Український математичний вісник
Том 3 **(2006)**, № 1, 134 – 148

Управление системой с упругими компонентами в нерезонансном случае

Александр Л. Зуев

(*Представлена Н. Д. Копачевским*)

Аннотация. В статье исследуется управляемое движение плоской механической системы, состоящей из твердого тела-носителя и произвольного числа упругих балок, прикрепленных к нему. Получены условия приближенной управляемости такой модели в терминах спектра соответствующей однородной задачи о колебаниях упругой балки. Доказано, что линейная система управляема с помощью скалярного управления при отсутствии резонансов. В нерезонансном случае построено управление с обратной связью, обеспечивающее сильную асимптотическую устойчивость тривиального решения нелинейной системы.

2000 MSC. 93D15, 93B05, 37L15, 34G10.

Ключевые слова и фразы. Приближенная управляемость, стабилизация, система с распределенными параметрами, балка Эйлера–Бернулли, функционал Ляпунова.

Введение

Теория управления системами с распределенными параметрами имеет широкий круг приложений в области механики роботов-манипуляторов с гибкими звеньями, спутников с упругими элементами, процессов теплообмена [5,16,17]. В частности, задачи управления моделью гибкого манипулятора в виде твердого тела с балкой Эйлера–Бернулли исследовались в работах [8–10, 14, 16, 22].

Как отмечено в статье [23], положение равновесия твердого тела с несколькими одинаковыми балками Эйлера–Бернулли не является стабилизируемым с помощью скалярного управляющего момента, приложенного к телу. При этом возможна лишь частичная стабилизация (резонансный случай). В конечномерной постановке зада-

Статья поступила в редакцию 22.11.2004
Partially supported by the Alexander von Humboldt Foundation.

ISSN 1810 – 3200.

чи наблюдаемости и стабилизации по части переменных решены в статье [2] для системы с двумя упругими балками.

В настоящей работе предложена явная схема сильной стабилизации при выполнении условий управляемости для системы, состоящей из твердого тела и произвольного числа балок Эйлера–Бернулли.

1. Движение твердого тела с упругими балками

Рассмотрим твердое тело, совершающее плоское вращение около неподвижной точки O под действием управляющего момента M (рис. 1). К телу прикреплены k упругих балок (число $k \geq 1$ может быть произвольным).

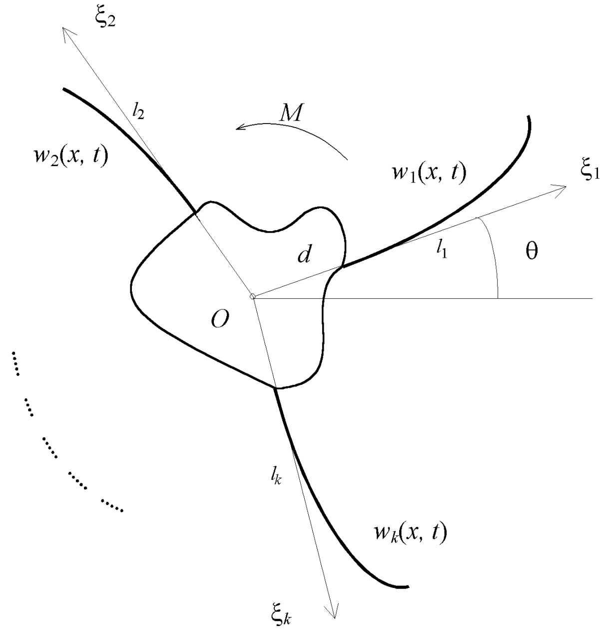

Рис. 1.

Предположим, что каждая балка закреплена на расстоянии d от точки O, и что l_i — длина i-й балки. Обозначим, соответственно, через $\theta(t)$ и $\tilde{w}_i(\xi, t)$ угол поворота тела и отклонение центральной линии i-й балки от оси $O\xi_i$ в точке $\xi \in [d, d+l_i]$ в момент времени $t \geq 0$. Будем предполагать, что в недеформированном состоянии центральная линия i-й балки лежит на оси $O\xi_i$. Обозначим $w_i(x,t) = \tilde{w}(\xi_i - d, t)$, тогда движение рассматриваемой механической системы определяется функциями

$$\theta(t),\ w_i(x,t), \quad x \in [0, l_i],\ t \geq 0,\ i = \overline{1,k}.$$

Для вывода уравнений движения рассмотрим сначала случай $\theta(t) \equiv \mathrm{const}$. В этом случае $w_i(x,t)$ удовлетворяет однородному уравнению Эйлера–Бернулли (см., напр., [16]):

$$\frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2} + c_i^2 \frac{\partial^4 w_i}{\partial x^4} = 0, \quad x \in (0, l_i),\ t > 0, \tag{1.1}$$

с граничными условиями

$$w_i\Big|_{x=0} = \frac{\partial w_i}{\partial x}\Big|_{x=0} = \frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2}\Big|_{x=l_i} = \frac{\partial^3 w_i}{\partial x^3}\Big|_{x=l_i} = 0, \quad i = \overline{1,k}, \tag{1.2}$$

где $c_i^2 = E_i I_i/\rho_i$. Величины I_i, E_i и ρ_i обозначают, соответственно, момент инерции сечения, модуль Юнга и плотность (массу на единицу длины) i-й балки. Будем считать все c_i и ρ_i положительными константами. Задача (1.1) (1.2) ставится в классе $w_i \in H_i$ (см. [10]),

$$H_i = \big\{ w \in L^2_{loc}([0,l_i] \times \mathbb{R}_+) : w(\cdot,t) \in H^2(0,l_i),$$
$$w_t(\cdot,t) \in L^2(0,l_i),\ w(0,t) = w_x(0,t) = 0,\ \forall\, t \geq 0 \big\}.$$

Подставляя $w_i(x,t) = u_i(x)q_i(t)$ в (1.1), (1.2), получим следующую задачу Штурма–Лиувилля относительно $u_i(x)$:

$$L[u_i] \equiv \frac{d^4}{dx^4} u_i(x) = \lambda u_i(x), \quad x \in (0,l_i),$$
$$u_i(0) = u_i'(0) = u_i''(l_i) = u_i'''(l_i) = 0.$$

Эта задача имеет счетный набор собственных значений $\lambda_{in} \in \mathbb{R}$, обладающих свойством

$$0 < \lambda_{i1} < \lambda_{i2} < \cdots < \lambda_{in} \to \infty$$

при $n \to \infty$, а соответствующие собственные функции $\{u_{in}(x)\}_{n=1}^{\infty}$ образуют полную ортогональную систему в $L^2(0,l_i)$ для всех $i \in \{1,2,\ldots,k\}$ (см. [4, 16]). Без ограничения общности будем считать, что

$$\int\limits_0^{l_i} u_{in}^2(x)\rho_i \, dx = 1.$$

Таким образом, всякая функция $w_i(\cdot,\cdot) \in H_i$ допускает представление

$$w_i(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_{in}(x) q_{in}(t),$$

где коэффициенты Фурье $q_{in}(t)$ будем называть обобщенными координатами, соответствующими n-й моде колебаний.

Для вывода уравнений движения в случае переменного угла θ, воспользуемся лагранжевым формализмом в обобщенных координатах θ, q_{in}. Эквивалентность уравнений Лагранжа второго рода и принципа Гамильтона–Остроградского обоснована для широкого класса упругих систем (см., напр., [5,6]). Лагранжиан рассматриваемой механической системы имеет вид

$$2L = J\dot{\theta}^2 + 2\dot{\theta}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{k} J_{in}\dot{q}_{in} + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{k}\dot{q}_{in}^2 + \dot{\theta}^2\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{k} {q_{in}}^2 - 2U,$$

где

$$J = J_0 + \sum_{i=1}^{k}\int\limits_0^{l_i}(x+d)^2\rho_i\,dx, \qquad J_{in} = \int\limits_0^{l_i}(x+d)u_{in}(x)\rho_i\,dx,$$

$J_0 > 0$ — момент инерции твердого тела-носителя, U — потенциал упругих сил:

$$2U = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{k} c_i^2\lambda_{in}{q_{in}}^2.$$

Уравнения Лагранжа запишутся следующим образом:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial\theta} &= \Big\{J + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{k}{q_{in}}^2\Big\}\ddot{\theta} + 2\Big\{\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{k} q_{in}\dot{q}_{in}\Big\}\dot{\theta} \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{k} J_{in}\ddot{q}_{in} = M; \\
\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_{in}} - \frac{\partial L}{\partial q_{in}} &= J_{in}\ddot{\theta} + \ddot{q}_{in} + (\lambda_{in}c_i^2 - \dot{\theta}^2)q_{in} = 0, \\
&\quad (i = \overline{1,k};\ n = 1,2,\ldots).
\end{aligned} \tag{1.3}$$

Здесь M — управляющий момент, приложенный к телу. С целью упрощения уравнений движения, перейдем от момента M к новому управляющему параметру v посредством следующего преобразования:

$$v = \frac{M + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{k} J_{in}(\lambda_{in}c_i^2 - \dot{\theta}^2)q_{in} - 2\dot{\theta}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{k} q_{in}\dot{q}_{in}}{J + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{k}({q_{in}}^2 - {J_{in}}^2)}. \tag{1.4}$$

Отметим, что знаменатель выражения (1.4) положителен. Действительно, используя определения J, J_{in} и равенство Парсеваля для функций $u_{in}(x)$, получим

$$\sum_{i=1}^{k}\int_{0}^{l_i}(x+d)^2\rho_i\,dx=\sum_{i=1}^{k}\sum_{n=1}^{\infty}J_{in}^2.$$

Отсюда

$$J-\sum_{i=1}^{k}\sum_{n=1}^{\infty}J_{in}^2=J_0>0. \tag{1.5}$$

Условие конечности полной энергии системы накладывает следующее ограничение на упругие координаты и их производные:

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_{in}(q_{in})^2<\infty,\qquad \sum_{i=1}^{k}\sum_{n=1}^{\infty}\dot{q_{in}}^2<\infty.$$

Чтобы удовлетворить этим неравенствам, совершим замену переменных

$$Q_{in}=c_i\sqrt{\lambda_{in}}q_{in},\quad P_{in}=\dot{q}_{in},\quad \omega=\dot{\theta}$$

и будем предполагать, что

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{n=1}^{\infty}\left({Q_{in}}^2+{P_{in}}^2\right)<\infty.$$

В новых переменных система (1.3) запишется следующим образом:

$$\begin{aligned}
\dot{\theta}&=\omega,\ \dot{\omega}=v,\\
\dot{Q}_{in}&=c_i\sqrt{\lambda_{in}}P_{in},\\
\dot{P}_{in}&=\ -c_i\sqrt{\lambda_{in}}Q_{in}+\frac{\omega^2Q_{in}}{\sqrt{\lambda_{in}}}-J_{in}v,\\
&(i=\overline{1,k},\ n=1,2,\dots).
\end{aligned} \tag{1.6}$$

2. Анализ управляемости

Система линейного приближения для (1.6) в окрестности нуля имеет вид:

$$\dot{x}=Ax+Bv, \tag{2.1}$$

где $x=(\theta,\omega,\,Q_{11},P_{11},\dots,Q_{k1},P_{k1},\,Q_{12},P_{12},\dots)^T$ — вектор состояния системы в гильбертовом пространстве ℓ^2, $v\in\mathbb{R}^1$ — управление. Линейный неограниченный оператор $A:D(A)\to\ell^2$ задан блочно-диагональной матрицей

$$A=\operatorname{diag}(A_0,\,A_{11},\dots,A_{k1},\,A_{12},\dots,A_{k2},\dots),$$

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_{in} = \begin{pmatrix} 0 & c_i\sqrt{\lambda_{in}} \\ -c_i\sqrt{\lambda_{in}} & 0 \end{pmatrix}, \quad (i = \overline{1,k},\ n \in \mathbb{N}),$$

$$B = (0, 1,\ 0, -J_{11},\ 0, -J_{21},\ \ldots,\ 0, -J_{k1},\ 0, -J_{12},\ \ldots)^T.$$

Поскольку J_{in} являются коэффициентами Фурье функции $\phi(x) = x + d \in L^2(0, l_i)$ по полной ортонормированной системе $\{u_{in}(x)\}_{n=1}^{\infty}$, то $B \in \ell^2$.

Легко видеть, что оператор A замкнут, его область определения

$$D(A) = \left\{ x \in \ell^2 :\ \sum_{i=1}^{k} \sum_{n=1}^{\infty} c_i^2 \lambda_{in} \big(P_{in}^2 + Q_{in}^2\big) < \infty \right\}$$

плотна в ℓ^2. Оператор $\tilde{A} = \operatorname{diag}(A_0, 0, 0, \ldots)$ ограничен, неограниченный оператор $A - \tilde{A}$ является кососимметричным и диссипативным в ℓ^2. В соответствии с теоремой Люмера–Филлипса [21, теорема 1.1 на с. 76 и следствие 4.4 на с. 15] (см. также [7]), A является генератором сильно непрерывной полугруппы операторов $\{T(t)\}_{t \ge 0}$ в ℓ^2. Аналогичные рассуждения показывают, что сопряженный оператор A^* также порождает сильно непрерывную полугруппу $\{T(t)^*\}_{t \ge 0}$ в ℓ^2.

Будем называть состояние $x \in \ell^2$ системы (2.1) приближенно управляемым [1, 3, 20], если для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие $\tau > 0$ и $v(\cdot) \in L^2(0, \tau)$, что

$$\left\| x - \int_0^{\tau} T(t-s) B v(s)\, ds \right\| < \varepsilon.$$

Система (2.1) называется *приближенно управляемой*, если множество всех ее приближенно управляемых состояний совпадает с ℓ^2. Имеет место критерий управляемости.

Теорема 2.1 ([20, теорема 2.1]). *Для системы $\dot{x} = Ax + Bu$ в гильбертовом пространстве H следующие два условия эквивалентны:*

(*i*) *система $\dot{x} = Ax + Bu$ не является приближенно управляемой;*

(*ii*) *сопряженная полугруппа операторов $\{T(t)^*\}_{t \ge 0}$ имеет нетривиальное инвариантное подпространство в $\operatorname{Ker} B^*$.*

Для дальнейших рассуждений нам потребуется

Лемма 2.1. *Пусть*

$$c_i^2 \lambda_{in} \ne c_j^2 \lambda_{jm} \qquad (A1)$$

для всех $(i,n) \neq (j,m)$. *Тогда для всякого* $\tau > 0$ *система функций*

$$\{1, t, \sin(c_i\sqrt{\lambda_{in}}t), \cos(c_i\sqrt{\lambda_{in}}t) : t \in [0,\tau],\ i = \overline{1,k},\ n = 1,2,\ldots\} \quad (2.2)$$

линейно-независима на $[0,\tau]$.

Доказательство. Для доказательства воспользуемся теоремой 1.2.17 из [17], которая формулируется следующим образом: если

$$\limsup_{y\to\infty}\limsup_{z\to\infty}\frac{n[y,y+z)}{z} < \frac{\tau}{2\pi}, \quad (2.3)$$

то система (2.2) минимальна в $L^2(0,\tau)$. Здесь $n[a,b)$ обозначает мощность множества $[a,b)\cap\Lambda$,

$$\Lambda = \left\{c_i\sqrt{\lambda_{in}} : i = \overline{1,k},\ n\in\mathbb{N}\right\}.$$

Для доказательства (2.3) заметим, что λ_{in} удовлетворяют уравнению (см. [16]):

$$\cos(\lambda_{in}^{1/4}l_i)\,\mathrm{ch}\,(\lambda_{in}^{1/4}l_i) = -1.$$

Отсюда следует следующее асимптотическое представление

$$\lambda_{in} = \left(\frac{\pi}{2l_i}\right)^4(2n-1)^4 + \Delta_{in}, \quad n = 1,2,\ldots, \quad (2.4)$$

где $\Delta_{in}\to 0$ при $n\to\infty$. Подставляя (2.4) в (2.3), получим

$$\limsup_{y\to\infty}\limsup_{z\to\infty}\frac{n[y,y+z)}{z} = 0.$$

Отсюда на основании [17] следует утверждение леммы. □

Докажем теперь признак управляемости системы (2.1).

Теорема 2.2. *Пусть выполнено предположение* $(A1)$. *Тогда система* (2.1) *приближенно управляема.*

Доказательство. Нетрудно видеть, что

$$\mathrm{Ker}\,B^* = \left\{x^*\in\ell^{2*} : \omega = \sum_{i=1}^{k}\sum_{n=1}^{\infty}J_{in}P_{in}\right\}. \quad (2.5)$$

Действие сопряженной полугруппы $T(t)^*$ на элемент $x(0)^*\in\ell^{2*}=\ell^2$ задается следующими выражениями

$$\begin{gathered}\theta(t) = \theta(0), \qquad \omega(t) = \theta(0)t + \omega(0),\\ P_{in}(t) = Q_{in}(0)\sin(c_i\sqrt{\lambda_{in}}t) + P_{in}(0)\cos(c_i\sqrt{\lambda_{in}}t),\\ Q_{in}(t) = Q_{in}(0)\cos(c_i\sqrt{\lambda_{in}}t) - P_{in}(0)\sin(c_i\sqrt{\lambda_{in}}t),\\ i=\overline{1,k},\ n\in\mathbb{N}.\end{gathered} \quad (2.6)$$

Предположим, что $T(t)^*$ имеет инвариантное подпространство $S \subseteq \operatorname{Ker} B^*$. Пусть $x(0)^* \in S$, тогда из (2.5), (2.6) следует

$$- \omega(0) - \theta(0)t + \sum_{i=1}^{k}\sum_{n=1}^{\infty} J_{in}\Big(Q_{in}(0)\sin(c_i\sqrt{\lambda_{in}}t) \\ + P_{in}(0)\cos(c_i\sqrt{\lambda_{in}}t)\Big) = 0, \quad \forall\, t \geq 0. \quad (2.7)$$

Если выполнено условие $(A1)$, то на основании леммы 2.1 из (2.7) следует равенство

$$\theta(0) = \omega(0) = J_{in}P_{in}(0) = J_{in}Q_{in}(0) = 0.$$

Поскольку $J_{in} \neq 0$ для всех (i,n), то $x(0)^* = 0$. Это означает, что $S = \{0\}$, а значит система (2.1) приближенно управляема по теореме 2.1. □

3. Стабилизация с обратной связью

В данном разделе будет предложено управление с обратной связью $v : \ell^2 \to \mathbb{R}^1$, которое обеспечивает сильную асимптотическую устойчивость особой точки $x = 0$ нелинейной системы (1.6). Отметим, что полугруппа $T(t)$ не является сжимающей ибо резольвента $R(\lambda : A)$ не удовлетворяет оценке $\|R(\lambda : A)\| \leq 1/\lambda$ при $\lambda > 0$ [21, теорема 3.1, с. 8]. Следовательно, прямое использование известных методов стабилизации линейных сжимающих [3,20] и спектральных [11] систем не подходит для нашего случая.

В работах [18, 19] решена задача стабилизации линейной модели вращающейся балки Тимошенко с помощью вспомогательного преобразования управления и эквивалентной перенормировки фазового пространства, позволяющей использовать теорему 5 из [3].

В отличие от вышеуказанных работ, в данной статье решается задача стабилизации системы с произвольным числом балок Эйлера–Бернулли в нелинейной постановке. Для построения стабилизирующего управления рассмотрим следующий функционал типа Ляпунова:

$$2V(x) = \theta^2 + J\omega^2 + 2\omega\sum_{i=1}^{k}\sum_{n=1}^{\infty} J_{in}P_{in} + \sum_{i=1}^{k}\sum_{n=1}^{\infty}\big({P_{in}}^2 + {Q_{in}}^2\big). \quad (3.1)$$

Производная функционала V в силу системы (1.6) имеет вид

$$\dot V = \omega\Bigg(\theta - \sum_{i=1}^{k}\sum_{n=1}^{\infty} c_i\sqrt{\lambda_{in}}J_{in}Q_{in}\Bigg)$$

$$+ v\omega\biggl(J - \sum_{i=1}^{k}\sum_{n=1}^{\infty} {J_{in}}^2\biggr) + \omega^2 \sum_{i=1}^{k}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(P_{in} + \omega J_{in})Q_{in}}{\sqrt{\lambda_{in}}}. \qquad (3.2)$$

Из формулы (3.2) следует, что $\dot V = 0$ при условии $\omega = 0$, а значит выражение $\dot V(x)$ не может быть сделано отрицательно-определенным ни при каком выборе управления. Зададимся положительной константой h и определим линейное управление с обратной связью $v = \gamma(x)$ по формуле

$$\gamma(x) = -\frac{\theta + h\omega - \sum_{i=1}^{k}\sum_{n=1}^{\infty} c_i \sqrt{\lambda_{in}} J_{in} Q_{in}}{J - \sum_{i=1}^{k}\sum_{n=1}^{\infty} J_{in}^2}. \qquad (3.3)$$

Знаменатель выражения (3.3) не обращается в нуль вследствие неравенства (1.5). Подстановка управления (3.3) в выражение (3.2) дает

$$\dot V(x) = -\biggl(h - \sum_{i=1}^{k}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(P_{in} + \omega J_{in})Q_{in}}{\sqrt{\lambda_{in}}}\biggr)\omega^2.$$

Из неравенства Коши–Буняковского следует, что

$$\sum_{i,n} \frac{(P_{in} + \omega J_{in})Q_{in}}{\sqrt{\lambda_{in}}} \le \Biggl(\max\Bigl\{\frac{1}{\sqrt{\lambda_{11}}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{\lambda_{k1}}}\Bigr\} + \biggl(\sum_{i,n} \frac{J_{in}^2}{\lambda_{in}}\biggr)^{1/2}\Biggr)\|x\|^2.$$

Отсюда вытекает, что функционал V имеет неположительную производную в силу системы (1.6), (3.3) в замкнутом шаре

$$B_R = \bigl\{x \in \ell^2 : \|x\| \le R\bigr\}$$

при выполнении условия

$$h > \Biggl(\max\Bigl\{\frac{1}{\sqrt{\lambda_{11}}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{\lambda_{k1}}}\Bigr\} + \biggl(\sum_{i,n} \frac{J_{in}^2}{\lambda_{in}}\biggr)^{1/2}\Biggr)R^2. \qquad (A2)$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 3.1. *Пусть выполнено предположение* (A1) *и пусть* $h = \mathrm{const} > 0$. *Тогда управление с обратной связью* $v = \gamma(x)$, *заданное выражением* (3.3), *обеспечивает сильную асимптотическую устойчивость тривиального решения системы* (1.6), *т.е. для любого* $\varepsilon > 0$ *существует такое* $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, *что каждое решение* $x(t)$ *системы* (1.6) *с* $v = \gamma(x)$, *удовлетворяющее начальному условию* $\|x(0)\| < \delta(\varepsilon)$, *обладает свойствами:*

1. $\|x(t)\| < \varepsilon, \quad \forall\, t \geq 0;$ (3.4)

2. $\lim\limits_{t\to+\infty} \|x(t)\| = 0.$ (3.5)

Доказательство. Для доказательства свойства устойчивости (3.4) покажем, что найдутся положительные числа c_1 и c_2, удовлетворяющие неравенствам

$$c_1\|x\|^2 \leq 2V(x) \leq c_2\|x\|^2, \qquad \forall\, x \in \ell^2. \tag{3.6}$$

Используя неравенство Коши–Буняковского, получим

$$2V(x) \leq \left(\max\{1, J\} + 2\left(\sum_{i=1}^{k}\sum_{n=1}^{\infty} J_{in}^2\right)^{1/2}\right)\|x\|^2.$$

Для оценивания константы c_1 в (3.6), представим функционал (3.1) в виде $2V(x) = \langle Qx, x\rangle_{\ell^2}$, где Q — ограниченный самомопряженный оператор. Нетрудно показать, что Q имеет дискретный спектр $\sigma(Q) \subset \mathbb{R}^+$,

$$\sigma_{\min} = \min \sigma(Q) = \min\left\{1, \frac{1}{2}\left(J + 1 - \sqrt{(J+1)^2 - 4J_0}\,\right)\right\}.$$

Отсюда, с учетом неравенства (1.5), вытекает, что $\sigma_{\min} > 0$ и $c_1 > 0$. Таким образом, функционал $V(x)$ определен положительно. Его производная $\dot{V}$ в силу системы (1.6), (3.3) неположительна при $\|x\| \leq R(h)$, где $R(h) > 0$ — какое-либо решение неравенства (A2). Отсюда следует, что при

$$\delta(\varepsilon) = \sqrt{\frac{c_1}{c_2}} \min\{\varepsilon, R(h)\}$$

выполнено свойство (3.4) для всех решений нелинейной системы (1.6), (3.3), удовлетворяющих начальному условию $\|x(0)\| < \delta(\varepsilon)$.

Оператор Q допускает представление

$$Q = 2\Pi^*\Pi,$$

где линейный оператор $\Pi : l^2 \to l^2$ ограничен, $0 \notin \sigma(\Pi)$. Следовательно, стандартная норма

$$\|x\| = \left(\theta^2 + \omega^2 + \sum_{i=1}^{k}\sum_{n=1}^{\infty}\left({P_{in}}^2 + {Q_{in}}^2\right)\right)^{1/2}$$

и

$$\|x\|_\Pi = \|\Pi x\|$$

эквивалентны в ℓ^2. Запишем линейную часть системы (1.6) с $v = \gamma(x)$ в виде
$$\dot{x} = -\bar{A}x, \quad x(0) = x_0 \in \ell^2, \tag{3.7}$$
где область определения $D(\bar{A})$ плотна в ℓ^2, $\bar{A}(0) = 0$. Из неравенства $\dot{V}(x) \le 0$ вытекает
$$\left\langle \Pi \bar{A}x, \Pi x \right\rangle \ge 0$$
для всех $x \in D(\bar{A})$. Следовательно, оператор $\bar{A}$ аккретивен, $-\bar{A}$ — генератор непрерывной сжимающей полугруппы в $(\ell^2, \|\cdot\|_\Pi)$ на основании следствия 4.4 из [21] (см. также [7]). Это означает, что слабые (mild) решения задача Коши корректно определены для $t \in [0, +\infty)$ [7, 13].

Для доказательства свойства притяжения (3.5) применим бесконечномерный аналог теоремы Барбашина–Красовского — принцип инвариантности ЛаСалля [7, 15]. Для этого необходимо доказать, что любая полутраектория управляемой системы на $t \ge 0$ содержится в некотором предкомпактном подмножестве ℓ^2.

Рассмотрим уравнение $(\lambda\bar{A} + I)x = y$ относительно x, где $\lambda = \text{const}$,
$$x = (\theta, \omega,\, Q_{11}, P_{11}, \ldots, Q_{k1}, P_{k1},\, Q_{12}, P_{12}, \ldots)^T \in \ell^2,$$
$$y = (\bar{\theta}, \bar{\omega},\, \bar{Q}_{11}, \bar{P}_{11}, \ldots, \bar{Q}_{k1}, \bar{P}_{k1},\, \bar{Q}_{12}, \bar{P}_{12}, \ldots)^T \in \ell^2.$$
Непосредственные выкладки показывают, что для каждого значения $\lambda > 0$, выражение $x = (\lambda\bar{A} + I)^{-1}y$ можно записать следующим образом:
$$\begin{pmatrix} \theta \\ \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \bar{\theta} \\ \bar{\omega} + \lambda\bar{v}(y) \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} Q_{in} \\ P_{in} \end{pmatrix} = \frac{1}{1 + \lambda^2 c_i^2 \lambda_{in}} \begin{pmatrix} 1 & \lambda c_i\sqrt{\lambda_{in}} \\ -\lambda c_i\sqrt{\lambda_{in}} & 1 \end{pmatrix}$$
$$\times \begin{pmatrix} \bar{Q}_{in} \\ \bar{P}_{in} - \lambda J_{in}\bar{v}(y) \end{pmatrix}, \quad i = \overline{1,k},\ n \in \mathbb{N},$$
где
$$\bar{v}(y) = -\Delta(\bar{\theta} + (\lambda + h)\bar{\omega}) + \Delta \sum_{i,n} \frac{c_i\sqrt{\lambda_{in}}J_{in}}{1 + \lambda^2 c_i^2 \lambda_{in}} \big(\bar{Q}_{in} + \lambda c_i \sqrt{\lambda_{in}}\bar{P}_{in}\big),$$
$$\Delta^{-1} = J + \lambda(\lambda + h) - \sum_{i,n} \frac{J_{in}^2}{1 + \lambda^2 c_i^2 \lambda_{in}}.$$

Используя свойство $\{J_{in}\}_{n=1}^{\infty} \in \ell^2$ и представление (2.4) заключаем, что линейный функционал $\bar{v} : \ell^2 \to \mathbb{R}$ ограничен:

$$\|\bar{v}\|^2 = \Big(\sup_{\|y\|=1} |\bar{v}(y)| \Big)^2 = \Delta^2 \left(1 + (\lambda + h)^2 + \sum_{i=1}^{k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_i^2 \lambda_{in} J_{in}^2}{1 + \lambda^2 c_i^2 \lambda_{in}} \right) < \infty.$$

Далее, с учетом (2.4), неравенства $\frac{1}{2}(\alpha+\beta)^2 \le \alpha^2 + \beta^2$ и свойства $\{J_{in}\}_{n=1}^{\infty} \in \ell^2$, покажем, что матричная норма $\|(\lambda\bar{A}+I)^{-1}\|_M$ оператора $(\lambda\bar{A}+I)^{-1} : \ell^2 \to \ell^2$ конечна при всех $\lambda > 0$:

$$\frac{1}{2}\|(\lambda\bar{A}+I)^{-1}\|_M^2 \le 2+(1+\|\bar{v}\|^2)\lambda^2+\|\bar{v}\|^2\lambda^4+\sum_{i=1}^{k}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+\lambda^2\|\bar{v}\|^2 J_{in}^2}{1+\lambda^2 c_i^2\lambda_{in}} < \infty.$$

Таким образом, линейный оператор $(\lambda\bar{A}+I)^{-1} : \ell^2 \to \ell^2$ компактен при любом значении $\lambda > 0$. Отсюда по теореме 3 из [12] заключаем, что все положительные полутраектории системы (3.7) предкомпактны в ℓ^2.

Представим теперь нелинейную систему (1.6) с обратной связью (3.3) следующим образом:

$$\dot{x}(t) = -\bar{A}x(t) + \omega^2(t)Cx(t), \qquad x(0) = x_0 \in \ell^2, \tag{3.8}$$

где

$$Cx = \left(0, 0, 0, \frac{Q_{11}}{\sqrt{\lambda_{11}}}, 0, \frac{Q_{21}}{\sqrt{\lambda_{21}}}, \dots\right)^T.$$

Отметим, что инфинитезимальный генератор уравнения (3.8) является локально липшицевым возмущением оператора $-\bar{A}$, следовательно, решения (3.8) корректно определены для $\|x_0\| < \delta(\varepsilon)$, $t \ge 0$ по теореме 1.4 из [21].

Решения задачи (3.8) удовлетворяют интегральному уравнению

$$x(t) = e^{-t\bar{A}}x_0 + \int_0^t e^{(\tau-t)\bar{A}}\omega^2(t)Cx(\tau)\,d\tau. \tag{3.9}$$

Обозначим через $W_N : \ell^2 \to \ell^2$ линейный оператор проектирования на подпространство координат Q_{in}, P_{in} с $n \ge N$,

$$W_N : x \mapsto (0, 0, \dots, Q_{1N}, P_{1N}, Q_{2N}, P_{2N}, \dots)^T.$$

Поскольку производная функционала V в силу системы (3.8) при $\|x\| \le R(h)$ допускает оценку

$$\dot{V}(x(t)) \le -h^*\omega^2(t), \qquad h^* = \mathrm{const} > 0, \tag{3.10}$$

то
$$\int\limits_0^{+\infty} \omega^2(t)\,dt < \infty \tag{3.11}$$
на решениях (3.8) с $\|x_0\| < \delta(\varepsilon)$. Применяя оператор W_N к (3.9), с учетом (3.11) получим
$$\|W_N x(t)\| \le \|W_N e^{-t\bar{A}} x_0\| \\ + \int\limits_0^{+\infty} \omega^2(t)\,dt \cdot \sup_{s\in[0,t]} \|W_N e^{-s\bar{A}} C x(t-s)\|, \quad t \ge 0.$$
По доказанному, траектории полугруппы $\{e^{-t\bar{A}}\}_{t\ge 0}$ предкомпактны, траектории (3.8) ограничены при $\|x_0\| < \delta(\varepsilon)$. Отсюда, используя компактность оператора $C\ell^2 \to \ell^2$ и критерий Хаусдорфа, заключаем, что
$$\lim_{N\to\infty} \sup_{t\ge 0} \|W_N x(t)\| = 0$$
при $\|x_0\| < \delta(\varepsilon)$. Это означает, что положительные полутраектории нелинейной системы (3.8) предкомпактны в ℓ^2 по критерию Хаусдорфа.

Для завершения доказательства установим, что множество
$$M = \big\{x \in \ell^2 : \dot{V}(x) = 0\big\}$$
не содержит нетривиальных полутраекторий системы (1.6) с $v = \gamma(x)$, определенных при $t \ge 0$. Поскольку $\dot{V}(x)$ удовлетворяет неравенству (3.10), то каждая полутраектория на M удовлетворяет соотношениям
$$\omega(t) = 0, \qquad \theta(t) = \theta(0) + \omega(0)t, \qquad \gamma(x(t)) = \dot{\omega}(t) = 0,$$
$$\theta(0) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{n=1}^{\infty} c_i \sqrt{\lambda_{in}} J_{in} Q_{in}(t),$$
$$Q_{in}(t) = Q_{in}(0)\cos(c_i\sqrt{\lambda_{in}}t) + P_{in}(0)\sin(c_i\sqrt{\lambda_{in}}t),$$
$$P_{in}(t) = -Q_{in}(0)\sin(c_i\sqrt{\lambda_{in}}t) + P_{in}(0)\cos(c_i\sqrt{\lambda_{in}}t).$$
В частности, из приведенных выше выражений следует
$$\theta(0) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{n=1}^{\infty} c_i \sqrt{\lambda_{in}} J_{in} \big(Q_{in}(0)\cos(c_i\sqrt{\lambda_{in}}t) \\ + P_{in}(0)\sin(c_i\sqrt{\lambda_{in}}t)\big), \qquad \forall\, t \ge 0. \tag{3.12}$$

Из леммы 2.1 вытекает, что тождество (3.12) выполнено на M только при $x(0) = 0$ в условиях предположения $(A1)$. Поэтому множество M не содержит нетривиальных полутраекторий, а значит решение $x = 0$ системы (1.6) с $v = \gamma(x)$ сильно асимптотически устойчиво по теореме ЛаСалля [15]. □

Литература

[1] А. В. Балакришнан, *Прикладной функциональный анализ.* М.: Наука, 1980.

[2] А. М. Ковалев, А. Л. Зуев, В. Ф. Щербак, *Синтез стабилизирующего управления твердым телом с присоединенными упругими элементами* // Проблемы управления и информатики, (2002), N 6, 5–16.

[3] В. И. Коробов, Г. М. Скляр, *К вопросу о сильной стабилизируемости сжимающих систем в гильбертовых пространствах* // Диф. уравнения, **20** (1984), N 11, 1862–1869.

[4] Н. М. Крылов, *О разложении в ряды по фундаментальным функциям, встречаемых при интегрировании одного дифференциального уравнения с частными производными 4-го порядка.* Киев: Изд-во Киевского университета, 1911, 103 с.

[5] М. К. Набиуллин, *Стационарные движения и устойчивость упругих спутников.* Новосибирск: Наука, 1990.

[6] Е. М. Потапенко, *Устойчивость движения орбитально маневрирующего упругого КА* // Космические исследования, **28** (1990), 203–211.

[7] А. А. Шестаков, *Обобщенный прямой метод Ляпунова для систем с распределенными параметрами.* М.: Наука, 1990.

[8] A. M. Bloch, E. S. Titi, *On the dynamics of rotating elastic beams* // In New Trends in Systems Theory, Proc. Jt. Conf., Genoa/Italy (1990), volume **7** of Prog. Syst. Control Theory, P. 128–135. (1991).

[9] J. Baillieul, M. Levi, *Rotational elastic dynamics* // Physica, **27 D** (1987), 43–62.

[10] J.-M. Coron, B. d'Andrea Novel, *Stabilization of a rotating body beam without damping* // IEEE Trans. on Autom. Control, **44** (1998), 608–618.

[11] R. F. Curtain, *On stabilizability of linear spectral systems via state boundary feedback* // SIAM J. Control Optim. **23** (1985), 144–152.

[12] C. M. Dafermos, M. Slemrod, *Asymptotic behavior of nonlinear contraction semigroups* // J. Funct. Anal.**13** (1973), 97–106.

[13] H. O. Fattorini, *Infinite dimensional optimization and control theory.* Cambridge University Press, Cambridge, 1999.

[14] H. Laousy, C. Z. Xu, G. Sallet, *Boundary feedback stabilization of a rotating body-beam system* // IEEE Trans. on Autom. Control, **41** (1996), 241–245.

[15] J. P. LaSalle, *Stability theory and invariance principles* in Dynamical systems. Vol. 1. Int. symp. on dyn. syst. Providence 1974 (L. Cesari, J. K. Hale, and J. P. LaSalle Eds.) New York: Academic Press, P. 211-222, 1976.

[16] Z.-H. Luo, B.-Z. Guo, O. Morgul, *Stability and stabilization of infinite dimensional systems with applications.* London: Springer-Verlag, 1999.

[17] W. Krabs, *On moment theory and controllability of one dimensional vibrating systems and heating processes. Lecture Notes in Control and Information Sciences, vol. 173*, Springer-Verlag, Berlin, 1992.

[18] W. Krabs, G. M. Sklyar, *On the Stabilizability of a Slowly Rotating Timoshenko Beam* // Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen, **19** (2000), N 1, 131–145.

[19] W. Krabs, G. M. Sklyar, *Controllability of linear vibrations.* Huntington, NY: Nova Science Publishers Inc., 2002.

[20] N. Levan, L. Rigby, *Strong stabilizability of linear contractive control systems on Hilbert space* // SIAM J. Control Optim. **17** (1979), 23–35.

[21] A. Pazy, *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*. Springer-Verlag, New York, 1983.

[22] C. Z. Xu, J. Baillieul, *Stabilizability and stabilization of a rotating body-beam system with torque control* // IEEE Trans. on Autom. Control, **38** (1993), 1754–1765.

[23] A. L. Zuyev, *Partial asymptotic stabilization of nonlinear distributed parameter systems* // Automatica, **41**, (2005) N 1, 1–10.

Сведения об авторах

Александр Леонидович Зуев

Институт прикладной математики
и механики НАН Украины
ул. Р. Люксембург 74,
83114, Донецк
Украина
Technical University of Ilmenau
P.O.B. 100565, D-98684 Ilmenau,
Germany
E-Mail: al_zv@mail.ru