Український математичний вісник
Том 3 **(2006)**, № 2, 260 – 267

Група ізометрій простору Марчевського–Штейнгауза

Богдана В. Олійник

(*Представлена І. В. Протасовим*)

Анотація. Охарактеризовано групу ізометрій простору Марчевського–Штейнгауза і описано деякі властивості простору міри.

2000 MSC. 28D15.

Ключові слова та фрази. Метричний простір, скінченно-адитивна міра, група ізометрій, автоморфізм вимірного простору.

Нехай M — непорожня множина, $\mathcal{M}$ — алгебра ([1, стор. 8]), задана на цій множині, μ — скінченно адитивна міра на $\mathcal{M}$. Визначимо множину $\mathcal{M}_\mu$ рівністю

$$\mathcal{M}_\mu = \{M \in \mathcal{M} \mid \mu(M) < \infty\}.$$

Якщо μ — ймовірносна міра, то $\mathcal{M} = \mathcal{M}_\mu$. Задамо на множині $\mathcal{M}_\mu$ функцію відстані $dm_\mu : \mathcal{M}_\mu \times \mathcal{M}_\mu \longrightarrow \mathbb{R}^+$, поклавши

$$dm_\mu(U,V) = \mu(U \triangle V), \qquad U,V \in \mathcal{M}_\mu, \tag{1}$$

де $\triangle$ — знак симетричної різниці множин. Ця функція є напівметрикою на множині $\mathcal{M}_\mu$, а простір $(\mathcal{M}_\mu, dm_\mu)$ називається напівметричним простором міри. Напівметрику dm_μ ще називають відстанню Фреше–Никодима–Арошаяна [2]. На множині $\mathcal{M}_\mu$ можна також визначити іншу, споріднену напівметрику

$$d_\mu(U,V) = \begin{cases} 1, & \text{якщо} \quad \mu(U) = \mu(V) = 0, \\ \frac{\mu(U\triangle V)}{\mu(U\cup V)}, & \text{в іншому випадку.} \end{cases} \tag{2}$$

Стаття надійшла в редакцію 26.01.2005

ISSN 1810 – 3200.

Її було визначено в роботі польських математиків Марчевського і Штейнгауза [3], і тому вона називається напівметрикою Марчевського–Штейнгауза.

Якщо міра μ така, що $\mu(A) \neq 0$, для всіх $A \in \mathcal{M}_\mu \backslash \{\emptyset\}$, то функції d_μ і dm_μ будуть метриками на множині $\mathcal{M}_\mu$. Очевидно, що діаметр простору Марчевського–Штейнгауза дорівнює 1.

Твердження 1. *Нехай $|\mathcal{M}_\mu| > 2$. Множина $A \in \mathcal{M}_\mu$ має міру 0 тоді і тільки тоді, коли відстань від неї до будь-якої іншої множини $B \in \mathcal{M}_\mu$ в просторі Марчевського–Штейнгауза $(\mathcal{M}_\mu, d_\mu)$ дорівнює 1.*

Доведення. 1) Якщо $\mu(B) = 0$, то $d_\mu(A, B) = 1$ за означенням. Нехай $\mu(B) \neq 0$. Тоді

$$d_\mu(A,B) = \frac{\mu(A \triangle B)}{\mu(A \cup B)} = \frac{\mu((A \backslash (A \cap B)) \cup (B \backslash (A \cap B)))}{\mu((A \backslash B) \cup B)}.$$

Оскільки множини $A \cap B$, $A \backslash B$, $A \backslash (A \cap B)$ є підмножинами множини A і $\mu(A) = 0$, то

$$\mu(A \cap B) = \mu(A \backslash B) = \mu(A \backslash (A \cap B)) = 0,$$

а тому

$$d_\mu(A,B) = \frac{\mu(A \backslash (A \cap B)) + \mu(B) - \mu(A \cap B)}{\mu(A \backslash B) + \mu(B)} = \frac{\mu(B)}{\mu(B)} = 1.$$

2) Нехай для всіх $B \in \mathcal{M}_\mu$ виконується рівність $d_\mu(A, B) = 1$. Доведемо, що $\mu(A) = 0$. Припустимо від супротивного, що $\mu(A) > 0$. Тоді, оскільки $|\mathcal{M}_\mu| > 2$, то існує множина $B \in \mathcal{M}_\mu$, яка не дорівнює множині A і не є порожньою множиною. Оскільки $\mathcal{M}$ — алгебра і μ — скінченно адитивна міра, то $(A \cap B) \in \mathcal{M}_\mu$ і $(A \cup B) \in \mathcal{M}_\mu$. А тому можна стверджувати, що існує множина $C \in \mathcal{M}_\mu$ така, що $\mu(C) \neq 0$ і або $A \subset C$, або $C \subset A$. Якщо $C \subset A$, то справедливою буде оцінка

$$d_\mu(A,C) = \frac{\mu(A \triangle C)}{\mu(A \cup C)} = \frac{\mu(A \backslash C)}{\mu(A)} < 1.$$

Якщо $A \subset C$, то

$$d_\mu(A,C) = \frac{\mu(A \triangle C)}{\mu(A \cup C)} = \frac{\mu(C \backslash A)}{\mu(C)} < 1,$$

що суперечить умові твердження. Отже $\mu(A) = 0$. □

Безпосередньо перевіряється, що має місце також подібне твердження для простору міри $(\mathcal{M}_\mu, dm_\mu)$.

Твердження 2. *Нехай $|\mathcal{M}_\mu| > 2$. Множина $A \in \mathcal{M}_\mu$ має міру 0 тоді і тільки тоді, коли відстань від A до будь-якої іншої множини $B \in \mathcal{M}_\mu$ в просторі міри $(\mathcal{M}_\mu, dm_\mu)$ дорівнює*

$$d_\mu(A, B) = \mu(B).$$

У випадку, коли множина M — скінченна, $\mathcal{M}$ є множиною всіх підмножин множини M, а μ — рівнорозподілена міра, напівметричний простір міри є простором Хемінга, а простір Марчевського–Штейнгауза — біотопним простором. Властивості біотопних просторів і просторів Хемінга та їх групи ізометрій охарактеризовано в роботах [4–6](див. також [8, стор. 91–92]).

Нагадаємо, що метричний простір називається однорідним, якщо його група ізометрій діє на ньому транзитивно.

Теорема 1. *Метричний простір міри $(\mathcal{M}_\mu, dm_\mu)$ є однорідним метричним простором.*

Доведення. Достатньо показати, що для будь-яких множин $A, B \in \mathcal{M}_\mu$ існує ізометрія $i_{A,B}$ простору $(\mathcal{M}_\mu, dm_\mu)$ така, що $i_{A,B}(A) = B$.

Визначимо відображення $i_{A,B} : \mathcal{M}_\mu \to \mathcal{M}_\mu$ для будь-якої множини $X \in \mathcal{M}_\mu$, поклавши:

$$i_{A,B}(X) = (A \triangle B) \triangle X.$$

Відображення визначене коректно, оскільки з того, що $X \in \mathcal{M}_\mu$, випливає, що $i_{A,B}(X) \in \mathcal{M}_\mu$. Крім того,

$$i_{A,B}(A) = (A \triangle B) \triangle A = B.$$

Зрозуміло, що відображення $i_{A,B}$ є біекцією множини $\mathcal{M}_\mu$ на себе. Для будь-яких двох множин $Z, Y \in \mathcal{M}_\mu$ справедливим буде ланцюг рівностей

$$\begin{aligned} dm_\mu(i_{A,B}(Y), i_{A,B}(Z)) &= dm_\mu(((A \triangle B) \triangle Y, ((A \triangle B) \triangle X) \\ &= \mu((A \triangle B) \triangle Y) \triangle ((A \triangle B) \triangle Z) = \mu(Y \triangle Z) = dm_\mu(Y, Z), \end{aligned}$$

тобто відображення $i_{A,B}$ зберігає відстані між точками простору $(\mathcal{M}_\mu, dm_\mu)$, а отже і є шуканою ізометрією. Теорему доведено. □

Нагадаємо, що автоморфізмом простору $(M, \mathcal{M}, \mu)$ називається довільне відображення $f : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}$, для якого виконуються такі умови (див. [7, стор. 7–10]):

1) існує відображення f^{-1}, і $f^{-1}(C) \in \mathcal{M}$ для будь-якого $C \in \mathcal{M}$;

2) для відображення f міра μ є інваріантною, тобто для будь-якого $C \in \mathcal{M}$ справедлива рівність

$$\mu(C) = \mu(f(C)) = \mu(f^{-1}(C)).$$

Теорема 2. *Якщо* $|\mathcal{M}_\mu| > 2$, *то для довільної ймовірносної міри* μ *ізометріями напівметричного простору Марчевського–Штейнгауза будуть автоморфізми простору* $(\mathcal{M}, \mu)$ *і тільки вони.*

Доведення. Зрозуміло, що всі відображення множини $\mathcal{M}$ на себе, які зберігають міру, не будуть змінювати відстані між точками простору Марчевського–Штейнгауза, тобто будуть його ізометріями. Пересвідчимось, що ізометрія φ простору $(\mathcal{M}_\mu, d_\mu)$ зберігає міру μ на множині $\mathcal{M}$.

Переконаємось спочатку, що при ізометрії φ образами множин міри 0 будуть множини міри 0. Справді, нехай $A \in \mathcal{M}$ і $\mu(A) = 0$. Тоді з твердження 1 випливає, що для всіх точок простору $B \in \mathcal{M}$ справедлива рівність $d_\mu(A, B) = 1$. Оскільки φ — ізометрія простору Марчевського–Штейнгауза, то

$$d_\mu(\varphi(A), \varphi(B)) = 1.$$

Якщо B пробігає весь простір $\mathcal{M}$, то й $\varphi(B)$ також пробігає весь цей простір, а тому остання рівність рівносильна умові

$$d_\mu(\varphi(A), \varphi(B)) = 1 \quad \text{для всіх} \quad \varphi(B) \in \mathcal{M}.$$

Звідки за твердженням 1 дістаємо $\mu(\varphi(A)) = 0$.

Доведемо тепер, що при ізометрії φ множина M переходить в деяку множину вигляду $M \backslash D$, де D — множина міри 0. Оскільки μ — ймовірносна міра, то це означає, що має місце рівність $\mu(\varphi(M)) = 1$. Нехай $C \in \mathcal{M}$ така множина, що $\varphi(M) = M \backslash \varphi(C)$, тоді справедливою буде рівність

$$d_\mu(M, C) = \frac{\mu(M \triangle C)}{\mu(M \cup C)} = \frac{\mu((M \backslash C) \cup (C \backslash M))}{1} = 1 - \mu(C). \tag{3}$$

А відстань між образами множин M і C при відображенні φ визначається рівністю

$$d_\mu(\varphi(M), \varphi(C)) = \frac{\mu((M \backslash \varphi(C)) \triangle \varphi(C))}{\mu((M \backslash \varphi(C)) \cup \varphi(C))}$$
$$= \frac{\mu((M \backslash C) \cup \varphi(C))}{1} = 1. \tag{4}$$

Оскільки φ — ізометрія простору $(\mathcal{M}_\mu, d_\mu)$, то з рівностей (3) і (4) маємо $1 - \mu(C) = 1$, звідки отримуємо $\mu(C) = 0$. З доведеного вище випливає, що $\mu(\varphi(C)) = 0$. Отже, для будь-якої ізометрії φ простору $(\mathcal{M}_\mu, d_\mu)$ множина M переходить в деяку множину вигляду $M \backslash D$, де $\mu(D) = 0$.

Нехай тепер $A \in \mathcal{M}$ — деяка множина, міра якої не дорівнює 0 і $A \neq M$. Відстань від точки A до точки M в просторі $(\mathcal{M}_\mu, d_\mu)$ буде дорівнювати

$$d_\mu(M, A) = \frac{\mu(M \triangle A)}{\mu(M)} = 1 - \mu(A). \tag{5}$$

Для відстані між образами цих точок, як випливає з доведеного вище, при ізометрії φ, буде справедлива така рівність

$$\begin{aligned} d_\mu(\varphi(M), \varphi(A)) = \frac{\mu((M \backslash D) \triangle \varphi(A))}{\mu((M \backslash D) \cup \varphi(A))} \\ = \frac{\mu(((M \backslash D) \backslash \varphi(A)) \cup (\varphi(A) \cap D)))}{\mu((M \backslash D) \cup \varphi(A))}. \end{aligned}$$

Оскільки міра множини D дорівнює 0, то

$$d_\mu(\varphi(M), \varphi(A)) = \frac{\mu((M \backslash D) \backslash \varphi(A))}{1} = 1 - \mu(\varphi(A)). \tag{6}$$

Відображення φ зберігає відстані між точками, а тому з рівностей (5) і (6) маємо

$$1 - \mu(A) = 1 - \mu(\varphi(A)),$$

звідки отримуємо рівність

$$\mu(A) = \mu(\varphi(A)),$$

отже φ зберігає міру. Таким чином, ми довели, що ізометріями простору Марчевського–Штейнгауза будуть відображення, що зберігать міру і тільки вони. Теорему доведено. $\square$

Зауважимо, що в загальному випадку, коли міра необмежена, твердження теореми 3.1 неправильне. Розглянемо такий приклад. Нехай $\mathcal{R}$ — σ-алгебра всіх вимірних за Лебегом підмножин дійсної прямої $\mathbb{R}$, μ — міра Лебега на $\mathbb{R}$. Розглянемо відображення $\psi : \mathcal{R} \to \mathcal{R}$, яке кожну множину $A \in \mathcal{R}$ "розтягує" вдвічі, тобто число x належить $\psi(A)$ тоді і тільки тоді, коли число $\frac{1}{2}x$ належить множині A. Очевидно, що відображення ψ є бієкцією множини $\mathcal{R}$ в себе і $\mu(\psi(A)) = 2\mu(A)$. Крім того, відображення ψ не змінює відстані між точками простору $(\mathcal{R}, d_\mu)$. Таким чином, ізометрія ψ простору Марчевського–Штейнгауза $(\mathcal{R}, d_\mu)$ не буде автоморфізмом σ-алгебри всіх вимірних за Лебегом підмножин множини дійсних чисел $\mathbb{R}$.

За даними напівметричними просторами Марчевського–Штейнгауза $(\mathcal{M}_\mu, d_\mu)$ і Фреше–Никодима–Арошаяна $(\mathcal{M}_\mu, dm_\mu)$ можна побудувати метричні простори, які природно назвати простором Штейнгауза і метричним простором міри. А саме, на множині $\mathcal{M}_\mu$ визначимо відношення $\sim$ для довільних множин $A, B \in \mathcal{M}_\mu$ умовою: $A \sim B$ тоді і лише тоді, коли $\mu(A \triangle B) = 0$. Очевидно, що відношення $\sim$ є еквівалентністю на множині $\mathcal{M}_\mu$. На фактор-множині

$$\overline{\mathcal{M}_\mu} = \mathcal{M}_\mu \diagup \sim$$

визначимо функції двох змінних $\widetilde{d_\mu}$ і $\widetilde{dm_\mu}$ таким чином

$$\widetilde{d_\mu(\bar{U}, \bar{V})} = \frac{\widetilde{\mu}(\bar{U} \triangle \bar{V})}{\widetilde{\mu}(\bar{U} \cup \bar{V})} = \frac{\mu(U \triangle V)}{\mu(U \cup V)},$$

$$\widetilde{dm_\mu(\bar{U}, \bar{V})} = \widetilde{\mu}(\bar{U} \triangle \bar{V}) = \mu(U \triangle V),$$

де $\bar{U}, \bar{V} \in \overline{\mathcal{M}_\mu}$, а U, V деякі представники класів $\bar{U}, \bar{V}$ відповідно. Функції $\widetilde{d_\mu}$ і $\widetilde{dm_\mu}$ визначені коректно. Справді, нехай $\mu(U \triangle U_1) = 0$. Покажемо, що $\mu((U \triangle V) \triangle (U_1 \triangle V)) = 0$. Але $((U \triangle V) \triangle (U_1 \triangle V)) = U_1 \triangle U$, а тому $\mu((U \triangle V) \triangle (U_1 \triangle V)) = \mu(U_1 \triangle U) = 0$. Отже функція $\widetilde{dm_\mu}$ визначена коректно. Для доведення коректності визначення функції $\widetilde{d_\mu}$ покажемо, що $\mu((U \cup V) \triangle (U_1 \cup V)) = 0$. Справедливою буде оцінка

$$\mu((U_1 \cup V) \setminus (U \cup V)) = \mu((U_1 \setminus (U \cup V) \cup (V \setminus (U_1 \cup V))),$$

враховуючи монотонність міри, отримаємо

$$\mu((U_1 \cup V) \setminus (U \cup V)) \leq \mu(U_1 \setminus U) + \mu(V \setminus V) = 0.$$

Отже, $\mu((U \cup V)) = \mu(U_1 \cup V)$ і функція $\widetilde{d_\mu}$ визначена коректно.

Функції $\widetilde{d_\mu}$ і $\widetilde{dm_\mu}$ набувають значення 0 тільки на класі $\bar{\emptyset}$, а тому будуть метриками на $\overline{\mathcal{M}_\mu}$.

Твердження 3. *Простір $(\overline{\mathcal{M}_\mu}, \widetilde{dm_\mu})$ є однорідним метричним простором.*

Доведення. Доведення цього твердження проводиться аналогічно доведенню теореми 1. Справді, достатньо показати, що для будь-яких класів множин $\bar{A}, \bar{B} \in \overline{\mathcal{M}_\mu}$ існує ізометрія $i_{\bar{A}}$ простору $(\overline{\mathcal{M}_\mu}, \widetilde{dm_\mu})$ така, що $i_{\bar{A}}(\bar{A}) = \bar{B}$.

Визначимо відображення $i_{\bar{A}} : \overline{\mathcal{M}_\mu} \to \overline{\mathcal{M}_\mu}$ для будь-якого класу множин $\bar{X} \in \overline{\mathcal{M}_\mu}$, поклавши:

$$i_{\overline{A}}(\overline{X}) = (\overline{A} \triangle \overline{B}) \triangle \overline{X}.$$

Відображення визначене коректно, оскільки з того, що $\bar{X} \in \overline{\mathcal{M}_\mu}$, випливає, що $i_{\bar{A}}(\bar{X}) \in \overline{\mathcal{M}_\mu}$ і, якщо $X \sim X_1$, то $i_{\bar{A}}(\bar{X}) \sim i_{\bar{A}}(\bar{X}_1)$. Крім того,

$$i_{\bar{A}}(\bar{A}) = \bar{B}.$$

Зрозуміло, що відображення $i_{\bar{A}}$ є бієкцією множини $\overline{\mathcal{M}_\mu}$ на себе і аналогічно доведенню теореми 1 доводиться, що відображення $i_{\bar{A}}$ зберігає відстані між точками простору $(\overline{\mathcal{M}_\mu}, \widetilde{dm_\mu})$, а отже, і є шуканою ізометрією. □

Аналогічно теоремі 3.1 доводиться теорема

Теорема 3. *Якщо $|\overline{\mathcal{M}_\mu}| > 2$, то для довільної ймовірносної міри μ ізометріями простору Штейнгауза будуть відображення, що зберігають міру μ і тільки вони.*

Література

[1] Ю. М. Березовский, Г. Ф. Ус, З. Г. Шефтель, *Функциональный Анализ.* Киев: Вища школа, 1990, 600 с.

[2] M. M. Deza, M. Laurent, *Geometry of cuts and metrics.* Berlin: Springer, 1997, 588 p. (Російський переклад: М. Деза, М. Лоран, *Геометрия разрезов и метрик.* Москва: МЦНМО, 2001, 736 с.)

[3] F. Marczewski, H. Steinhaus, *On certain distance of sets and the corresponding distance of functions* // Colloquium Matematicum, **6** (1958), 319–327.

[4] Б. В. Олійник, *Універсальність зліченних просторів Хемінга щодо ізоморфних занурень* // Вісник Київського університету. Сер. фіз.-мат. науки. 1996, в. 2, 53–62.

[5] Б. В. Олійник, *Ізоморфні занурення і метрика Громова–Хаусдорфа для скінченних метричних просторів.* Дис. канд. фіз.-мат. наук. Київ: КНУ імені Тараса Шевченка, 2002, 124 с.

[6] Б. В. Олійник, *Група ізометрій нескінченного біотопного простору* // Математичні Студії. **20** 2003, N 2, 205–209.

[7] Я. Г. Синай, *Современные проблемы эргодической теории.* Москва: Физико-математическая литература, 1995, 201 с.

[8] В. І. Сущанський, В. С. Сікора, *Операції на групах підстановок. Теорія та застосування.* Чернівці: Рута, 2003, 255 с.

Відомості про авторів

Богдана Віталіївна Олійник
Національній університет
"Києво-Могилянська академія"
вул. Г. Сковороди, 2
04070, Київ
Україна
E-Mail: bogd@ukma.kiev.ua