Український математичний вісник
Том 3 **(2006)**, № 2, 242 – 259

Расслоение решения квазилинейного стохастического уравнения параболического типа

Сергей А. Мельник

(*Представлена С. Я. Махно*)

Аннотация. В работе получены условия, при которых обобщенное решение задачи Коши для квазилинейного стохастического уравнения параболического типа допускает расслоение.

2000 MSC. 60H15, 35R60.

Ключевые слова и фразы. Стохастическое уравнение в частных производных, амплитуда.

1. Определения, обозначения, постановка задачи

На полном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathbf{F}, \mathbf{P})$ рассмотрим следующую задачу Коши в $\mathbb{R}^1$

$$\begin{gathered} du(t,x) = au_{xx}(t,x)\,dt + b|u(t,x)|^{\gamma-1}u(t,x)\,dw(t), \\ t \in [0;\tau(\omega)), \quad x \in \mathbb{R}^1, \\ u(0,x) = u_0(x). \end{gathered} \tag{1.1}$$

Здесь $w(t)$ — стандартный винеровский процесс со значениями в $\mathbb{R}^1$, согласованный с потоком σ-алгебр $\{F_t\},\ t \geq 0$; a, b — положительные числа, $\gamma > 1$; $\tau(\omega)$ — марковский момент остановки, согласованный с потоком σ-алгебр $\{F_t\},\ t \geq 0$; $u_0(x)$ — неслучайная неотрицательная функция, $u_0 \in W_2^1(\mathbb{R}^1) \cap L_{\gamma+1}(\mathbb{R}^1)$. Буквенный индекс, стоящий внизу возле знака функции, означает взятие частной производной по соответствующей переменной.

Определение решения задачи (1.1) на случайном отрезке времени $[0;\tau(\omega))$ дадим следуя аналогичному определению для обыкновенных стохастических дифференциальных уравнений, сформулированному в [1, с. 246].

Статья поступила в редакцию 28.10.2004

Определение 1.1. *Решением задачи* (1.1) *будем называть случайный процесс* $u(t,x)$, *подчиненный потоку* σ-*алгебр* $\{F_t\}$, $t \geq 0$, *для которого существует марковский момент* $\tau(\omega)$ *такой, что при любом* $0 < T < +\infty$

$$\boldsymbol{M} \sup_{t\in[0;T\wedge\tau)} \int |u(t,x)|^2\, dx < +\infty,$$

$$\boldsymbol{M} \int\limits_0^{T\wedge\tau} \int |u_x(t,x)|^2\, dx\, dt < +\infty,$$

$$\boldsymbol{M} \int\limits_0^{T\wedge\tau} \left(\int |u(t,x)|^{\gamma+1} dx\right)^2 dt < +\infty$$

и $\forall\, g \in W_2^1(\mathbb{R}^1) \cap L_{\gamma+1}(\mathbb{R}^1)$, $\forall\, t \in [0;\tau)$ *с вероятностью* 1 *справедливо равенство*

$$\int u(t,x)g(x)\, dx - \int u_0(x)g(x)\, dx = -a \int\limits_0^t \int u_x(s,x)g_x(x)\, dx\, ds + b \int\limits_0^t \int |u(s,x)|^{\gamma-1} u(s,x) g(x)\, dx\, dw(s).$$

Здесь и далее $\mathbf{M}$ — символ математического ожидания.

Далее в работе будут использоваться следующие обозначения:

$$p = \|v\|^2 = \int |v(y)|^2\, dy,$$

$$z = \|v_y\|^2 = \int |v_y(y)|^2\, dy,$$

$$q = \big|\|v\|\big|^{\gamma+1} = \int |v(y)|^{\gamma+1}\, dy;$$

$$f(u) = \frac{1}{2}\|u(t,\cdot)\|^2 - \frac{1}{2}\|u(0,\cdot)\|^2 + \frac{a}{2}\int\limits_0^t \|u_x(s,\cdot)\|^2\, ds - \frac{b}{\gamma+1}\int\limits_0^t \big|\|u(s,\cdot)\|\big|^{\gamma+1}\, dw(s);$$

$$M=\Big(\frac{(\gamma+1)(3-\gamma)B}{2b}\Big)^{\frac{1}{\gamma-1}},\quad N=2A-(\gamma-2)B^2,\quad \mu=\frac{2aM^{2(\gamma-1)}}{(\gamma-3)N}.$$

Определение 1.2. *Говорят, что процесс $u(t,x)$ допускает расслоение, если он может быть представлен в виде: $u(t,x)=r(t)v(xr^m(t))$, где $r(t)$ — случайный процесс, который с вероятностью 1 принимает положительные значения, $m\in\mathbb{R}^1$, $v\in W_2^1(\mathbb{R}^1)\cap L_{\gamma+1}(\mathbb{R}^1)$. Процесс $r(t)$ называют амплитудой решения, функцию $v(y)$ пространственной формой решения, точку $x_f(t)=\{\min x>0 : v(xr^m(t))=0\}$ точкой фронта решения.*

Замечание 1.1. В данной работе за основу принят подход к изучению нелинейных уравнений в частных производных, предложенный в работе [2].

Замечание 1.2. В теории детерминированных уравнений в частных производных параболического типа со степенными нелинейностями большую роль играют решения, пространственная форма которых является дифференцируемой в нуле четной неотрицательной функцией, убывающей на положительной полуоси. В данной работе рассматриваются решения с аналогичными свойствами.

Постановка задачи. Пусть исходные данные задачи (1.1) удовлетворяют перечисленным выше ограничениям. Выясним, при каких условиях решение задачи (1.1) допускает расслоение, а также построим уравнения, которым удовлетворяют амплитуда и пространственная форма решения.

2. Основные результаты

Теорема 2.1. *Пусть выполнены следующие условия.*

1) $\gamma\in(1;3)\cup(3;+\infty)$, $N\neq 0$, $(3-\gamma)B>0$.

2) $r(t)$ *является решением уравнения*

$$dr(t)=Ar^{2\gamma-1}(t)\,dt+Br^{\gamma}(t)\,dw(t),\qquad r(0)>0. \tag{2.1}$$

3) $v(y)$ *является решением задачи*

$$\begin{gathered}\mu(p/q)^2v_{yy}(y)+(\gamma+1)(p/q)v^{\gamma}(y)-v(y)=0,\quad y\in\mathbb{R}^1,\\ v(y)\geq 0,\quad v(-y)=v(y),\quad v_y(0)=0,\quad v(+\infty)=0.\end{gathered} \tag{2.2}$$

4) $$u_0(x)=r(0)M(p/q)^{1/(\gamma-1)}v\left(xr^{\gamma-1}(0)M^{\gamma-1}p/q\right).$$

Тогда решение задачи (1.1) *допускает расслоение следующего вида*

$$u(t,x)=r(t)M(p/q)^{1/(\gamma-1)}v\left(xr^{\gamma-1}(t)M^{\gamma-1}p/q\right).$$

3. Вспомогательные результаты

В данном разделе предполагаются выполненными условия теоремы 2.1.

Замечание 3.1. Согласно теореме 6 [1, с. 246] для любых действительных чисел A и B решение уравнения (2.1) существует и единственно на некотором случайном отрезке времени $[0;\tau(\omega)]$, причем

$$\mathbf{P}\{\tau(\omega)>0\}=1 \quad \text{и} \quad \mathbf{P}\left\{\sup_{t\in[0;\tau(\omega)]}|r(t)|=+\infty\right\}=1.$$

Кроме того, как показано в [3, с. 73] решение задачи (2.1) является случайным процессом, который с вероятностью 1 при всех $t\geq 0$ принимает неотрицательные значения. Поэтому степенные выражения в уравнении (2.1) определены.

Лемма 3.1. *Пусть $\delta>0$. Задача*

$$\begin{gathered} V_{YY}(Y)+(\gamma+1)\delta|V(Y)|^{\gamma-1}V(Y)-V(Y)=0, \\ Y\geq 0, \quad V_Y(0)=0, \quad V(0)=V_0>(2\delta)^{1/(1-\gamma)} \end{gathered} \tag{3.1}$$

имеет единственное обобщенное неотрицательное решение, которое обладает следующими свойствами:

1. *Решение имеет конечную точку фронта*

$$Y_0=\inf\{Y\geq 0: V(Y)\leq 0\}<+\infty$$

такую, что $V(Y)>0$, если $Y\in(0;Y_0)$ и $V(Y)=0$, если $Y\geq Y_0$.

2. $V_{YY}(0)<0$.

3. *Существует $\epsilon>0$ такое, что $V_{YY}>0$, если $Y\in(Y_0-\epsilon;Y_0)$.*

Доказательство. Обозначим $G(V)=V-(\gamma+1)\delta|V|^{\gamma-1}V$. Функция $G(V)$ локально липшицева. Действительно, если $|V|\leq R$, то $|G_V|=|1-\gamma(\gamma+1)\delta|V|^{\gamma-1}|\leq 1+\gamma(\gamma+1)\delta R^{\gamma-1}$. Тогда по формуле конечных приращений при любых $|V_1|\leq R$, $|V_2|\leq R$ имеем неравенство

$$\begin{aligned} &|G(V_1)-G(V_2)| \\ &\qquad=\left|\int_0^1(1-\gamma(\gamma+1)\delta|V_1+\theta(V_2-V_1)|^{\gamma-1})\,d\theta\right||V_1-V_2| \\ &\qquad\qquad\leq(1+\gamma(\gamma+1)\delta R^{\gamma-1})|V_1-V_2|. \end{aligned}$$

Согласно [4, с. 89] в любой области $|V| \le R$ задача (3.1) имеет единственное решение. Решение задачи (3.1) является непрерывной функцией и $V(0) > 0$. Значит, либо $V(Y) > 0$ $\forall Y \ge 0$, либо существует точка $Y_0 > 0$ такая, что $Y_0 = \inf\{Y \ge 0 : V(Y) \le 0\} < +\infty$. В этом случае положим $V(Y) = 0$ при $Y \ge Y_0$. В первом случае получим классическое неотрицательное решение задачи (3.1), во втором случае получим обобщенное неотрицательное решение задачи (3.1). Поэтому далее знак модуля функции $V(Y)$ будет опускаться. Решение задачи (3.1) не может быть константой, так как если $V(Y) \equiv C$, то из уравнения (3.1) получим равенство $C-(\gamma+1)\delta C^{\gamma} = 0$, то есть, либо $C = 0$, либо $C = ((\gamma+1)\delta)^{1/(1-\gamma)}$. Но $V(0) > (2\delta)^{1/(1-\gamma)} > ((\gamma+1)\delta)^{1/(1-\gamma)} > 0$. Значит $V(Y)$ не может быть константой. Понизим порядок уравнения (3.1). Для этого умножим его на $V_Y(Y)$ и проинтегрируем. В результате получим уравнение

$$V_Y(Y) = -\sqrt{C_0 + V^2(Y) - 2\delta V^{\gamma+1}(Y)}, \tag{3.2}$$

где $C_0 = 2\delta V_0^{\gamma+1} - V_0^2 > 0$. В правой части этого уравнения перед знаком корня квадратного взят знак минус, так как согласно замечанию 1.2 мы рассматриваем пространственные формы, которые являются убывающими функциями на положительной полуоси. Из (3.2) следует, что если $V \to 0$, то $V_Y \to -\sqrt{C_0} < 0$. Значит, найдется точка $Y_0 \in (0; +\infty)$ такая, что $V(Y_0) = 0$. Следовательно, задача (3.1) имеет обобщенное решение, которое является неотрицательной финитной функцией.

Выясним характер выпуклости решения задачи (3.1) в окрестности точек $Y = 0$ и $Y = Y_0$. Запишем уравнение (3.1) в следующем виде $V_{YY}(Y) = V(Y) - (\gamma+1)\delta V^{\gamma}(Y)$. Тогда, $V_{YY}(0) = V_0\big(1 - (\gamma + 1)\delta V_0^{\gamma-1}\big) < 0$, так как $V(0) > (2\delta)^{1/(1-\gamma)} > ((\gamma+1)\delta)^{1/(1-\gamma)} > 0$. В окрестности точки фронта Y_0 значения функции $V(Y)$ близки к нулю. Значит, в этой окрестности $V_{YY}(Y) = V(Y)\left(1 - (\gamma+1)\delta V^{\gamma-1}(Y)\right) > 0$. Лемма 3.1 доказана. $\square$

Лемма 3.2. *Если* $V_0 > (2\delta)^{1/(1-\gamma)}$, *то решение задачи* (3.1) *ограничено снизу функцией*

$$\check{V}(Y) = \begin{cases} V_0 \cos \check{L} Y, & 0 \le Y \le 0.5\pi/\check{L}, \\ 0, & Y > 0.5\pi/\check{L}, \end{cases}$$

где $\check{L} = \sqrt{\delta(\gamma+1)V_0^{\gamma-1} - 1}$.

Доказательство. Функция $\check{V}(y)$ является обобщенным решением задачи

$$\check{V}_Y(Y) = -\check{L}\sqrt{V_0^2 - \check{V}^2(Y)}, \qquad Y \geq 0, \qquad \check{V}(0) = V_0. \tag{3.3}$$

Сравним правые части этого уравнения и уравнения (3.2). Докажем, что при $V \in [0; V_0]$ имеет место неравенство $\check{L}^2(V_0^2 - V^2) \geq C_0 + V^2 - 2\delta V^{\gamma+1}$. Найдем наименьшее значение выражения $\check{L}^2(V_0^2 - V^2) - C_0 - V^2 + 2\delta V^{\gamma+1}$ на отрезке $V \in [0; V_0]$. Исследуем производную этого выражения при $V \in [0; V_0]$.

$$\left[\check{L}^2(V_0^2 - V^2) - C_0 - V^2 + 2\delta V^{\gamma+1}\right]_V = 2\delta(\gamma+1)V(V^{\gamma-1} - V_0^{\gamma-1}) \leq 0.$$

Значит, минимальное значение достигается при $V = V_0$ и равно нулю. Следовательно, правая часть уравнения (3.3) не превосходит правую часть уравнения (3.2). Тогда, согласно теореме 3 [5, с. 39] решение задачи (3.1) ограничено снизу решением задачи (3.3). Лемма 3.2 доказана. □

Лемма 3.3. *Если* $V_0 > (2\delta)^{1/(1-\gamma)}$, *то решение задачи* (3.1) *ограничено сверху функцией*

$$\hat{V}(Y) = \begin{cases} V_0 \cos \hat{L}Y, & 0 \leq Y \leq 0.5\pi/\hat{L}, \\ 0, & Y > 0.5\pi/\hat{L}, \end{cases}$$

где $\hat{L} = \sqrt{2\delta V_0^{\gamma-1} - 1}$.

Доказательство. Функция $\hat{V}(y)$ является обобщенным решением задачи

$$\hat{V}_Y(Y) = -\hat{L}\sqrt{V_0^2 - \hat{V}^2(Y)}, \; Y \geq 0, \hat{V}(0) = V_0. \tag{3.4}$$

Сравним правые части этого уравнения и уравнения (3.2). Докажем, что при $V \in [0; V_0]$ имеет место неравенство $\hat{L}^2(V_0^2 - V^2) \leq C_0 + V^2 - 2\delta V^{\gamma+1}$. Найдем наименьшее значение выражения $C_0 + V^2 - 2\delta V^{\gamma+1} - \hat{L}^2(V_0^2 - V^2)$ на отрезке $V \in [0; V_0]$. Исследуем производную этого выражения при $V \in [0; V_0]$.

$$\left[C_0 + V^2 - 2\delta V^{\gamma+1} - \hat{L}^2(V_0^2 - V^2)\right]_V = 2\delta V(2V_0^{\gamma-1} - (\gamma+1)V^{\gamma-1}) = 0.$$

Корнями этого уравнения являются: $V_1 = 0$ и $V_2 = \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{1/(\gamma-1)} V_0 < V_0$. Точка V_2 является точкой максимума рассматриваемого выражения. Значит, минимальное значение достигается при $V = V_0$ и равно нулю. Следовательно, правая часть уравнения (3.4) не меньше правой части уравнения (3.2). Тогда, согласно теореме 3 [5, с. 39] решение задачи (3.1) ограничено сверху решением задачи (3.4). Лемма 3.3 доказана. □

Следствие 3.1. *Точка Y_0, являющаяся точкой фронта решения задачи* (3.1)*, удовлетворяет следующему неравенству*

$$\frac{\pi}{2\check{L}} \le Y_0 \le \frac{\pi}{2\hat{L}}.$$

Лемма 3.4. *Пусть $\delta > 0$. Задача*

$$\begin{gathered} V_{YY}(Y) - (\gamma+1)\delta|V(Y)|^{\gamma-1}V(Y) + V(Y) = 0, \\ Y \ge 0, \quad V_Y(0) = 0, \quad V(0) = V_0 \in \big(0; ((\gamma+1)\gamma\delta)^{1/(1-\gamma)}\big) \end{gathered} \tag{3.5}$$

имеет единственное обобщенное неотрицательное решение, которое обладает следующими свойствами:

1. *Решение имеет конечную точку фронта*

   $$Y_0 = \inf\{Y \ge 0 : V(Y) \le 0\} < +\infty$$

   такую, что $V(Y) > 0$, если $Y \in (0; Y_0)$ и $V(Y) = 0$, если $Y \ge Y_0$.

2. $V_{YY}(0) < 0$.

3. *Существует $\epsilon > 0$ такое, что $V_{YY} < 0$, если $Y \in (Y_0 - \epsilon; Y_0)$.*

Доказательство. Доказательство существования и единственности решения повторяет аналогичный этап в доказательстве леммы 3.1, так как, если функция $G(V)$ локально липшицева, то и функция $-G(V)$ локально липшицева. Решение задачи (3.5) не может быть константой, так как если $V(Y) \equiv C$, то из уравнения (3.5) получим равенство $(\gamma+1)\delta C^\gamma - C = 0$, то есть, либо $C = 0$, либо $C = ((\gamma+1)\delta)^{1/(1-\gamma)}$. Но $0 < V(0) < ((\gamma+1)\gamma\delta)^{1/(1-\gamma)} < ((\gamma+1)\delta)^{1/(1-\gamma)}$. Значит $V(Y)$ не может быть константой. Понизим порядок уравнения (3.5). Для этого умножим его на $V_Y(Y)$ и проинтегрируем. В результате получим уравнение

$$V_Y(Y) = -\sqrt{-C_0 - V^2(Y) + 2\delta V^{\gamma+1}(Y)}, \tag{3.6}$$

где $C_0 = 2\delta V_0^{\gamma+1} - V_0^2 < 0$. Рассуждая, как и в доказательстве леммы 3.1, получим обобщенное финитное неотрицательное решение задачи (3.5). Выясним характер выпуклости решения задачи (3.5) в окрестности точек $Y = 0$ и $Y = Y_0$. Запишем уравнение (3.5) в следующем виде $V_{YY}(Y) = (\gamma+1)\delta V^\gamma(Y) - V(Y)$. Тогда, $V_{YY}(0) = V_0\big((\gamma+1)\delta V_0^{\gamma-1} - 1\big) < 0$, поскольку $V(0) < ((\gamma+1)\gamma\delta)^{1/(1-\gamma)} < ((\gamma+1)\delta)^{1/(1-\gamma)}$. В окрестности точки фронта Y_0 значения функции $V(Y)$ близки к нулю. Значит, в этой окрестности $V_{YY}(Y) = V(Y)\big((\gamma+1)\delta V^{\gamma-1}(Y) - 1\big) < 0$. Лемма 3.4 доказана. □

Лемма 3.5. *Если* $V_0 \in \big(0; ((\gamma+1)\gamma\delta)^{1/(1-\gamma)}\big)$, *то решение задачи* (3.5) *ограничено снизу функцией*

$$\breve{V}(Y) = \begin{cases} V_0 \cos \breve{L}Y, & 0 \le Y \le 0.5\pi/\breve{L}, \\ 0, & Y > 0.5\pi/\breve{L}, \end{cases}$$

где $\breve{L} = \sqrt{1 - 2\delta V_0^{\gamma-1}}$.

Доказательство. Функция $\breve{V}(Y)$ является обобщенным решением задачи

$$\breve{V}_Y(Y) = -\breve{L}\sqrt{V_0^2 - \breve{V}^2(Y)}, \quad Y \ge 0, \quad \breve{V}(0) = V_0. \qquad (3.7)$$

Сравним правые части уравнений (3.7) и (3.6). Докажем, что при $V \in [0; V_0]$ имеет место неравенство $\breve{L}^2(V_0^2 - V^2) \ge -C_0 + 2\delta V^{\gamma+1} - V^2$. Найдем наименьшее значение выражения $\breve{L}^2(V_0^2 - V^2) + C_0 - 2\delta V^{\gamma+1} + V^2$ на отрезке $V \in [0; V_0]$. Исследуем производную этого выражения на указанном отрезке.

$$\left[2\delta V_0^{\gamma-1} V^2 - 2\delta V^{\gamma+1}\right]_V = 2\delta V \left[2V_0^{\gamma-1} - (\gamma+1)V^{\gamma-1}\right] = 0.$$

Корнями этого уравнения являются $V_1 = 0$ и $V_2 = (2/(\gamma+1))^{1/(\gamma-1)} V_0 \in [0; V_0]$, причем, первая точка является точкой минимума, а вторая — точкой максимума. Значит, исследуемое выражение достигает наименьшего значения на концах отрезка и это значение равно нулю. Таким образом, неравенство доказано и правая часть уравнения (3.7) не превосходит правой части уравнения (3.6). Тогда, согласно теореме 3 [5, с. 39] решение задачи (3.5) ограничено снизу решением задачи (3.7). Лемма 3.5 доказана. □

Лемма 3.6. *Если* $V_0 \in \big(0; ((\gamma+1)\gamma\delta)^{1/(1-\gamma)}\big)$, *то решение задачи* (3.5) *ограничено сверху функцией*

$$\widehat{V}(Y) = \begin{cases} V_0 - 0.25\widehat{L}^2 Y^2, & 0 \le Y \le 2/\widehat{L}, \\ 0, & Y > 2/\widehat{L}, \end{cases}$$

где $\widehat{L} = \sqrt{V_0\big(1 - (\gamma+1)\gamma\delta V_0^{\gamma-1}\big)}$.

Доказательство. Функция $\widehat{V}(y)$ является обобщенным решением задачи

$$\widehat{V}_Y(Y) = -\widehat{L}\sqrt{V_0 - \widehat{V}(Y)}, \qquad Y \ge 0, \qquad \widehat{V}(0) = V_0. \qquad (3.8)$$

Сравним правые части уравнений (3.8) и (3.6). Докажем, что при $V \in [0; V_0]$ имеет место неравенство $\widehat{L}^2(V_0 - V) \le -C_0 + 2\delta V^{\gamma+1} - V^2$. В точке $V = V_0$ левая и правая части этого неравенства равны. В точке $V = 0$ левая часть меньше правой. На интервале $V \in (0; V_0)$ правая часть неравенства является выпуклой вверх функцией. Значит, неравенство имеет место. Тогда, согласно теореме 3 [5, с. 39] решение задачи (3.5) ограничено сверху решением задачи (3.8). Лемма 3.6 доказана. □

Следствие 3.2. *Точка Y_0, являющаяся точкой фронта решения задачи (3.5), удовлетворяет следующему неравенству $0.5\pi/\check{L} \le Y_0 \le 0.5\pi/\widehat{L}$.*

Лемма 3.7. *Существует такое $v_0 > 0$, что задача*

$$\begin{gathered} \mu(p/q)^2 v_{yy}(y) + (\gamma+1)(p/q)v^\gamma(y) - v(y) = 0, \qquad y \ge 0, \\ v_y(0) = 0, \qquad v(0) = v_0 \end{gathered} \tag{3.9}$$

имеет единственное обобщенное неотрицательное решение, которое отлично от нуля лишь на интервале конечной длины.

Доказательство. Пусть $(\gamma - 3)N > 0$. Тогда $\mu > 0$. Рассмотрим функции $V(Y)$, $\check{V}(Y)$ и $\hat{V}(Y)$, которые являются решениями задач (3.1), (3.3) и (3.4) соответственно. Обозначим: $\check{p} = \|\check{V}\|^2$, $\check{q} = |||\check{V}|||^{\gamma+1}$, $\overline{p} = \|V\|^2$, $\overline{q} = |||V|||^{\gamma+1}$, $\hat{p} = \|\hat{V}\|^2$, $\hat{q} = |||\hat{V}|||^{\gamma+1}$. Так как согласно лемме 3.2 и лемме 3.3 имеет место неравенство $\check{V}(Y) \le V(Y) \le \hat{V}(Y)$, то $\check{p}/\hat{q} \le \overline{p}/\overline{q} \le \hat{p}/\check{q}$. Учитывая вид функций $\check{V}(Y)$ и $\hat{V}(Y)$, получаем:

$$\check{p} = 0.5\pi V_0^2/\check{L}, \qquad \hat{p} = 0.5\pi V_0^2/\hat{L},$$
$$\check{q} = \frac{\sqrt{\pi} V_0^{\gamma+1}\Gamma(0.5\gamma+1)}{\check{L}\Gamma(0.5\gamma+1.5)}, \qquad \hat{q} = \frac{\sqrt{\pi} V_0^{\gamma+1}\Gamma(0.5\gamma+1)}{\hat{L}\Gamma(0.5\gamma+1.5)}.$$

Здесь Γ — символ гамма-функции. Тогда справедливо неравенство

$$\frac{\sqrt{\pi}\hat{L}\Gamma(0.5\gamma+1.5)V_0^{1-\gamma}}{2\check{L}\Gamma(0.5\gamma+1)} \le \frac{\overline{p}}{\overline{q}} \le \frac{\sqrt{\pi}\check{L}\Gamma(0.5\gamma+1.5)V_0^{1-\gamma}}{2\hat{L}\Gamma(0.5\gamma+1)}.$$

Если V_0 изменяется от $(2\delta)^{1/(1-\gamma)}$ до $+\infty$, то правая часть этого неравенства пробегает все значения от $+\infty$ до 0. Значит, существует $\delta > 0$, для которого можно так выбрать V_0, что выполнится равенство $\overline{p}/\overline{q} = \delta$. Тогда уравнение (3.1) принимает вид

$$V_{YY}(Y) + (\gamma+1)(\overline{p}/\overline{q})V^\gamma(Y) - V(Y) = 0.$$

Произведем замену переменных $Y = y\overline{q}/(\overline{p}\sqrt{\mu})$, $v(y) = V(y\overline{q}/(\overline{p}\sqrt{\mu}))$. При этом учтем, что $\overline{p} = p\overline{q}(\overline{p}\sqrt{\mu})$, $\overline{q} = q\overline{q}/(\overline{p}\sqrt{\mu})$, $\overline{p}/\overline{q} = p/q$. Тогда введенная функция $v(y)$ удовлетворяет уравнению (3.9). Так как $V(Y) \geq 0$, $V_Y(0) = 0$, $V(0) = V_0$, то $v(y) \geq 0$, $v_y(0) = 0$, $v(0) = V_0$. Поскольку $V(Y)$ имеет ограниченный носитель, то и $v(y)$ имеет ограниченный носитель. При этом её точка фронта y_0 удовлетворяет неравенству

$$\frac{\pi\sqrt{\mu}\overline{p}}{2\overline{q}\check{L}} \leq y_0 \leq \frac{\pi\sqrt{\mu}\overline{p}}{2\overline{q}\hat{L}}.$$

Пусть теперь $(\gamma - 3)N < 0$. Тогда $\mu < 0$. Используя леммы 3.5 и 3.6 с помощью рассуждений, аналогичных приведенным выше, получаем утверждение леммы. Лемма 3.7 доказана. □

Следствие 3.3. *Четная функция $v(y)$, которая при $y \geq 0$ совпадает с решением задачи* (3.9)*, является решением задачи* (2.2).

Доказательство. Решение задачи (3.9) является финитной дифференцируемой в нуле функцией и её производная в этой точке равна нулю. Кроме того, эта функция положительна при $0 \leq y < y_0$ и равна нулю при $y \geq y_0$. Отразив эту функцию симметрично относительно оси $0v$, получим решение задачи (2.2). Следствие доказано. □

Замечание 3.2. В силу неотрицательности функций $r(t)$, $v(y)$ и $V(Y)$ далее знаки их модулей будут опускаться.

4. Доказательство теоремы 2.1

Функционал $f(u)$, введённый в разделе 1, определён на пространстве $L_2\left([0;T) \times \Omega; W_2^1(\mathbb{R}^1)\right)$. Докажем, что функционал $f(u)$ дифференцируем по Гато по подпространству $W_2^1(\mathbb{R}^1)$ в среднем квадратическом и его дифференциал по подпространству равен

$$\begin{aligned} Df(u) = \int u(t,x)g(x)\,dx \\ - \int u(0,x)g(x)\,dx + a\int_0^t \int u_x(s,x)g_x(x)\,dx\,ds \\ - b\int_0^t \int |u(s,x)|^{\gamma-1}u(s,x)g(x)\,dx\,dw(s). \quad (4.1) \end{aligned}$$

Здесь $g \in W_2^1(\mathbb{R}^1)$. Согласно [6, с. 118] функционал $f(u)$ называется дифференцируемым в точке u по подпространству $W_2^1(\mathbb{R}^1)$, если функционал $F(h) = f(u+h)$ дифференцируем по $h \in W_2^1(\mathbb{R}^1)$ в точке 0. Дифференцируемость интегралов Лебега, входящих в $f(u)$, является известным фактом [7, с. 316]. Докажем, что стохастический интеграл, входящий в $f(u)$, дифференцируем по Гато по подпространству $W_2^1(\mathbb{R}^1)$ в среднем квадратическом и его дифференциал по подпространству равен:

$$(\gamma+1)\int\limits_0^t \int |u(s,x)|^{\gamma-1}u(s,x)g(x)\,dx\,dw(s),$$

т.е. докажем справедливость равенства

$$\lim_{h\to 0}\mathbf{M}\left|\frac{1}{h}\int\limits_0^t \int \left(|u+hg|^{\gamma+1}-|u|^{\gamma+1}\right)dx\,dw(s) \right.$$
$$\left. -(\gamma+1)\int\limits_0^t \int |u|^{\gamma-1}ug\,dx\,dw(s)\right|^2 = 0. \quad (4.2)$$

Применив формулу конечных приращений, получаем

$$\mathbf{M}\left|\int\limits_0^t \int \Big(\frac{1}{h}\left(|u+hg|^{\gamma+1}-|u|^{\gamma+1}\right)-(\gamma+1)|u|^{\gamma-1}ug\Big)dx\,dw(s)\right|^2$$
$$=(\gamma+1)^2\mathbf{M}\int\limits_0^t \left(\int \int\limits_0^1 \left(|u+\theta hg|^{\gamma-1}(u+\theta hg)-|u|^{\gamma-1}u\right)\,d\theta g(x)\,dx\right)^2 ds$$
$$\leq (\gamma+1)^2\mathbf{M}\int\limits_0^t \int \int\limits_0^1 \left(|u+\theta hg|^{\gamma-1}(u+\theta hg)-|u|^{\gamma-1}u\right)^2 d\theta\,dx\,ds\cdot\|g\|^2.$$

По теореме Лебега [8, с. 284] в правой части этого неравенства можно перейти к пределу по $h\to 0$ под знаком интеграла и получить соотношение (4.2). Итак, доказано, что функционал $f(u)$ дифференцируем по Гато по подпространству $W_2^1(\mathbb{R}^1)$ в среднем квадратическом и его дифференциал имеет вид (4.1). Заметим, что два предела в среднем квадратическом одной и той же последовательности совпадают с вероятностью 1. Таким образом, обобщенное решение задачи (1.1) является точкой, в которой дифференциал функционала f по подпространству $W_2^1(\mathbb{R}^1)$ обращается в нуль.

Докажем, что функционал $f(u)$ имеет критическую точку, допускающую расслоение. Подставим в $f(u)$ вместо u следующее выражение $u(t,x) = r(t)\phi(p,q)v(y)$, где $r(t)$ — решение уравнения (2.1) с некоторыми действительными A, B и положительным $r(0)$, $\phi(p,q)$ — некоторая неотрицательная дифференцируемая функция, $v(y)$ — решение задачи (2.2), $y = xr^{\gamma-1}(t)\phi^{\gamma-1}(p,q)$. Согласно замечанию 3.1 процесс $r(t)$ существует, единственен и принимает неотрицательные значения. Согласно следствию из леммы 3.7 функция $v(y)$ может быть построена. Тогда для $f(u)$ получим представление

$$f(u) = \frac{1}{2}\,p\phi^{3-\gamma}(p,q)\left(r^{3-\gamma}(t) - r^{3-\gamma}(0)\right) + \frac{az}{2}\,\phi^{\gamma+1}(p,q)\int\limits_0^t r^{\gamma+1}(s)\,ds - \frac{bq}{\gamma+1}\,\phi^2(p,q)\int\limits_0^t r^2(s)\,dw(s).$$

Выберем функцию $\phi(p,q)$ так, чтобы выполнилось равенство

$$\frac{1}{2}\,p\phi^{3-\gamma}(p,q) = \frac{bq}{(\gamma+1)(3-\gamma)B}\,\phi^2(p,q).$$

Тогда $\phi(p,q) = M(p/q)^{1/(\gamma-1)}$ и функционал $f(u)$ принимает вид

$$f(u) = \frac{p}{2}M^{3-\gamma}\Big(\frac{p}{q}\Big)^{\frac{3-\gamma}{\gamma-1}}\left(r^{3-\gamma}(t) - r^{3-\gamma}(0) - (3-\gamma)B\int\limits_0^t r^2(s)\,dw(s)\right) + \frac{az}{2}M^{\gamma+1}\Big(\frac{p}{q}\Big)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}\int\limits_0^t r^{\gamma+1}(s)\,ds.$$

Поскольку процесс $r(t)$ является решением задачи (2.1), то согласно формуле Ито

$$r^{3-\gamma}(t) - r^{3-\gamma}(0) = \frac{(3-\gamma)N}{2}\int\limits_0^t r^{\gamma+1}(s)\,ds + (3-\gamma)B\int\limits_0^t r^2(s)\,dw(s).$$

Следовательно

$$f(u) = \frac{M^{3-\gamma}(3-\gamma)N}{4}\int\limits_0^t r^{\gamma+1}(s)\,ds\left[p^{\frac{2}{\gamma-1}}q^{\frac{3-\gamma}{1-\gamma}} - \mu z p^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}q^{\frac{\gamma+1}{1-\gamma}}\right].$$

Поскольку имеют место равенства

$$
\begin{aligned}
\|u(s,\cdot)\|^2 &= r^{3-\gamma}(s)M^{3-\gamma}p^{\frac{2}{\gamma-1}}q^{\frac{\gamma-3}{\gamma-1}},\\
\|u_x(s,\cdot)\|^2 &= r^{\gamma+1}(s)M^{\gamma+1}p^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}q^{\frac{\gamma+1}{1-\gamma}}z,\\
|||u(s,\cdot)|||^{\gamma+1} &= r^2(s)M^2p^{\frac{2}{\gamma-1}}q^{\frac{\gamma-3}{\gamma-1}},
\end{aligned}
\tag{4.3}
$$

то функционал $f(u)$ можно записать в виде

$$
f(u) = \frac{(3-\gamma)N}{4}M^{2(1-\gamma)}\int\limits_0^t\left[\frac{|||u(s,\cdot)|||^{2(\gamma+1)}}{\|u(s,\cdot)\|^2} - \mu\|u_x(s,\cdot)\|^2\right]ds.
$$

Вычислим дифференциал Гато функционала $f(u)$ по подпространству $W_2^1(\mathbb{R}^1)$:

$$
\begin{aligned}
Df(u) = \frac{(3-\gamma)N}{2}M^{2(1-\gamma)}\int\limits_0^t\int\Bigg[&\frac{|||u(s,\cdot)|||^{\gamma+1}}{\|u(s,\cdot)\|^2}(\gamma+1)u^\gamma(s,x)\\
&- \frac{|||u(s,\cdot)|||^{2(\gamma+1)}}{\|u(s,\cdot)\|^4}u(s,x) + \mu u_{xx}\Bigg]g(x)\,dx\,ds.
\end{aligned}
$$

Используя равенства (4.3), вновь перейдем от функции u к функции v.

$$
\begin{aligned}
Df(u) = \frac{(3-\gamma)N}{4}\Big(\frac{p}{q}\Big)^{\frac{1}{\gamma-1}}&\int\limits_0^t r^{2\gamma-1}(s)\,ds\\
\times&\int\Big[(\gamma+1)\frac{p}{q}v^\gamma(y) - v(y) + \mu\Big(\frac{p}{q}\Big)^2 v_{yy}(y)\Big]g(x)\,dx.
\end{aligned}
$$

Так как функция $v(y)$ является решением задачи (2.2), то $Df(u)=0$ и функция

$$
u(t,x) = r(t)M(p/q)^{1/(\gamma-1)}v\left(xr^{\gamma-1}(t)M^{\gamma-1}p/q\right)
$$

является критической точкой функционала $f(u)$. Значит, она является обобщенным решением задачи (1.1). Согласно определению 1.2 построенное решение допускает расслоение. Теорема 2.1 доказана.

5. Применение расслоения к изучению динамики решения задачи (1.1)

Согласно доказанной теореме 2.1 пространственная форма $v(y)$ и амплитуда $r(t)$ определяют решение задачи (1.1). Исследуем предельное поведение процесса $u(t,x)$ при $t\to+\infty$.

Динамика решения задачи (1.1) как функции от времени полностью описывается процессом $r(t)$. Исследуем предельное поведение процесса $r(t)$, который является решением задачи (2.1).

Теорема 5.1. *Если* $2A < B^2$, *то*

$$\mathbf{P}\Big\{\lim_{t\to+\infty} r(t) = 0\Big\} = 1.$$

Если $2A > B^2$, *то*

$$\mathbf{P}\Big\{\lim_{t\to+\infty} r(t) = +\infty\Big\} = 1.$$

Доказательство. Обозначим $P(r)$ — вероятность выхода процесса $r(t)$ через один из концов интервала $(\epsilon; N)$. Будем считать, что $r(0) = r \in (\epsilon; N)$. Искомая вероятность является решением задачи

$$\begin{gathered} 0.5B^2 r^{2\gamma} P_{rr} + A r^{2\gamma-1} P_r = 0, \qquad r \in (\epsilon; N), \\ P(\epsilon) = \alpha, \qquad P(N) = 1 - \alpha. \end{gathered}$$

Если $\alpha = 1$, то получим вероятность выхода через левый конец, если $\alpha = 0$, то получим вероятность выхода через правый конец. Если $2A \neq B^2$, то $P(r) = C_1 r^\lambda/\lambda + C_2$, где $\lambda = 1 - 2AB^{-2}$.

Пусть $2A < B^2$. Положим $\alpha = 1$. Тогда $P(r) = (r^\lambda - N^\lambda)/(\epsilon^\lambda - N^\lambda)$. В этом случае $\lambda > 0$. Значит, $\lim_{\substack{\epsilon\to 0,\\ N\to+\infty}} P(r) = 1$. Это означает, что в этом случае процесс $r(t)$ с вероятностью 1 достигнет значения 0.

Пусть $2A > B^2$. Положим $\alpha = 0$. Тогда $P(r) = (r^\lambda - \epsilon^\lambda)/(N^\lambda - \epsilon^\lambda)$. В этом случае $\lambda < 0$. Значит, $\lim_{\substack{\epsilon\to 0,\\ N\to+\infty}} P(r) = 1$. Кроме того, $\lim_{\epsilon\to 0} P(r) = 1$, $\forall\, N > \epsilon$. Это означает, что в этом случае процесс $r(t)$ с вероятностью 1 выйдет из интервала $(\epsilon; N)$ через правый конец при любом N, т.е.

$$\mathbf{P}\Big\{\lim_{t\to+\infty} r(t) = +\infty\Big\} = 1.$$

Теорема 5.1 доказана. □

Замечание 5.1. Если $A = 0.5\gamma B^2$, то уравнение (2.1) имеет решение

$$r(t) = \big(r^{1-\gamma}(0) + (1-\gamma)Bw(t)\big)^{1/(1-\gamma)}$$

и в этом случае момент $\tau(\omega)$ — это момент достижения винеровским процессом $w(t)$ уровня $r^{1-\gamma}(0)/((1-\gamma)B)$, т.е. момент обострения решения. Согласно [9, с. 499] распределение величины $\tau(\omega)$ задается известной плотностью и $\mathbf{P}\{0 < \tau(\omega) < +\infty\} = 1$.

Как видим, поведение решения уравнения (1.1) существенно зависит от коэффициентов A и B уравнения (2.1). Выясним, как влияют значения этих коэффициентов на амплитуду и пространственную форму решения. Прежде всего, заметим, что если в уравнении (2.1) произвести замену времени $t = B^{-2}s$, то новый процесс $\tilde{r}(s) = r(B^{-2}s)$ будет решением задачи

$$d\tilde{r}(s) = AB^{-2}\tilde{r}^{2\gamma-1}(s)\,ds + \operatorname{sgn} B\tilde{r}^{\gamma}(s)\,d\tilde{w}(s), \qquad \tilde{r}(0) = r(0),$$

где $\tilde{w}(s) = |B|w(B^{-2}s)$. Таким образом, изменение $|B|$ приводит лишь к изменению масштаба на оси времени. Так что, не ограничивая общности, можно считать $|B| = 1$. Знак числа B также не является существенным, так как заменив процесс $w(t)$ на $-w(t)$, получим уравнение типа (2.1), но с положительным коэффициентом в стохастическом слагаемом. Однако, при этом запись условий теоремы 2.1 становится более громоздкой. Из проведенных рассуждений, а также из условий теоремы 2.1 следует, что определяющее влияние на $u(t,x)$ имеет величина AB^{-2}.

Рассмотрим расслоение решения задачи (1.1)

$$u(t,x) = r(t)\Big(\frac{(\gamma+1)(3-\gamma)Bp}{2bq}\Big)^{\frac{1}{\gamma-1}} v\Big(xr^{\gamma-1}(t)\frac{p}{q}\frac{(\gamma+1)(3-\gamma)B}{2b}\Big). \tag{5.1}$$

Согласно теореме 2.1 представление (5.1) возможно, если $(\gamma - 3)N \neq 0$ и $(3-\gamma)B > 0$. Если в (5.1) положить $t = 0$, то получим начальное условие $u_0(x)$, при котором решение задачи (1.1) имеет вид (5.1)

$$u_0(x) = r(0)\Big(\frac{(\gamma+1)(3-\gamma)Bp}{2bq}\Big)^{\frac{1}{\gamma-1}} v\Big(xr^{\gamma-1}(0)\frac{p}{q}\frac{(\gamma+1)(3-\gamma)B}{2b}\Big).$$

Теперь рассмотрим пространственную форму $v(y)$. Как показано в доказательстве леммы 3.7 функция $v(y)$ связана с решением задачи (3.1) равенством

$$v(y) = V\left(M^{1-\gamma}|B|\sqrt{\frac{|\gamma-3|}{a}\Big|\frac{A}{B^2} - \frac{\gamma-2}{2}\Big|\,\frac{\overline{q}}{\overline{p}}\,y}\right).$$

Заметим, что функция $V(Y)$ является решением задачи (3.1), параметры которой не зависят от A и B. Значит, изменение величины AB^{-2} приводит лишь к перемещению точки y_0, которая является точкой фронта функции $v(y)$. Если $2AB^{-2} \to \gamma - 2$, то $y_0 \to +\infty$. Если $|AB^{-2}| \to +\infty$, то $y_0 \to 0$. В расслоении решения задачи (1.1) перейдём от функции v к функции V.

$$u(t,x) = r(t)\Big(\frac{(\gamma+1)(3-\gamma)Bp}{2bq}\Big)^{\frac{1}{\gamma-1}} \times V\Bigg(xr^{\gamma-1}(t)|B|\sqrt{\frac{|\gamma-3|}{a}\Big|\frac{A}{B^2}-\frac{\gamma-2}{2}\Big|}\Bigg).$$

При $t=0$ получаем

$$u_0(x) = r_0\Big(\frac{(\gamma+1)(3-\gamma)Bp}{2bq}\Big)^{\frac{1}{\gamma-1}} \times V\Bigg(xr_0^{\gamma-1}|B|\sqrt{\frac{|\gamma-3|}{a}\Big|\frac{A}{B^2}-\frac{\gamma-2}{2}\Big|}\Bigg).$$

Варьируя в допустимых пределах параметры r_0, V_0, A и B, мы можем придать амплитуде и фронту начальной функции $u_0(x)$ любые положительные значения. Зафиксировав значения этих параметров, мы задаём начальное условие $u_0(x)$ и однозначно определяем решение задачи (1.1), соответствующее выбранному $u_0(x)$.

Заключение

Из доказанного следует, что поведение решения задачи (1.1) с течением времени зависит от того $\gamma \in (1;3)$ или $\gamma \in (3;+\infty)$.

Пусть $\gamma \in (1;3)$. Выбрав $2A < B^2$, получим согласно теореме 5.1, что амплитуда решения стремится к нулю с вероятностью 1, а фронт решения стремится к $+\infty$, то есть решение с течением времени угасает, растекаясь по всему пространству. Так как в этом случае $N < 0$, то получим первый тип пространственной формы, указанный в лемме 3.1. Выбрав $2A > B^2$, получим согласно теореме 5.1, что амплитуда решения с вероятностью 1 за конечное время неограниченно возрастает, а фронт решения устремляется к нулю, то есть возникает режим с обострением. Так как в этом случае $N > 0$, то получаем второй тип пространственной формы, указанный в лемме 3.4.

В случае $\gamma \in (3;+\infty)$ картина аналогичная, но при $2A > B^2$ пространственная форма будет иметь первый тип, а при $2A < B^2$ — второй тип.

Сравним полученные результаты с аналогичными результатами для детерминированных уравнений. В классических задачах нелинейной теплопроводности ([5, 10]) нелинейное слагаемое, как правило, имеет фиксированный знак: оно положительно, если описывает источник тепла, и отрицательно, если описывает поглотитель тепла.

Для стохастических уравнений вида (1.1) знак нелинейного слагаемого не определен и с течением времени меняется случайным образом в зависимости от поведения винеровского процесса $w(t)$. Для детерминированных уравнений с источником при $\gamma > 1$ решение развивается в режиме с обострением того или иного вида (см. [10, с. 221]). Для стохастических уравнений возникновение или невозникновение режима с обострением зависит не только от величины параметра γ, но и от типа пространственной формы начальной функции $u_0(x)$.

В заключение заметим, что как в детерминированном случае, так и для стохастических уравнений случай $\gamma = 3$ является особым. Для детерминированных уравнений этот случай описан в [5, с. 260–262]. Для стохастических уравнений вида (1.1) автору не удалось получить уравнение для процесса $r(t)$.

Благодарности. Автор выражает глубокую признательность рецензенту за внимание, проявленное к работе, и высказанные замечания.

Литература

[1] И. И. Гихман, А. В. Скороход, *Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения.* Киев, Наук. думка, 1982, 536 с.

[2] С. И. Похожаев, *Об одном подходе к нелинейным уравнениям* // ДАН СССР. Математика, **241.6** (1979), 1327–1331.

[3] S. A. Melnik, *The group analysis of stochastic differential equations* // Ann. Uni. Sci. Budapest, **21** (2002), 69–79.

[4] Э. Камке, *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям.* Москва, Наука, 1971, 576 с.

[5] А. А. Самарский, В. П. Галактионов, С. П. Курдюмов, А. П. Михайлов, *Режимы с обострениями в задачах для квазилинейных параболических уравнений.* Москва, Наука, 1987, 475 с.

[6] Х.-С. Го, *Гауссовские меры в банаховых пространствах.* Москва, Мир, 1979, 176 с.

[7] С. Г. Крейн, *Функциональный анализ.* Москва, Наука, 1972, 544 с.

[8] А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин, *Элементы теории функций и функционального анализа.* Москва, Наука, 1972, 496 с.

[9] И. И. Гихман, А. В. Скороход, *Введение в теорию случайных процессов.* Москва, Наука, 1977, 567 с.

[10] С. П. Курдюмов, *Собственные функции горения нелинейной среды и конструктивные законы построения ее организации* // Современные проблемы математики, физики и вычислительной техники. Москва, Наука, (1982), 217–243.

Сведения об авторах

Сергей Анатольевич Мельник

Донецкий национальный университет,
ул. Университетская, 24,
83055, Донецк
Украина
E-Mail: `melnik@matfak.dongu.donetsk.ua`