad (5.4)$$

В этом случае ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|P_k(\lambda)\|^2_{\mathbb{C}^N} \tag{5.5}$$

сходится при всех $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$*, а дефектное подространство* $\mathfrak{N}_\lambda = \mathfrak{L} \ominus \operatorname{ran}(A - \overline{\lambda})$ *оператора* A *имеет вид*

$$\mathfrak{N}_\lambda = \left\{ f_\lambda(z) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(z) P_k(\overline{\lambda})^* \varphi : \varphi \in \mathbb{C}^N \right\} \qquad (\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}).$$

Доказательство. Оператор A — симметрический оператор, а значит $A \subset A^*$. Найдем область определения сопряженного оператора A^*. Вектор $f \in \mathfrak{L}$ принадлежит $\operatorname{dom} A^*$ тогда и только тогда, когда найдется вектор $g \in \mathfrak{L}$ такой, что

$$(f(z), AP_k(z)\epsilon_j) = (g(z), P_k(z)\epsilon_j) \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots,\ j = 1, \ldots, N). \tag{5.6}$$

В этом случае $f \in \operatorname{dom} A^*$ и $g = A^* f$. Пусть векторы $f(z)$ и $g(z)$ имеют вид

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(z) f_k, \quad g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(z) g_k.$$

Тогда равенства (5.6) можно переписать в виде

$$g_k = C_{k-2} f_{k-2} + B_{k-1} f_{k-1} + A_k f_k + B_k^* f_{k+1} + C_k^* f_{k+2}$$
$$(k = 0, 1, 2, \ldots,\ f_{-2} = f_{-1} = 0).$$

При этом вектор g принадлежит $\mathfrak{L}$ тогда и только тогда, когда

$$\|g\|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \|C_{k-2} f_{k-2} + B_{k-1} f_{k-1} + A_k f_k + B_k^* f_{k+1} + C_k^* f_{k+2}\|^2_{\mathbb{C}^N} < \infty. \tag{5.7}$$

Значит, для того, чтобы вектор $f \in \mathfrak{L}$ принадлежал $\operatorname{dom} A^*$, необходимо и достаточно, чтобы было выполнено условие (5.7).

Найдем теперь дефектное подпространство оператора A

$$\mathfrak{N}_\lambda = \mathfrak{L} \ominus \operatorname{ran}(A - \overline{\lambda}) = \ker(A^* - \lambda).$$

Если вектор $f \in \mathfrak{L}$ вида

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(z) f_k$$

принадлежит $\ker(A^*-\lambda)$, то коэффициенты f_k удовлетворяют тождествам

$$\lambda f_k = C_{k-2}f_{k-2} + B_{k-1}f_{k-1} + A_k f_k + B_k^* f_{k+1} + C_k^* f_{k+2}$$
$$(k = 0, 1, 2, \dots,\ f_{-2} = f_{-1} = 0).$$

По предложению 3.3 это означает, что вектор f имеет вид

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(z) P_k(\overline{\lambda})^* f_0. \tag{5.8}$$

Обратно, каждый вектор вида (5.8), для которого выполнено условие

$$\|f\|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \left\|P_k(\overline{\lambda})^* f_0\right\|_{\mathbb{C}^N}^2 < \infty, \tag{5.9}$$

принадлежит $\mathfrak{N}_\lambda = \ker(A^* - \lambda)$. Следовательно, размерность дефектного подпространства оператора A не превышает N, причем $\dim \mathfrak{N}_\lambda = N$ тогда и только тогда, когда (5.9) выполнено при всех $f_0 \in \mathbb{C}^N$, т. е. выполнено условие (5.5). Поскольку размерность $\mathfrak{N}_\lambda$ постоянна в верхней и в нижней полуплоскости, достаточно чтобы было выполнено условие (5.4). □

Замечание 5.2. Если все матрицы $\{S_k\}_{-\infty}^{+\infty}$ вещественны (в частности, в скалярном случае), то оператор A является вещественным, а значит имеет равные индексы дефекта. В этом случае, если хотя бы в одной точке $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ выполнено неравенство (5.5), то оператор A имеет индексы дефекта (N, N).

Подытожим полученные результаты в следующей теореме.

Теорема 5.2. *Следующие условия эквивалентны:*

1) *оператор A имеет индексы дефекта (N, N);*

2) *найдутся две точки $\lambda_+ \in \mathbb{C}_+$ и $\lambda_- \in \mathbb{C}_-$ такие, что*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|P_k(\lambda_\pm)\|_{\mathbb{C}^N}^2 < \infty;$$

3) *найдутся две точки $\lambda_+ \in \mathbb{C}_+$ и $\lambda_- \in \mathbb{C}_-$ такие, что*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|Q_k(\lambda_\pm)\|_{\mathbb{C}^N}^2 < \infty;$$

4) *при всех* $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|P_k(\lambda)\|^2_{\mathbb{C}^N} < \infty, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \|Q_k(\lambda)\|^2_{\mathbb{C}^N} < \infty. \tag{5.10}$$

Доказательство. Эквивалентность условий 1), 2), 3) и условия 4) при $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ следует из следствия 5.1 и предложения 5.2. Осталось лишь показать, что из сходимости рядов (5.10) при $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ следует их сходимость при $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Для этого воспользуемся факторизацией (4.3) и тождествами (4.14). Зафиксируем $\lambda_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, тогда, в силу сходимости рядов (5.10) при $\lambda = \lambda_0$ и $\lambda = \overline{\lambda}_0$ сходится ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|S_k(\lambda_0)\|_{\mathbb{C}^{2N}} < \infty.$$

Положим

$$M(\lambda, \lambda_0) = \max_{k \in \{0,1\}} |\delta_k(\lambda, \lambda_0)|. \tag{5.11}$$

Тогда

$$\begin{aligned}\left\|W_m(\lambda, \overline{\lambda}_0)\right\|_{\mathbb{C}^{2N}} &\leqslant \prod_{k=0}^{m} \left(1 + M(\lambda, \lambda_0) \|S_k(\lambda_0)\|_{\mathbb{C}^{2N}}\right) \\ &\leqslant \exp\left(M(\lambda, \lambda_0) \sum_{k=0}^{\infty} \|S_k(\lambda_0)\|_{\mathbb{C}^{2N}}\right) < \infty.\end{aligned}$$

Поскольку $M(\lambda, \lambda_0)$ равномерно ограничена на любом компактном множестве K в $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, то

$$\sup_{\substack{\lambda \in K \\ m=0,1,2,\dots}} \left\|W_m(\lambda, \overline{\lambda}_0)\right\|_{\mathbb{C}^{2N}} < \infty. \tag{5.12}$$

Из (5.12) и тождеств (4.14) следует, что ряды (5.10) сходятся равномерно на компактных подмножествах в $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. □

Определение 5.1. *Если выполнены условия теоремы* 5.2, *то сильная матричная проблема моментов Гамбургера* (1.1) *называется* вполне неопределенной*.*

Теорема 5.3. *Пусть оператор* A *имеет индексы дефекта* (N, N)*. Тогда существует предельная матрица Неванлинны*

$$W_\infty(\lambda, \mu) = \lim_{m \to \infty} W_m(\lambda, \mu) \qquad (\lambda, \mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}).$$

Матрица-функция $W_\infty(\cdot,\mu)$ аналитична в $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ и имеет минимальный экспоненциальный тип в своих особых точках, т. е.

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{\lambda\to\infty}\frac{\log\|W_\infty(\lambda,\mu)\|_{\mathbb{C}^{2N}}}{|\lambda|}=0,\\ &\lim_{\lambda\to 0}|\lambda|\log\|W_\infty(\lambda,\mu)\|_{\mathbb{C}^{2N}}=0\end{aligned}\right.\qquad (\mu\in\mathbb{C}\setminus\{0\}).$$

Доказательство. Отметим, что для произвольной последовательности квадратных матриц $\{X_k\}_0^m$ верны неравенства

$$\Big\|\prod_{k=0}^m(1+X_k)\Big\|_{\mathbb{C}^n}\leqslant\prod_{k=0}^m(1+\|X_k\|_{\mathbb{C}^n})\leqslant\exp\Big(\sum_{k=0}^m\|X_k\|_{\mathbb{C}^n}\Big),$$

$$\Big\|\prod_{k=0}^m(1+X_k)-1\Big\|_{\mathbb{C}^n}\leqslant\prod_{k=0}^m(1+\|X_k\|_{\mathbb{C}^n})-1\leqslant\exp\Big(\sum_{k=0}^m\|X_k\|_{\mathbb{C}^n}\Big)-1.$$

Зафиксируем $\lambda_0\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$. Из теоремы 5.2 следует, что сходится ряд

$$\sum_{k=0}^\infty\|S_k(\lambda_0)\|_{\mathbb{C}^{2N}}<\infty.$$

Пусть $M(\lambda,\lambda_0)$ определена равенством (5.11). Тогда

$$\begin{aligned}&\big\|W_{m+j}(\lambda,\overline{\lambda}_0)-W_m(\lambda,\overline{\lambda}_0)\big\|_{\mathbb{C}^{2N}}\\ &\quad\leqslant\Big(\exp\Big(M(\lambda,\lambda_0)\sum_{k=m+1}^{m+j}\|S_k(\lambda_0)\|_{\mathbb{C}^{2N}}\Big)-1\Big)\big\|W_m(\lambda,\overline{\lambda}_0)\big\|_{\mathbb{C}^{2N}}\\ &\qquad\leqslant\Big(\exp\Big(M(\lambda,\lambda_0)\sum_{k=m+1}^{\infty}\|S_k(\lambda_0)\|_{\mathbb{C}^{2N}}\Big)-1\Big)\\ &\qquad\qquad\times\exp\Big(M(\lambda,\lambda_0)\sum_{k=0}^{\infty}\|S_k(\lambda_0)\|_{\mathbb{C}^{2N}}\Big).\end{aligned}$$

Следовательно, $W_m(\lambda,\overline{\lambda}_0)$ сходится равномерно на компактных множествах в $\mathbb{C}\setminus\{0\}$. Поэтому функция $W_\infty(\lambda,\overline{\lambda}_0)$ определена и является аналитической при $\lambda\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$.

Далее, при достаточно больших λ,

$$\begin{aligned}&\big\|W_\infty(\lambda,\overline{\lambda}_0)\big\|_{\mathbb{C}^{2N}}\\ &\quad\leqslant\prod_{k=0}^m(1+|\lambda-\lambda_0|\,\|S_k(\lambda_0)\|_{\mathbb{C}^{2N}})\exp\Big(|\lambda-\lambda_0|\sum_{k=m+1}^\infty\|S_k(\lambda_0)\|_{\mathbb{C}^{2N}}\Big).\end{aligned}$$

Для любого $\epsilon > 0$ можно выбрать m так, чтобы

$$\sum_{k=m+1}^{\infty} \|S_k(\lambda_0)\|_{\mathbb{C}^{2N}} < \epsilon.$$

Тогда

$$\left\|W_\infty(\lambda, \overline{\lambda}_0)\right\|_{\mathbb{C}^{2N}} \leqslant C_\epsilon(\lambda - \lambda_0) \exp\left(\epsilon\, |\lambda - \lambda_0|\right),$$

где функция $C_\epsilon(\lambda)$ имеет полиномиальный рост при $\lambda \to \infty$. Значит $W_\infty(\lambda, \overline{\lambda}_0)$ имеет минимальный экспоненциальный тип при $\lambda \to \infty$. Аналогичным образом доказывается, что $W_\infty(\lambda, \overline{\lambda}_0)$ имеет минимальный экспоненциальный тип и при $\lambda \to 0$. □

Следствие 5.2. *Если оператор A имеет индексы дефекта (N, N), то справедлива формула*

$$W_\infty(\lambda, \overline{\lambda}_0) = \prod_{k=0}^{\overset{\frown}{\infty}} \left(I - \delta_k(\lambda, \lambda_0) S_k(\lambda_0)\right) \qquad (\lambda, \lambda_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}).$$

Литература

[1] Н. И. Ахиезер, *Классическая проблема моментов и некоторые вопросы анализа, связанные с нею*, ГИФМЛ, Москва, 1961.

[2] Ю. М. Березанский, *Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов*, Наукова думка, Киев, 1965.

[3] W. B. Jones, W. J. Thron, H. Waadeland, *A strong Stieltjes moment problem* // Trans. Amer. Math. Soc. **261** (1980), 503–528.

[4] W. B. Jones, O. Njåstad, W. J. Thron, *Continued fractions and strong Hamburger moment problems* // Proc. London Math. Soc. (3) **47** (1983), N 2, 363–384.

[5] W. B. Jones, W. J. Thron, O. Njåstad, *Orthogonal Laurent polynomials and the strong Hamburger moment problem* // J. Math. Anal. Appl. **98** (1984), N 2, 528–554.

[6] W. B. Jones, O. Njåstad, *Orthogonal Laurent polynomials and strong moment problem: a survey* // J. of Computational and Applied Math. **105** (1999), 51–91.

[7] I. S. Kats, A. A. Nudelman, *Strong Stieltjes moment problem* // St. Peterburg Math. J. **8** (1997), N 6, 931–950.

[8] O. Njåstad, *Solutions of the strong Hamburger moment problem* // J. of Math. Analysis and Appl. **197** (1996), 227–248.

[9] K. K. Simonov, *Strong Hamburger moment problem* // Уч. записки Таврического нац. ун. **15** (2002), N 1, 36–38.

[10] К. К. Симонов, *О функциях класса Картрайт с конечным числом особенностей* // Труды ИПММ НАН Украины **8** (2003), 120–127.

Сведения об авторах

Кирилл Симонов

Донецкий национальный университет
ул. Университетская 24,
83055, Донецк,
Украина
E-Mail: `xi@resolvent.net`, `xi@gamma.dn.ua`