Український математичний вісник
Том 3 **(2006)**, № 2, 153 – 165

О связи между квадратичными формами Дрозда и Бреннер (случай неограниченных частично упорядоченных множеств)

Виталий М. Бондаренко

(*Представлена* $\boxed{\textit{В. М. Усенко}}$)

Аннотация. Рассматриваются две квадратичные формы, сопоставленных частично упорядоченным множествам, одна из которых введена Ю. А. Дроздом, а вторая — Ш. Бреннер (эти формы играют важную роль в современной теории представлений). Устанавливается связь между ними в случае бесконечных неограниченных частично упорядоченных множеств.

2000 MSC. 15A63, 16G20, 16G60.

Ключевые слова и фразы. Квадратичная форма, колчан Дынкина, частично упорядоченное множество, максимальный (минимальный) элемент.

1. Введение и формулировка основного результата

В 1972 г. П. Габриель [1] определил для каждого колчана (ориентированного графа) Q с конечным множеством вершин Q_0 и конечным множеством стрелок Q_1 квадратичную форму $q_Q : \mathbb{Z}^{Q_0} \to \mathbb{Z}$, названную им квадратичной формой Титса колчана Q:

$$q_Q(z) = \sum_{i \in Q_0} z_i^2 - \sum_{i \to j} z_i z_j,$$

где $i \to j$ пробегает множество Q_1. Эта работа стала началом нового направления в теории представлений, изучающего связь между свойствами представлений различных объектов и свойствами связанных с ними квадратичных форм.

Статья поступила в редакцию 6.07.2005

ISSN 1810 – 3200.

В 1975 г. Ю. А. Дрозд [2] и Ш. Бреннер [3] ввели некоторые квадратичные формы соответственно для конечного частично упорядоченного (сокращенно ч. у.) множества и конечного коммутативного колчана[1]. Поскольку такой колчан естественно отождествлять с ч. у. множеством, индуцируемым ориентированными путями, то тем самым для каждого (конечного) ч. у. множества имеется две квадратичные формы. Эти формы (и их обобщения) играют важную роль в современной теории представлений. Мы называем их соответственно квадратичными формами Дрозда и Бреннер[2].

Напомним определения этих форм для произвольного конечного ч. у. множества S (с формальных соображений удобно считать, что S не содержит элемента 0). Как обычно, $\mathbb{Z}$ обозначает кольцо целых чисел, а $\mathbb{Q}$ — поле рациональных чисел.

Квадратичная форма Дрозда для S — это форма $dr_S : \mathbb{Z}^{S\cup 0} \to \mathbb{Z}$, которая задается равенством

$$dr_S(z) = z_0^2 + \sum_{i\in S} z_i^2 + \sum_{\substack{i<j,\\ i,j\in S}} z_i z_j - z_0 \sum_{i\in S} z_i.$$

Квадратичная форма Бреннер для S — это форма $br_S : \mathbb{Z}^S \to \mathbb{Z}$, которая задается следующим образом.

Отождествим S с колчаном $\overrightarrow{S}$, где

$$\overrightarrow{S}_0 = S, \quad \overrightarrow{S}_1 = \{i \to j \,|\, i < j,\ i \text{ и } j \text{ — соседние}\}$$

(элементы i и $j > i$ называются соседними, если не существует элемента s, такого, что $j > s > i$). Рассмотрим $\mathbb{Q}$-алгебру путей $\mathbb{Q}\overrightarrow{S}$, т. е. $\mathbb{Q}$-алгебру, базисом которой являются все пути в $\overrightarrow{S}$. Далее, рассмотрим в $\mathbb{Q}\overrightarrow{S}$ идеал I, порожденный всеми элементами вида $R - T$, где R и T — пути, начальные и концевые вершины которых совпадают, и обозначим через Λ фактор-алгебру $\mathbb{Q}\overrightarrow{S}$ по I; идеал, порожденный всеми стрелками колчана $\overrightarrow{S}$, обозначим через J. Форма $br_S(z)$ задается равенством

$$br_S(z) = br_\Lambda(z) = \sum_{i\in S} z_i^2 - \sum_{i\to j} z_i z_j + \sum_{i,j\in S} r_{ij} z_i z_j,$$

[1]Коммутативным колчаном называется колчан без ориентированных циклов, в котором любые два пути с одинаковыми начальными и концевыми вершинами равны.

[2]По аналогии с П. Габриелем, все подобные формы называют, как правило, квадратичными формами Титса (для соответствующих объектов). Мы называем указанные здесь формы по имени авторов, которые их ввели.

где $r_{ij} = \dim_{\mathbb{Q}} e_i(I/IJ + JI)e_j$, e_k обозначает примитивный идемпотент алгебры $\overrightarrow{S}$, соответствующий тривиальному пути $k \in \overrightarrow{S}_0$; $i \to j$ пробегает множество $\overrightarrow{S}_1$.

Заметим, что двойственные друг к другу ч. у. множества имеют одинаковые формы Дрозда и одинаковые формы Бреннер.

Квадратичные формы Дрозда и Бреннер определяются, как мы видели, совершенно разными способами и казалось бы между ними нет никакой связи. Но это не так, и настоящая работа посвящена изучению подобных связей, являясь первым шагом в этом направлении.

Сформулируем теперь основной результат этой статьи.

Ч. у. множество $S \neq \varnothing$ назовем неограниченным, если оно не имеет ни минимальных, ни максимальных элементов (тогда S бесконечно).

Теорема 1. *Пусть S — неограниченное ч. у. множество, не содержащее элементов 0 и $+\infty$, и пусть S^+ обозначает ч. у. множество $S \cup \{+\infty\}$, где $x < +\infty$ для любого $x \in S$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

A) *Квадратичная форма Дрозда является положительной для любого конечного подмножества $P \subset S$.*

B) *Квадратичная форма Бреннер является положительной для любого конечного подмножества $P \subset S^+$.*

C) *Квадратичная форма Бреннер является слабо положительной для любого конечного подмножества $P \subset S^+$.*

Напомним, что слабая положительность формы означает, что она принимает положительное значение на любом ненулевом векторе с неотрицательными координатами; под положительной формой мы понимаем здесь положительно определенную форму.

Очевидно, что в условии теоремы S^+ можно заменить на $S^- = S \cup \{-\infty\}$, где $x > -\infty$ для любого $x \in S$.

Заметим, что квадратичную форму Дрозда $dr_S(z)$ можно определить для любого бесконечного ч. у. множества S с помощью той же формулы, что и в конечном случае, если ее областью определения считать подмножество $\mathbb{Z}_0^{S \cup 0}$ в декартовом произведении $\mathbb{Z}^{S \cup 0}$, состоящее из всех векторов $z = (z_i)$ с конечным числом ненулевых координат. И очевидно, что условие A) эквивалентно положительности формы $dr_S(z)$. Однако определить подобным образом форму Бреннер для бесконечного ч. у. множества S можно только в том случае, когда все коэффициенты r_{ij} окажутся конечными. Но легко показать, что если хотя бы один из коэффициентов r_{ij} является бесконечным, то существует конечное подмножество в $P \subset S$ с неположительной формой Бреннер ($P \cong T_1^+$ или $P \cong T_1^-$, где T_1 определено ниже).

Следовательно в нашей теореме условия A), B) и C) можно заменить соответственно на следующие условия:

A') Форма $dr_S(z)$ положительна.

B') Форма $br_{S^+}(z)$ определима и положительна.

C') Форма $br_{S^+}(z)$ определима и слабо положительна.

2. Строение неограниченных частично упорядоченных множеств с положительной формой Дрозда

Под прямой суммой ч. у. множеств мы понимаем их объединение (без пересечений) с частичным порядком, который индуцируется заданными порядками. Всякое линейно упорядоченное множество мы называем цепным, а ч. у. множество с единственной парой несравнимых элементов — почти цепным. В дальнейшем (в частности, при формулировке утверждений) допускаются и пустые цепные множества. Напомним еще, что шириной ч. у. множества S называется наибольшее число его попарно несравнимых элементов; мы обозначаем ее через $w(S)$.

Ч. у. множество, двойственное к ч. у. множеству T, будем обозначать через T^* (т. е. $T^* = T$ как множества и i меньше j в T^* тогда и только тогда, когда i больше j в T). Напомним, что ч. у. множества T и T' называются антиизоморфными, если T' и T^* изоморфны. В этой части статьи мы докажем следующее утверждение.

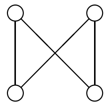
Предложение 1. *Пусть S — неограниченное ч. у. множество. Тогда следующие условия эквивалентны:*

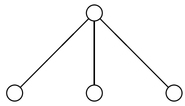
1) *Квадратичная форма Дрозда $dr_S(z)$ является положительной.*

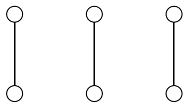
2) *S является прямой суммой двух цепных или цепного и почти цепного множеств.*

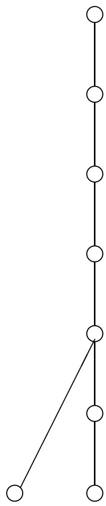
3) *S не содержит подмножеств, изоморфных или антиизоморфных следующим ч. у. множествам:*


,


,


,


,


.

Ч. у. множества, выписанные в условии 3), обозначим соответственно через $T_1, \dots, T_5$, а двойственные к ним, как договорились выше, — через $T_1^*, \dots, T_5^*$; отметим, что $T_s^* = T_s$ при $s = 1, 2, 4$.

Доказательство предложения 1. **2**) $\Rightarrow$ **1**). Покажем, что если бесконечное (не обязательно неограниченное) ч. у. множество S является прямой суммой двух цепных или цепного и почти цепного множеств, то форма Дрозда $dr_S(z)$ положительна. Очевидно, это достаточно показать для конечных ч. у. множеств вида

$$P = P_{m,n} = \{\pm 1, \pm 2, \dots, \pm m\} \cup \{-0, +0\} \cup \{m+1, \dots, n\},$$

где n и $m \le n$ — любые натуральные числа и

$$-m \prec -m+1 \prec \ldots \prec -1 \prec 1 \prec 2 \prec \ldots \prec m,$$

$$-1 \prec -0 \prec 1,\ -1 \prec +0 \prec 1,\ m+1 \prec \ldots \prec n$$

($P_{m,n}$ является прямой суммой почти цепного множества из $2m+2$ элементов и цепного множества из $n-m$ элементов). Более того, если через $R = R_{m,n}$ обозначить пополнение P, задаваемое (дополнительным) отношением $m \prec m+1$, то для каждого $z \in \mathbb{Z}^{P\cup 0}$ имеем равенство $dr_P(z) = dr_R(z')$, где

$$z'_0 = z_0 - \sum_{s=m+1}^{n} z_s,$$

$$z'_s = z_s \quad \text{при} \quad s = -m, \ldots, -1, -0, +0, 1, \ldots, m,$$
$$z'_s = -z_s \quad \text{при} \quad s = m+1, \ldots, n.$$

Следовательно, положительность формы Дрозда достаточно показать для (почти цепных) множеств $R = R_{m,n}$, а это видно из следующего равенства:

$$2dr_R(z) = z_0^2 + \sum_{i=-m}^{-1} z_i^2 + \sum_{i=1}^{n} z_i^2 + (z_{-0} - z_{+0})^2 + \Big(z_0 - \sum_{j\in R} z_j\Big)^2.$$

1) $\Rightarrow$ **3**). Достаточно показать, что для каждого из ч. у. множеств $T_1, \ldots, T_5$ (указанных в 3)) форма Дрозда не является положительной.

Отношение частичного порядка на $T = T_s$ ($s = 1, \ldots, 5$) будем обозначать знаком $\prec$, а его элементы будем нумеровать числами $1, 2, \ldots, m$, где $m = |T|$, таким образом, что $i < j$ всякий раз, когда $i \prec j$ или i находится (на рисунке) левее j. При рассмотрении формы Дрозда $dr_T(z)$ координаты z_i (конечного) вектора $z \in \mathbb{Z}^{T\cup 0}$ располагаются в естественном порядке (в порядке возрастания $i \in T \cup 0$ как целого числа).

Тот факт, что форма Дрозда для ч. у. множеств T_s, которую мы обозначим для простоты через $dr_s(z)$ ($s = 1, \ldots, 5$), не является положительной, вытекает из следующих равенств:

$dr_1(2,1,1,1,1) = 0$, $dr_2(0,1,1,-1,-1) = 0$,
$dr_3(1,1,1,1,-1) = 0$, $dr_4(3,1,1,1,1,1,1) = 0$,
$dr_5(1,3,2,2,-1,-1,-1,-1,-1) = 0$.

3) $\Rightarrow$ **2**). Для элемента $x \in S$ положим $\{x\}^> = \{y \in S \,|\, y > x\}$ и $\{x\}^< = \{y \in S \,|\, y < x\}$; если P — подмножество в S, то положим $P^> = \cap_{x\in P}\{x\}^>$ и $P^< = \cap_{x\in P}\{x\}^<$.

Нам понадобится следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть S — неограниченное ч. у. множество ширины $w(S) > 1$, не содержащее подмножеств вида T_1–T_5, T_3^*, T_5^*. Тогда для любых его несравнимых элементов a и b выполняется одно из следующих условий:*

a) $\{a\}^> \setminus \{b\}^> = \varnothing, \{b\}^> \setminus \{a\}^> = \varnothing$ *и* $\{a,b\}^>$ *является цепным;*

b) $\{a,b\}^> = \varnothing$, *а* $\{a\}^> \setminus \{b\}^>$ *и* $\{b\}^> \setminus \{a\}^>$ *являются цепными;*

c) $\{a,b\}^> = \varnothing$, $\{a\}^> \setminus \{b\}^>$ *является цепным, а* $\{b\}^> \setminus \{a\}^>$ *почти цепным;*

d) $\{a,b\}^> = \varnothing$, $\{a\}^> \setminus \{b\}^>$ *является почти цепным, а* $\{b\}^> \setminus \{a\}^>$ *цепным.*

Заметим, что в условиях b), c) и d) выполняются равенства $\{a\}^> \setminus \{b\}^> = \{a\}^>$ и $\{b\}^> \setminus \{a\}^> = \{b\}^>$ (поскольку $\{a,b\}^> = \varnothing$). Однако для большей ясности формулировки и доказательства мы во всех случаях пишем $\{a\}^> \setminus \{b\}^>$ и $\{b\}^> \setminus \{a\}^>$.

Доказательство леммы 1. Покажем сначала, что случай, когда непустыми являются подмножество $\{a,b\}^>$ и хотя бы одно из подмножеств $\{a\}^> \setminus \{b\}^>, \{b\}^> \setminus \{a\}^>$, невозможен. Предположим противное. В силу симметрии можно считать, что $\{a\}^> \setminus \{b\}^> \neq \varnothing$. Если при этом $\{a,b\}^< \neq \varnothing$, то подмножество в S, состоящее из элементов a, b, произвольного элемента $c \in \{a\}^> \setminus \{b\}^>$ и произвольных элементов $d_1 < d_2 < \cdots < d_5$ из $\{a,b\}^<$ (которые существуют в силу отсутствия в S минимальных элементов), изоморфно ч. у. множеству T_5^* и мы приходим к противоречию. Если же $\{a,b\}^< = \varnothing$, то подмножество в S, состоящее из элементов a, b, произвольного элемента $c \in \{a\}^< \setminus \{b\}^<$ (который существует в силу отсутствия в S минимальных элементов) и произвольных элементов $d_1 < d_2 < \cdots < d_5$ из $\{a,b\}^>$ (которые существуют в силу отсутствия в S максимальных элементов), изоморфно ч. у. множеству T_5 и снова приходим к противоречию.

Итак, мы доказали, что

либо 1) $\{a,b\}^> = \varnothing$,

либо 2) $\{a\}^> \setminus \{b\}^> = \varnothing$ и $\{b\}^> \setminus \{a\}^> = \varnothing$.

Рассмотрим каждый из этих случаев отдельно, и начнем со случая 1). Очевидно, что в этом случае $\{a\}^> \setminus \{b\}^>$ и $\{b\}^> \setminus \{a\}^>$ — бесконечные подмножества, причем, поскольку S не содержит подмножеств вида T_1, то хотя бы одно из них, скажем, $\{a\}^> \setminus \{b\}^>$, является цепным; тогда $w(\{b\}^> \setminus \{a\}^>) < 3$. Далее, $\{b\}^> \setminus \{a\}^>$ не содержит подмножества P изоморфного ч. у. множеству $\{1,2,3 \,|\, 2 \prec 3\}$, так как в противном случае подмножество в S, состоящее из элемента b, всех элементов из P и произвольных элементов $b_1 < b_2 < b_3 < b_4$ из $\{b\}^<$, изоморфно ч. у. множеству T_5^*, что противоречит условию леммы. Наконец, в силу условия леммы $\{b\}^> \setminus \{a\}^>$ не содержит подмножества вида T_2. Из всех этих условий следует, что $\{b\}^> \setminus \{a\}^>$ является ч. у. множеством ширины $w \leqslant 2$ с не более чем одной парой несравнимых элементов, т. е. является цепным или почти цепным. Итак, мы доказали, что в случае 1) при цепном $\{a\}^> \setminus \{b\}^>$ выполняется одно из условий $b), c)$ (аналогично при цепном $\{b\}^> \setminus \{a\}^>$ выполняется одно из условий $b), d)$). Таким образом, в случае 1) выполняется одно из условий $b), c), d)$.

В случай 2) подмножество $\{a, b\}^>$ не содержит несравнимых между собой элементов c и d, так как в противном случае подмножество в S, состоящее из элементов a, b, c, d, изоморфно ч. у. множеству T_2; следовательно, имеем условие $a)$.

Лемма 1 доказана. □

Отметим, что имеет место лемма 1*, двойственная к лемме 1, т.е. такая, которая получается из леммы 1 заменой множеств $\{a\}^>$, $\{b\}^>$ и $\{a, b\}^>$ соответственно на множества $\{a\}^<$, $\{b\}^<$ и $\{a, b\}^<$; при этом новые условия $a), b), c)$ и $d)$ будем обозначать в дальнейшем через $a^*), b^*), c^*)$ и $d^*)$. Доказательство леммы 1* проводится с помощью двойственных рассуждений или же путем применения леммы 1 к ч. у. множеству S^*, двойственному к S.

Используя лемму 1, докажем следующее утверждение.

Лемма 2. *Пусть S то же, что в лемме* 1. *Тогда в S существуют несравнимые между собой элементы x и y, такие, что каждый элемент из S сравним либо с x, либо с y.*

Доказательство. Можно считать, что $w(S) = 3$ (для $w(S) = 2$ утверждение леммы тривиально, а случай $w(S) > 3$ невозможен, так как S не содержит подмножеств вида T_1). Зафиксируем в S три попарно несравнимые элемента a, b и c. Легко видеть, что $\{a, b, c\}^> = \varnothing$ (иначе элементы a, b, c и произвольный элемент d из $\{a, b, c\}^>$ образуют подмножество, изоморфное ч. у. множеству T_3). Значит $\{a, b\}^>$, $\{a, c\}^>$ и $\{b, c\}^>$ попарно не пересекаются. При этом хотя бы одно из этих множеств не является пустым, так как в противном случае подмножество в S, состоящее из элементов a, b, c и произвольных элементов $d > a$, $e > b$, $f > c$ (которые существуют в силу отсутствия в S максимальных элементов), изоморфно ч. у. множеству T_4. Далее, среди трех указанных множеств нет двух непустых. Действительно, если, скажем, $\{a,b\}^{>} \neq \varnothing$ и $\{b,c\}^{>} \neq \varnothing$, то подмножество в S, состоящее из элемента b и произвольных элементов $d_1 < d_2$ из $\{a,b\}^{>}$, e из $\{b,c\}^{>}$ и $f_1 < f_2 < f_3 < f_4$ из $\{b\}^{<}$, изоморфно ч. у. множеству T_5^*, что противоречит условию леммы. Следовательно, мы можем считать, что (с точностью до перенумерации элементов a, b и c) $\{a,b\}^{>} \neq \varnothing, \{b,c\}^{>} = \varnothing$ и $\{a,c\}^{>} = \varnothing$. Тогда в силу леммы 1 $\{a\}^{>} \setminus \{b\}^{>}$ и $\{b\}^{>} \setminus \{a\}^{>}$ являются пустыми, а $\{a,b\}^{>}$ — (бесконечным) цепным, и значит в качестве требуемых элементов x и y можно взять элемент c и произвольный элемент из $\{a,b\}^{>}$.

Лемма 2 доказана. □

Переходим теперь непосредственно к доказательству импликации 3) ⇒ 2).

Если ч. у. множество A является объединением своих непересекающихся подмножеств $A_i, i \in I$, то A называется их суммой; при этом элементы разных подмножеств A_i могут быть сравнимыми. Если таких сравнимых элементов нет, то сумма будет называться, как уже говорилось выше, прямой.

Итак, пусть S — неограниченное ч. у., не содержащее подмножеств вида T_1–T_5,T_3^*, T_5^*. Тогда $w(S) < 4$ (см. ч. у. множество T_1), причем случай $w(S) = 1$ тривиален. Значит $w(S) = 2$ или $w(S) = 3$.

Зафиксируем в S несравнимые между собой элементы a и b, для которых выполняется указанное в лемме 2 свойство (т. е. a и b не принадлежат тройке попарно несравнимых элементов); тогда $S = A \cup B$, где $A = \{a\}^{<} \cup \{a\} \cup \{a\}^{>}$ и $B = \{b\}^{<} \cup \{b\} \cup \{b\}^{>}$. Применим к a и b леммы 1, 1*. Если выполняется условие a), то не может выполняться ни одно из условий b^*), c^*), d^*), так как в противном случае S содержит подмножество, изоморфное ч. у. множеству T_5; тогда в силу леммы 1* выполняется условие a^*), а, следовательно, S является почти цепным. Если же выполняется одно из условий b)–d), то условие a^*) не может выполняться (иначе S содержит подмножество, изоморфное множеству T_5^*), и значит выполняется одно из условий b^*)–d^*), причем условия c) и c^*) или d) и d^*) не могут выполняться одновременно, иначе A или B содержит подмножество, изоморфное множеству T_2. Из сказанного следует, очевидно, что S является суммой либо двух цепных, либо цепного и почти цепного, либо двух почти цепных подмножеств. Более того, эта сумма является прямой, что легко следует из леммы 1. Действительно, если бы рассматриваемая сумма не была прямой, то существовали бы элементы c и d, принадлежащие соответственно подмножествам $\{a\}^{<}$ и $\{b\}^{>}$ или $\{b\}^{<}$ и $\{a\}^{>}$, такие, что $c < d$. Допустив, что $c \in \{a\}^{<}$ и $d \in \{b\}^{>}$ (это можно делать в силу симметрии) и присоединив к c и d элемент b, произвольный елемент $b_1 \in \{b\}^<$ и произвольные элементы $e_1 < e_2 < e_3 < e_4$ из $\{d\}^>$, мы получили бы подмножество, изоморфное ч. у. множеству T_5. Чтобы завершить доказательство, осталось заметить, что случай, когда S является прямой суммой двух почти цепных подмножеств, невозможен, так как в этом случае $w(S) = 4$. □

3. Доказательство теоремы 1

Импликация $B) \Rightarrow C)$ следует непосредственно из определений положительной и слабо положительной форм.

C) ⇒ **A**). Нам понадобится следующее утверждение (см. [1]).

Предложение 2. *Колчан имеет положительную форму Титса тогда и только тогда, когда соответствующий ему неориентированный граф является несвязным объединением диаграмм Дынкина, т.е. графов следующего вида:*

$$A_n \quad 1\text{---}2\text{---}3\text{---}\ \cdots\ \text{---}n \qquad (n \geqslant 1)$$

$$\begin{array}{lccccccccccc} & & & 1'' & & & & & & & & \\ & & & | & & & & & & & & \\ D_n & 1' & \text{---} & 0 & \text{---} & 1 & \text{---} & 2 & \text{---} & \cdots & \text{---} & n-3 \end{array} \qquad (n \geqslant 4)$$

$$\begin{array}{lccccccccc} & & & & & 1'' & & & & \\ & & & & & | & & & & \\ E_6 & 2' & \text{---} & 1' & \text{---} & 0 & \text{---} & 1 & \text{---} & 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{lccccccccccc} & & & & & 1'' & & & & & & \\ & & & & & | & & & & & & \\ E_7 & 2' & \text{---} & 1' & \text{---} & 0 & \text{---} & 1 & \text{---} & 2 & \text{---} & 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{lccccccccccccc} & & & & & 1'' & & & & & & & & \\ & & & & & | & & & & & & & & \\ E_8 & 2' & \text{---} & 1' & \text{---} & 0 & \text{---} & 1 & \text{---} & 2 & \text{---} & 3 & \text{---} & 4 \end{array}$$

В противном случае форма Титса колчана принимает нулевое значение на некотором ненулевом векторе с неотрицательными координатами.

Еще нам понадобится следующая лемма, которая следует непосредственно из определения форм Титса и Бреннер.

Лемма 3. *Если T — конечное ч. у. множество, такое, что в колчане $\overrightarrow{T}$ между любыми двумя вершинами существует не более одного* (*ориентированного*) *пути, то форма Бреннер множества T совпадает с формой Титса колчана $\overrightarrow{T}$.*

В частности, колчан удовлетворяет указанному в условии леммы условию, если он не имеет циклов (с каким-либо направлением стрелок).

Пусть теперь выполняется C) и предположим, что A) не выполняется. Тогда в силу предложения 1 ч. у. множество S содержит некоторое конечное подмножество T, которое изоморфно или антиизоморфно одному из ч. у. множеств T_1–T_5. Рассмотрим каждый из этих случаев.

Если $T \cong T_2$, то в силу леммы 3 форма Бреннер $br_T(z)$ совпадает с формой Титса для колчана $\overrightarrow{T} \cong \overrightarrow{T_2}$, который не является колчаном Дынкина. Если $T \cong T_i$, где $i \neq 2$, то форма Бреннер для ч. у. множества $R = T \cup \{+\infty\}$ совпадает с формой Титса для колчана $\overrightarrow{R}$ (см. снова лемму 3), который не является колчаном Дынкина. Итак, если T изоморфно одному из множеств $T_1, \dots, T_5$, то в S^+ существует (конечное) подмножество, форма Бреннер для которого совпадает с формой Титса для некоторого (связного) колчана, не являющегося колчаном Дынкина; следовательно в силу предложения 2 эта форма Бреннер, в каждом из случаев, не является слабо положительной и мы приходим к противоречию.

Нам осталось рассмотреть случай, когда T изоморфно T_3^* или T_5^*. Поскольку в S нет минимальных элементов, а T имеет в этом случае только один минимальный элемент, то в $S \setminus T$ существует елемент a, меньший всех элементов T. Тогда форма Бреннер для $R = T \cup \{a\}$ совпадает с формой Титса для колчана $\overrightarrow{R}$ (см. лемму 3), который не является колчаном Дынкина. В силу предложения 2 снова приходим к противоречию.

A) $\Rightarrow$ **B**). В силу эквивалентности утверждений 1) и 2) (см. предложение 1) достаточно показать, что форма Бреннер $br_{S^+}(z)$ положительна всякий раз, когда S конечно и является прямой суммой двух цепных или цепного и почти цепного множеств. Это будет показано следующим способом: мы докажем, что в указанных случаях форма $br_{S^+}(z)$ эквивалентна (в некоторых случаях просто изоморфна) форме Титса некоторой диаграммы Дынкина; и после этого нужно лишь воспользоваться предложением 2. Напомним, что изоморфизм форм — это их совпадение (как полиномов) с точностью до переобозначения переменных, а эквивалентность форм означает, что каждую из них можно перевести в другую с помощью линейной замены переменных с обратимой матрицей.

В случае, когда S является прямой суммой двух цепных множеств, неориентированный граф, соответствующий колчану $\overrightarrow{S^+}$, является диаграммой Дынкина A_n, где $n = |S^+| = |S| + 1$, а значит в силу леммы 3 форма Бреннер $br_{S^+}(z)$ изоморфна форме Титса диаграммы Дынкина A_n.

В случае, когда S является прямой суммой цепного и почти цепного множеств колчан $\Gamma = \overrightarrow{S^+}$ имеет следующий вид:

$$
\begin{tikzcd}
 & & & & m \arrow[dr] & & & \\
1 \arrow[r, dash] & 2 \arrow[r, dash] & \cdots \arrow[r, dash] & m-1 \arrow[ur] \arrow[dr] & & m+2 \arrow[r, dash] & \cdots \arrow[r, dash] & n, \\
 & & & & m+1 \arrow[ur] & & &
\end{tikzcd}
$$

где $m \geq 1$ и $n \geq m+2$ (здесь $n = |S|+1$); на рисунке не указаны те направления стрелок, от которых форма Бреннер заведомо не зависит. Следовательно,

$$br_{S^+}(z) = \sum_{i=1}^{n} z_i^2 - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq m}}^{n-1} z_i z_{i+1} - z_{m-1} z_{m+1} - z_m z_{m+2} + z_{m-1} z_{m+2}.$$

Случай, когда цепное прямое слагаемое является пустым, а почти цепное (а значит и само S) состоит из двух элементов, можна трактовать как случай, когда S — прямая сумма двух одноэлементных подмножеств, а он является частным случаем уже рассмотренного случая; и, следовательно, можно считать, что $(m, n) \neq (1, 3)$. Если $m = 1$, а $n > 3$ (это означает, что S является прямой суммой почти цепного подмножества из двух элементов и цепного подмножества из $n-2$-х элементов), то неориентированный граф, соответствующий колчану Γ, является диаграммой Дынкина D_n, а тогда в силу леммы 3 форма Бреннер множества S^+ изоморфна форме Титса диаграммы Дынкина D_n.

Наконец, положительность формы Бреннер множества S^+ в случае, когда $m > 1$, вытекает из следующей леммы (с учетом предложения 2, как и в предыдущих случаях).

Лемма 4. *Если $m > 1$, то форма $br_{S^+}(z)$ эквивалентна форме Титса $q_D(t)$ диаграммы Дынкина $D = D_n$.*

Доказательство. Согласно определению формы Титса для колчанов форма $q_D(t)$ задается следующим равенством:

$$q_D(t) = t_{1'}^2 + t_{1''}^2 + \sum_{j=0}^{n-3} t_j^2 - t_0 t_{1'} - t_0 t_{1''} - \sum_{j=0}^{n-4} t_j t_{j+1}.$$

И легко проверить, что

$$br_{S^+}(z) = q_D(t),$$

где $t_{1'} = z_m$, $t_{1''} = z_{m+1}$, $t_j = z_{m-j-1} + z_{m+2}$ при $0 \leq j \leq m-2$ и $t_j = z_{j+3}$ при $m-1 \leq j \leq n-3$. $\square$

Литература

[1] P. Gabriel, *Unzerlegbare Darstellungen* // Manuscripts Math. **6** (1972), 71–103, 309.

[2] Ю. А. Дрозд, *Преобразования Кокстера и представления частично упорядоченных множеств* // Функц. анализ и его прилож. **8** (1974), вып. 3, 34–42.

[3] S. Brenner, *Quivers with commutativity conditions and some phenomenology of forms* // Proc. of Intern. Conference of Representations of Algebras. Carleton Univ., Ottawa, Ontario, 1974, Paper N5.

Сведения об авторах

Виталий Михайлович Бондаренко

Институт математики НАН Украины,
ул. Терещенковская 3,
01601, Киев 4
Украина
E-Mail: `vit-bond@imath.kiev.ua`