Український математичний вісник
Том 3 **(2006)**, № 2, 199 – 211

К теории граничного поведения пространственных отображений

Андрей А. Игнатьев и Владимир И. Рязанов

(*Представлена В. Я. Гутлянским*)

Аннотация. В работе сформулирован ряд теорем о непрерывной и гомеоморфной продолжимости Q-гомеоморфизмов на регулярные границы и, в частности, при мажоранте Q конечного среднего колебания в точках границы, доказано обобщение известной теоремы Геринга–Мартио о продолжении квазиконформных отображений на границу. Результаты применимы к различным классам отображений с конечным искажением, которые интенсивно исследуются в последние годы в работах многих ведущих специалистов по теории отображений и, в частности, к отображениям класса Соболева.

2000 MSC. 30C65, 30C75.

Ключевые слова и фразы. Отображение с конечным искажением, Q-гомеоморфизм, класс Соболева, конечное среднее колебание.

1. Введение

Данная статья является продолжением нашей предыдущей работы [1], где были доказаны теоремы устранимости изолированных особенностей пространственных отображений, а также аналог теоремы Пенлеве для аналитических функций об устранимости сингулярностей длины нуль. В указанной работе можно также найти предысторию вопроса и дальнейшие ссылки. Здесь напомним только основные определения, которые используются в дальнейшем.

Пусть D — область в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, и пусть $Q : D \to [1, \infty]$ — измеримая функция. Гомеоморфизм $f : D \to \overline{\mathbb{R}}^n = \mathbb{R}^n \bigcup \{\infty\}$ называется *Q-гомеоморфизмом*, если

$$M(f\Gamma) \leq \int\limits_D Q(x) \cdot \rho^n(x)\ dm(x) \tag{1.1}$$

Статья поступила в редакцию 28.11.2005

для любого семейства Γ путей в D и любой допустимой функции ρ для Γ. Здесь непрерывность отображений понимается относительно сферической (хордальной) метрики s в $\overline{\mathbb{R}}^n$, $s(x,y)=|\pi(x)-\pi(y)|$, где π — стереографическая проекция $\overline{\mathbb{R}}^n$ на сферу $S^n(\frac{1}{2}e_{n+1},\frac{1}{2})$ в $\mathbb{R}^{n+1}$:

$$s(x,\infty)=\frac{1}{\sqrt{1+|x|^2}}\ ,\quad s(x,y)=\frac{|x-y|}{\sqrt{1+|x|^2}\sqrt{1+|y|^2}}\ ,\quad x\neq\infty\neq y.$$

Напомним, что борелевская функция $\rho:\mathbb{R}^n\to[0,\infty]$ называется *допустимой* для семейства кривых Γ в $\mathbb{R}^n$, пишем $\rho\in adm\,\Gamma$, если

$$\int\limits_{\gamma}\rho(x)\,|dx|\geq 1 \tag{1.2}$$

для всех $\gamma\in\Gamma$. *Модуль* семейства Γ определяется равенством

$$M(\Gamma)=\inf_{\rho\in adm\,\Gamma}\int\limits_{D}\rho^n(x)\,dm(x)\,. \tag{1.3}$$

Основной целью теории Q-гомеоморфизмов является изучение взаимосвязей свойств отображения f со свойствами мажоранты $Q(x)$. По теореме 3.1 в [1] любой гомеоморфизм $f:D\to\mathbb{R}^n$ класса $W^{1,n}_{loc}$ с $f^{-1}\in W^{1,n}_{loc}$ является Q-гомеоморфизмом с $Q(x)$ равной внутренней дилатации $K_I(x,f)$. В частности, таков любой гомеоморфизм $f:D\to\mathbb{R}^n$ класса $W^{1,n}_{loc}$ с $K_I(x,f)\in L^1_{loc}$.

Если отображение $f:D\to\mathbb{R}^n$ имеет первые частные производные в точке $x\in D$, то *внутренняя дилатация* отображения f в точке x определяется равенством

$$K_I(x,f)=\begin{cases}\frac{|J(x,f)|}{l(f'(x))^n}, & \text{если } J(x,f)\neq 0,\\ 1, & \text{если } f'(x)=0\end{cases} \tag{1.4}$$

и $K_I(x,f)=\infty$ в остальных случаях. Аналогично, *внешняя дилатация* отображения f в точке x определяется равенством

$$K_O(x,f)=\begin{cases}\frac{|f'(x)|^n}{|J(x,f)|}, & \text{если } J(x,f)\neq 0,\\ 1, & \text{если } f'(x)=0\end{cases} \tag{1.5}$$

и $K_O(x,f)=\infty$ в остальных случаях. *Максимальная дилатация*, или просто *дилатация*, отображения f в точке x есть величина

$$K(x,f)=\max\left(K_O(x),K_I(x)\right). \tag{1.6}$$

Здесь, как обычно, $f'(x)$ — якобиева матрица отображения f, $J(x,f) = \det f'(x)$ — его якобиан, $|f'(x)|$ — операторная норма $f'(x)$, т.е.

$$|f'(x)| \,=\, \max\left\{\,|f'(x)h| : h \in \mathbb{R}^n,\, |h| = 1\,\right\},$$

и

$$l(f'(x)) \,=\, \min\left\{\,|f'(x)h| : h \in \mathbb{R}^n,\, |h| = 1\,\right\}.$$

Отметим, что

$$K_I(x,f) \le K_O^{n-1}(x,f)\,, \quad K_O(x,f) \le K_I^{n-1}(x,f) \tag{1.7}$$

и, в частности, $K_O(x,f), K_I(x,f)$ и $K(x,f)$ одновременно конечны или бесконечны. Неравенство $K(x,f) < \infty$ эквивалентно условию, что $\det\, f'(x) \neq 0$ или $f'(x) = 0$.

Отображение $f : D \to \mathbb{R}^n$ называется *отображением с конечным искажением*, если $f \in W^{1,n}_{loc}$, $J(x,f) \ge 0$ и $K_O(x,f) < \infty$ п.в. Иногда в литературе условие $f \in W^{1,n}_{loc}$ заменяется на более слабое условие $f \in W^{1,1}_{loc}$. Если к тому же дилатация $K_O(x,f)$ ограничена константой п.в., то мы получаем *отображения с ограниченным искажением* по Решетняку или, в других терминах, *квазирегулярные отображения.*

Напомним, что по Джону–Ниренбергу вещественная функция $\varphi \in L^1_{loc}(D)$ называется *функцией ограниченного среднего колебания* в D, пишем $\varphi \in BMO(D)$ или просто $\varphi \in BMO$, если

$$\|\varphi\|_* = \sup_{B\subset D} \fint_B |\varphi(x) - \varphi_B|\; dm(x) < \infty, \tag{1.8}$$

где супремум берется по всем шарам B в D и где

$$\varphi_B = \fint_B \varphi(x)\; dm(x) = \frac{1}{|B|} \int_B \varphi(x)\; dm(x) \;- \tag{1.9}$$

среднее значение функции φ по шару B. Известно, что $L^\infty(D) \subset BMO(D) \subset L^p_{loc}(D)$ для любого $1 \le p < \infty$. BMO функции связаны во многих отношениях с квазиконформными и квазирегулярными отображениями.

Пусть теперь D — область в $\mathbb{R}^n$, $n \ge 1$. Будем говорить, что функция $\varphi : D \to \mathbb{R}$ имеет *конечное среднее колебание* в точке $x_0 \in \overline{D}$, пишем $\varphi \in FMO$ в x_0, если

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \fint_{D(x_0,\varepsilon)} |\varphi(x) - \overline{\varphi}_\varepsilon(x_0)|\; dm(x) \;<\; \infty, \tag{1.10}$$

где для малых $\varepsilon > 0$

$$\overline{\varphi}_\varepsilon(x_0) = \fint\limits_{D(x_0,\varepsilon)} \varphi(x)\ dm(x) = \frac{1}{|D(x_0,\varepsilon)|} \int\limits_{D(x_0,\varepsilon)} \varphi(x)\ dm(x) - \qquad (1.11)$$

среднее значение функции $\varphi(x)$ по множеству

$$D(x_0,\varepsilon) = D \bigcap B(x_0,\varepsilon), \qquad (1.12)$$

где

$$B(x_0,\varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| < \varepsilon\}$$

и предполагается, что $\varphi(x)$ интегрируема по множеству $D(x_0,\varepsilon)$ для малых $\varepsilon > 0$.

Также будем говорить, что $\varphi : D \to \mathbb{R}$ — *функция конечного среднего колебания в области* D, пишем $\varphi \in FMO(D)$, или просто $\varphi \in FMO$, если φ имеет конечное среднее колебание в каждой точке $x \in D$. Наконец, будем говорить, что функция $\varphi : D \to \mathbb{R}$ — конечного среднего колебания в замыкании D, пишем $\varphi \in FMO(\overline{D})$, если φ имеет конечное среднее колебание в каждой точке $x \in \overline{D}$.

Заметим, что по предложению 2.1 в [1] функция φ имеет конечное среднее колебание в точке x_0, если для некоторого набора чисел $\varphi_\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \fint\limits_{D(x_0,\varepsilon)} |\varphi(x) - \varphi_\varepsilon|\ dm(x)\ <\ \infty. \qquad (1.13)$$

В частности, если в точке $x_0 \in \overline{D}$

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \fint\limits_{D(x_0,\varepsilon)} |\varphi(x)|\ dm(x)\ <\ \infty, \qquad (1.14)$$

то φ имеет конечное среднее колебание в точке x_0.

Будем говорить, что область $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ удовлетворяет *условию удвоения меры* (*Лебега*) в точке $x_0 \in \overline{D}$, если

$$|B(x_0, 2\varepsilon) \cap D|\ \leq\ c \cdot |B(x_0,\varepsilon) \cap D| \qquad (1.15)$$

для некоторого $c > 0$ и для всех достаточно малых $\varepsilon > 0$. Заметим, что условию удвоения меры во всех граничных точках удовлетворяют, в частности, области с гладкими границами, а также ограниченные выпуклые области.

По лемме 2.1 в [1], если область $D \subset \mathbb{R}^n$ удовлетворяет условию удвоения меры в $0 \in \overline{D}$ и неотрицательная функция $\varphi : D \to \mathbb{R}$ имеет конечное среднее колебание в 0, то при $n \geq 3$

$$\int\limits_{D(0,\varepsilon_0)} \frac{\varphi(x)\, dm(x)}{\left(|x| \log \frac{1}{|x|}\right)^n} \; < \; \infty \; , \tag{1.16}$$

т.е. указанный сингулярный интеграл сходится при некотором $\varepsilon_0 > 0$, а по следствию 2.3 при $n \geq 2$

$$\int\limits_{D \bigcap A(\varepsilon,\varepsilon_0)} \frac{\varphi(x)\, dm(x)}{\left(|x| \log \frac{1}{|x|}\right)^n} \; = \; O\left(\log\log \frac{1}{\varepsilon}\right) \tag{1.17}$$

при $\varepsilon \to 0$ и некотором $\varepsilon_0 > 0$, где

$$A(\varepsilon, \varepsilon_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : \varepsilon < |x| < \varepsilon_0\}. \tag{1.18}$$

2. Основная лемма о продолжении Q-гомеоморфизмов

Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, — область. ∂D называется *сильно достижимой*, если для любых невырожденых континуумов E и F в $\overline{D}$

$$M(\Delta(E, F; D)) \; > \; 0 \tag{2.1}$$

и *слабо плоской*, если для любых невырожденных континуумов E и F в $\overline{D}$ с $E \cap F \neq \emptyset$

$$M(\Delta(E, F; D)) \; = \; \infty, \tag{2.2}$$

где $\Delta(E, F; D)$ — семейство всех путей, соединяющих E и F в D. Известно, что любая слабо плоская граница является сильно достижимой, см. лемму 5.6 в [2].

Область $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, называется *локально связной в точке* $x_0 \in \partial D$, если x_0 имеет сколь угодно малые окрестности U, для которых множества $U \cap D$ связны. Известно, например, что любая жорданова область D в $\mathbb{R}^n$ локально связна во всех точках своей границы ∂D, см. [3, с. 66].

Лемма 2.1. *Пусть $f : D \to \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, — Q-гомеоморфизм и пусть область D локально связна в точке $x_0 \in \partial D$, а область $D' = f(D)$ имеет сильно достижимую границу. Если*

$$\int\limits_{D_{x_0,\varepsilon}} Q(x) \cdot \psi^n_{x_0,\varepsilon}(|x|)\, dm(x) \; = \; o(I^n_{x_0}(\varepsilon)) \tag{2.3}$$

при $\varepsilon \to 0$, *где* $D_{x_0,\varepsilon} = \{x \in D : \varepsilon < |x - x_0| < \varepsilon_0\}$, $\varepsilon_0 = \delta(x_0) < \operatorname{diam} D$, *и* $\psi_{x_0,\varepsilon}(t)$ — *неотрицательная измеримая (по Лебегу) функция на* $(0,\infty)$ *такая, что*

$$0 < I_{x_0}(\varepsilon) = \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi_{x_0,\varepsilon}(t)\, dt < \infty\,, \quad \varepsilon \in (0,\varepsilon_0)\,, \tag{2.4}$$

то f *может быть продолжен в* x_0 *по непрерывности.*

Кроме того, если указанные условия выполнены в каждой точке $x_0 \in \partial D$ *и, кроме того,* $Q \in L^1(D \cap U)$ *для некоторой окрестности* U *границы* D*, то* f *имеет гомеоморфное продолжение в* $\overline{D}$.

Доказательство. Покажем, что предельное множество $E = C(x_0, f) = \{y \in \overline{\mathbb{R}^n} : y = \lim_{k\to\infty} f(x_k), x_k \to x_0, x_k \in D\}$ состоит из единственной точки. Заметим, что E — континуум, поскольку область D локально связна в точке x_0. Предположим, что континуум E — невырожденный.

Пусть Γ_ε — семейство всех путей, соединяющих сферы $S_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| = \varepsilon\}$ и $S_0 = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| = \varepsilon_0\}$ в $D_{x_0,\varepsilon}$. Пусть $\psi^*_{x_0,\varepsilon}$ — борелевская функция, такая что $\psi^*_{x_0,\varepsilon}(t) = \psi_{x_0,\varepsilon}(t)$ для п.в. $t \in (0,\infty)$. Такая функция $\psi^*_{x_0,\varepsilon}$ существует по теореме Лузина, см., напр., 2.3.5. в [4] или [5, с. 69]. Тогда функция

$$\rho_\varepsilon(x) = \begin{cases} \psi^*_{x_0,\varepsilon}(|x - x_0|)/I_{x_0}(\varepsilon), & x \in D_{x_0,\varepsilon}, \\ 0, & x \in \mathbb{R}^n \setminus D_{x_0,\varepsilon} \end{cases}$$

является допустимой для Γ_ε и, следовательно,

$$M(f\Gamma_\varepsilon) \le \int\limits_D Q(x) \cdot {\rho_\varepsilon}^n(|x|)\; dm(x)\;,$$

т.е. $M(f\Gamma_\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ ввиду (2.3).

С другой стороны, $M(f\Gamma_\varepsilon) \ge M_0 = M(\Delta(fS_0, E; D'))$ и мы имеем, что $M_0 > 0$ согласно условию сильной достижимости границы $\partial D'$. Полученное противоречие опровергает предположение.

Наконец, утверждение о гомеоморфности продолжения следует из леммы 5.20 в [2]. □

Следствие 2.1. *Если область* D *является локально связной на* ∂D *и условие* (2.3) *выполнено в каждой точке* $x_0 \in \partial D$, $Q \in L^1(D)$ *и* $\partial D'$ — *слабо плоская, то* f *продолжается до гомеоморфизма* $\overline{f} : \overline{D} \to \overline{D'}$.

3. Области квазиэкстремальной длины

Область $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ называется областью *квазиэкстремальной длины*, сокр. *QED областью*, если

$$M(\Delta(E, F; \overline{\mathbb{R}^n}) \leq K \cdot M(\Delta(E, F; D)) \tag{3.1}$$

для некоторого $K \geq 1$ и для любых непересекающих континуумов E и F в D, см. [6]. Известно, что равенство (3.1) также выполнено в QED области для каждой пары непересекающихся континуумов E и F в $\overline{D}$, см. лемму 6.11 в [7, с. 35] и теорему 2.8 в [8, с. 173]. Последнее также влечет (3.1) для невырожденых пересекающихся континуумов E и F в $\overline{D}$. Следовательно, QED область имеет слабо плоскую границу, ср. лемму 3.1 в [9, с. 196]. Любая QED область является *квазивыпуклой*, т.е. каждую пару точек x_1 и $x_2 \in D$ можно соединить спрямляемой кривой γ в D такой, что

$$s(\gamma) \ \leq \ a \cdot |x_1 - x_2| \, , \tag{3.2}$$

см. лемму 2.7 в [6, с. 184]. Поэтому любая QED область локально связна на границе, ср. также лемму 2.11 в [6, с. 187], и [9, с. 190].

Область $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ называется *равномерной областью*, если неравенства (3.2) и

$$\min_{i=1,2} \ \ s(\gamma(x_i, x)) \ \leq \ b \cdot d(x, \partial D) \tag{3.3}$$

выполнены для некоторого γ и для всех $x \in \gamma$, где $\gamma(x_i, x)$ — часть γ между x_i и x, см. [10]. Любая равномерная область является QED областью, но существуют QED области, которые не являются равномерными, см. [6]. Ограниченные выпуклые области дают простые примеры равномерных областей. Отметим, что QED области удовлетворяют условию удвоения меры в любой своей граничной точке $\mathbb{R}^n$, см. лемму 2.13 в [6, с. 188]. Отметим также, что граница такой области имеет нулевую меру Лебега, см. следствие 2.16 в [6, с. 189].

Поскольку QED области локально связны на границе и имеют слабо плоские границы и, следовательно, сильно достижимые границы, непосредственно из леммы 2.1 получаем приведенные ниже теоремы о непрерывной и гомеоморфной продолжимости на границу Q-гомеоморфизмов между QED областями.

Теорема 3.1. *Пусть f — Q-гомеоморфизм между QED областями D и D' в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, и условие* (2.3) *выполнено в точке $x_0 \in \partial D$. Тогда существует предел $f(x)$ при $x \to x_0$. Если дополнительно $Q \in$*

$L^1(D \cap U)$, где U некоторая окрестность ∂D, и (2.3) выполнено в каждой точке $x_0 \in \partial D$, то f допускает гомеоморфное продолжение $\overline{f} : \overline{D} \to \overline{D'}$.

Теорема 3.1 представляет собой далеко идущее обобщение известной теоремы Геринга–Мартио о гомеоморфном продолжении на границу для квазиконформных отображений между QED областями, см. [6, с. 196], ср. также с теоремой 3.16 в [2] для Q-гомеоморфизмов с мажорантой Q класса $BMO(D)$. В частности, выбирая в (2.3) $\psi(t) = 1/(t \log \frac{1}{t})$, имеем следующую теорему.

Теорема 3.2. *Пусть f — Q-гомеоморфизм между QED областями D и D' в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Если в каждой точке $x \in \partial D$*

$$q(r) = O\left(\left[\log \frac{1}{r}\right]^{n-1}\right) \tag{3.4}$$

при $r \to 0$, где $q(r)$ — среднее значение $Q(y)$ на пересечении сферы $|y - x| = r$ с областью D, то f продолжается до гомеоморфизма $\overline{f} : \overline{D} \to \overline{D'}$.

Замечание 3.1. Теорема 3.2 остается в силе, если в качестве $q(r)$ взять средние $Q(y)$ над всей сферой $|y - x| = r$, формально продлевая $Q(y)$ нулем вне области D. Другие примеры критериев гомеоморфной продолжимости Q-гомеоморфизмов между QED областями на границу могут быть получены из теоремы 3.1 при выборе функционального параметра ψ в виде $1/(t \log \frac{1}{t})$, $1/(t \log \frac{1}{t} \log\log \frac{1}{t})$ и т. д.

Один из наиболее важных случаев представлен функцией $\psi(t) = 1/(t \log \frac{1}{t})$. QED области, области с гладкими границами и ограниченные выпуклые области дают наиболее простые примеры областей, удовлетворяющих условию удвоения меры (1.15) во всех граничных точках. Ограничимся следующей теоремой, которая получается по следствию 2.3 в [1], см. введение, и теореме 3.1.

Теорема 3.3. *Пусть f — Q-гомеоморфизм между ограниченными QED областями D и D' в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Если $Q(x)$ имеет конечное среднее колебание в каждой точке $x_0 \in \partial D$, то f допускает гомеоморфное продолжение $\overline{f} : \overline{D} \to \overline{D'}$.*

4. Нуль-множества для экстремальных длин

Замкнутое множество $X \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, называется *нуль множеством для экстремальных длин*, сокр. NED *множеством*, если

$$M(\Delta(E, F; \mathbb{R}^n)) = M(\Delta(E, F; \mathbb{R}^n \backslash X)) \tag{4.1}$$

для любых двух непересекающихся континуумов E и $F \subset \mathbb{R}^n \backslash X$.

Замечание 4.1. Известно, что, если $X \subset \mathbb{R}^n$ является NED множеством, то

$$|X| = 0\,, \tag{4.2}$$

X локально не разбивает $\mathbb{R}^n$, и

$$\dim X \leq n - 2\,. \tag{4.3}$$

Обратно, если множество $X \subset \mathbb{R}^n$ — замкнутое и

$$\Lambda_{n-1}(X) = 0\,, \tag{4.4}$$

то X — NED множество, см. [11].

Здесь $\Lambda_{n-1}(X)$ обозначает $(n-1)$-мерную хаусдорфову меру подмножества X в $\mathbb{R}^n$. Пусть $f(X)$ обозначает предельное множество отображения f на множестве $X \subset \partial D$, т.е.

$$C(X, f) = \{y \in \overline{\mathbb{R}}^n : y = \lim_{k \to \infty} f(x_k),\ x_k \to x_0 \in X,\ x_k \in D\}.$$

Заметим, что дополнения NED множеств в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, являются весьма частным случаем QED областей, рассмотренных в предыдущей секции. Таким образом, рассуждая локально, получаем из леммы 2.1 следующее утверждение.

Предложение 4.1. *Пусть $X \subset D$ и $f : D \backslash X \to \overline{\mathbb{R}}^n$, $n \geq 2$, является Q-гомеоморфизмом. Предположим, что X и $C(X, f)$ являются NED множествами и Q интегрируема в окрестности множества X. Если условие* (2.3) *выполнено в каждой точке $x_0 \in X$, то f имеет гомеоморфное продолжение на D.*

Отсюда, имеем следующую теорему при $\psi(t) = 1/(t \log 1/t)$ в (2.3) в качестве одного из наиболее важных следствий предложения 4.1.

Теорема 4.1. *Если $Q \in L^1_{loc}(D)$ имеет конечное среднее колебание в каждой точке NED множества $X \subset D$, то любой Q-гомеоморфизм $f : D \backslash X \to \overline{\mathbb{R}}^n$, $n \geq 2$, с NED множеством $C(X, f)$ имеет гомеоморфное продолжение на D.*

В силу замечания 4.1 имеем следующее заключение из теоремы 4.1.

Следствие 4.1. *Q-гомеоморфизм $f : D\backslash X \to \overline{\mathbb{R}^n}$ гомеоморфно продолжим в D, если*

$$\Lambda_{n-1}(X) = \Lambda_{n-1}(C(X, f)) = 0 \tag{4.5}$$

и $Q \in L^1_{loc}(D)$ имеет конечное среднее колебание в каждой точке замкнутого множества $X \subset D$.

В частности, Q-гомеоморфизм $f : D\backslash X \to \overline{\mathbb{R}}^n$ гомеоморфно продолжим в D, если все точки замкнутого множества $X \subset D$ с условием (4.5) являются точками Лебега для функции $Q \in L^1_{loc}(D)$ или, более общо, если

$$\overline{\lim_{\varepsilon \to 0}} \ \ \fint_{B(x,\ \varepsilon)} Q(y)\ dm(x) < \infty \qquad \forall\, x \in X. \tag{4.6}$$

Другими словами, используя известный термин теории аналитических функций, данные типы сингулярностей Q-гомеоморфизмов $f : D\backslash X \to \overline{\mathbb{R}}^n$ являются *несущественными*, т.е. f продолжается на X по непрерывности до гомеоморфизма в D.

5. Отображения с конечным искажением

Приведенные выше результаты применимы, в частности, к так называемым BMO-квазиконформным отображениям, гомеоморфизмам конечного искажения длины, см. [2] и [12, 13], и к отображениям, квазиконформным в среднем. Результаты работы имеют также множество соответствующих следствий для других классов отображений с конечным искажением. Сформулируем некоторые из них в явном виде. Все они основаны на теореме 3.1 в [1], см. Введение. Напомним, что сингулярные множества $(n-1)$-мерной хаусдорфовой нулевой меры являются устранимыми для класса Соболева $W^{1,n}$, см., напр., [14, с. 16].

Начнем с изолированных особенностей гомеоморфизмов из локальных классов Соболева $W^{1,n}_{loc}$. Непосредственно из теорем 3.1, 4.1 и следствия 3.1 в [1] приходим к следующей теореме.

Следствие 5.1. *Пусть D — область в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, $x_0 \in D$, и $f : D\backslash\{x_0\} \to \mathbb{R}^n$ — гомеоморфизм класса $W^{1,n}_{loc}$ и пусть его внутренняя дилатация $K_I(x, f)$ мажорируется функцией $Q(x)$ с конечным средним колебанием в точке x_0. Тогда f имеет гомеоморфное продолжение на D.*

В частности, заключение следствия 5.1 имеет место, если x_0 — точка Лебега $K_I(x,f)$ или если, более общо,

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \;\; \fint_{B(x_0,\varepsilon)} K_I(x,f)\; dm(x) \; < \; \infty\; . \tag{5.1}$$

Аналоги известной теоремы Пенлеве также имеют место для гомеоморфизмов класса $W^{1,n}_{loc}$, ср. [15]. Следующее утверждение вытекает непосредственно из теорем 3.1, 6.1 и следствия 5.2 в [1].

Следствие 5.2. *Пусть D — область в $\mathbb{R}^n$, $n\geq 2$, X — замкнутое подмножество D нулевой длины и пусть $f: D\backslash X\to\mathbb{R}^n$ — гомеоморфизм класса $W^{1,n}_{loc}(D\backslash X)$. Если $K_I(x,f)\;\leq\; Q(x)$ и мажоранта $Q(x)$ имеет конечное среднее колебание в любой точке $x_0\in X$, то f допускает гомеоморфное продолжение на D.*

В частности, заключение следствия 5.2 имеет место, если условие (5.1) выполнено для каждой точки $x_0\in X$.

Замечание 5.1. Как ясно из известного примера (Жуковского) конформного отображения f дополнения отрезка на дополнение замкнутого единичного круга в $\mathbb{C}$, условие нулевой длины для сингулярных множеств является существенным, и результаты не могут быть распространены (без дополнительных геометрических условий) на сингулярные множества конечной положительной длины даже при наилучшей возможной дилатации $K(x,f)\equiv 1$.

В этом контексте отметим интересную работу [16], где доказана устранимость для ограниченных квазиконформных отображений замкнутых множеств с нулевыми $(n-1)$-мерными проекциями на координатные гиперплоскости, которые могут быть положительной длины. Однако, это становится возможно только благодаря дополнительному условию о нулевых проекциях.

Результаты о гомеоморфной продолжимости Q-гомеоморфизмов могут быть распространены на сингулярные множества X положительной длины при дополнительных условиях на размер предельного множества $C(X,f)$.

Следующее утверждение получается непосредственно из теоремы 3.1 в [1] и следствия 4.1, см. также замечание 4.1.

Следствие 5.3. *Пусть D — область в $\mathbb{R}^n$, $n\geq 2$, $f: D\backslash X\to\mathbb{R}^n$ — гомеоморфизм класса $W^{1,n}_{loc}(D\backslash X)$ и пусть X — замкнутое подмножество D с*

$$\Lambda_{n-1}(X) \;=\; \Lambda_{n-1}(C(X,f)) \;=\; 0\;. \tag{5.2}$$

Если $K_I(x,f) \le Q(x)$ *и мажоранта* $Q(x) \in L^1_{loc}(D)$ *имеет конечное среднее колебание в каждой точке* $x_0 \in X$, *то* f *допускает гомеоморфное продолжение на* D.

Заключение следствия 5.3 имеет место, в частности, при условии (5.1) в каждой точке $x_0 \in X$.

Наконец, комбинируя теорему 3.1 в [1] и теорему 3.3, получаем следующее обобщение результата Геринга–Мартио о квазиконформных отображениях, см. [5, с. 196], ср. также [12].

Следствие 5.4. *Пусть* $f \in W^{1,n}_{loc}(D)$ *— гомеоморфизм между ограниченными QED областями* D *и* D' *в* $\mathbb{R}^n, n \ge 2$. *Если* $K_I(x,f) \le Q(x)$, *где* $Q(x) \in L^1(D)$ *имеет конечное среднее колебание в каждой точке* $x_0 \in \partial D$, *то* f *имеет гомеоморфное продолжение* $\overline{f} : \overline{D} \to \overline{D'}$.

Здесь также можно использовать условия типа (3.4), см. замечание 3.1.

Следствие 5.5. *Если гомеоморфизм* $f \in W^{1,n}$ *единичного шара* $\mathbb{B}^n$, $n \ge 2$, *на себя с* $f(0) = 0$ *удовлетворяет условию*

$$\overline{\lim_{\varepsilon \to 0}} \quad \fint_{B^*(x_0,\varepsilon)} K_I(x,f)\ dm(x) < \infty \qquad \forall\, x_0 \in \partial\mathbb{B}^n, \tag{5.3}$$

где $B^*(x_0,\varepsilon) = B(x_0,\varepsilon) \cap \mathbb{B}^n$, *то гомеоморфизм* f *продолжим по отражению через* $\partial\mathbb{B}^n$ *до гомеоморфизма* $\mathbb{R}^n$ *класса* $f \in W^{1,n}_{loc}$.

Благодарности. Исследование было частично поддержано грантами Хельсинского университета и Израильского института технологий, а также грантом 01.07/00241 Государственного фонда фундаментальных исследований Украины.

Постскриптум. Работа посвящена светлой памяти Андрея, который умер 3 апреля 2004 года от рака в возрасте 25 лет. Здесь подводится итог нашим с ним совместным исследованиям по теории граничного поведения пространственных отображений.

Литература

[1] А. Игнатьев и В. Рязанов, *Конечное среднее колебание в теории отображений* // Украинский математический вестник **2** (2005) N 3, 395–417.

[2] O. Martio, V. Ryazanov, U. Srebro, and E. Yakubov, *On Q-homeomorphisms* // Ann. Acad. Sci. Fenn. **30** (2005), N 1, 1–21.

[3] R. L. Wilder, *Topology of Manifolds*, AMS, New York, 1949.

[4] H. Federer, *Geometric Measure Theory*, Springer, Berlin etc., 1969.

[5] S. Saks, *Theory of the Integral*, New York, Dover Publ. Inc., 1964.

[6] F. W. Gehring and O. Martio, *Quasiextremal distance domains and extension of quasiconformal mappings* // J. Analyse Math. **24** (1985), 181–206.

[7] O. Martio and M. Vuorinen, *Whitney cubes, $p-$capacity and Minkowski content* // Expo. Math. **5** (1987), 17–40.

[8] D. A. Herron and P. Koskela, *Quasiextremal distance domains and quasiconformal mappings onto circle domains* // Complex Variables Theory Appl. **15** (1990), N 3, 167–179.

[9] D. A. Herron and P. Koskela, *Locally uniform domains and quasiconformal mappings* // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. AI. Math. **20** (1995), 187–206.

[10] O. Martio and J. Sarvas, *Injectivity theorems in plane and space* // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. AI. Math. **4** (1978/1979), 383–401.

[11] J. Vaisala, *On the null-sets for extremal distances* // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. AI. **322** (1962), 1–12.

[12] O. Martio, V. Ryazanov, U. Srebro, and E. Yakubov, *$Q-$homeomorphisms* // Contemporary Math. **364** (2004), 193–203.

[13] O. Martio, V. Ryazanov, U. Srebro, and E. Yakubov, *Mappings with finite length distortion* // J. d'Anal. Math. **93** (2004), 215–236.

[14] V. G. Maz'ya and S. V. Poborchi, *Differentiable Functions on Bad Domains*, Singapure etc., World Sci., 1997.

[15] A. S. Besicovitch, *On sufficient conditions for a function to be analytic* // Proc. London Math. Soc. **32** (1932), 1–9.

[16] V. M. Mikljukov, *Removable singularities of quasiconformal mappings in space* // Dokl. Akad. Nauk SSSR **188** (1969), 525–527.

Сведения об авторах

Владимир Ильич Рязанов

Институт прикладной математики
и механики НАН Украины,
Р. Люксембург 74,
83114, Донецк,
Украина
E-Mail: ryazanov@www.math.helsinki.fi,
ryaz@iamm.ac.donetsk.ua,
ryazanov@iamm.ac.donetsk.ua