Український математичний вісник
Том 4 **(2007)**, № 3, 333 – 354

Преобразование Фурье–Винера функционалов от потока Арратья

Андрей А. Дороговцев

(*Представлена С. Я. Махно*)

Аннотация. В работе построен стохастический интеграл и преобразование Фурье–Винера для функционалов от потока Арратья.

2000 MSC. 60H70, 60H10.

Ключевые слова и фразы. Преобразование Фурье–Винера, стохастический поток, теорема Гирсанова.

Настоящая работа посвящена построению и исследованию свойств аналога преобразования Фурье–Винера от потока Арратья склеивающихся броуновских частиц. Поток Арратья является существенно негауссовским объектом (см., например, [1], где исследуется поток σ-алгебр, порожденный потоком Арратья), однако наследует некоторые черты, присущие гауссовскому случаю. Так, например, в работах [2,3] показано, что имеют место аналоги теоремы Кларка об интегральном представлении винеровских функционалов [4] и теоремы Гирсанова об абсолютной непрерывности распределения броуновского движения со сносом и виде плотности [4]. В этой статье продолжается линия работ [2,3], а именно, строится аналог преобразования Фурье–Винера для функционалов от потока Арратья. Работа состоит из двух частей. В первой приведено описание потока Арратья и сходных объектов, построенных с помощью склеивания независимых винеровских процессов, а также описывается конструкция стохастического интеграла по потоку Арратья, введенного в [2] для получения аналога теоремы Гирсанова. Вторая часть содержит определение преобразования Фурье–Винера и исследование его свойств.

Статья поступила в редакцию 16.08.2007

ISSN 1810 – 3200.

1. Стохастический интеграл по потоку Арратья

Исходным объектом в данной работе является случайное поле $x(u,t), u \in \mathbb{R}, t \in [0;1]$, которое, с точностью до распределения, однозначно задается следующими свойствами [5]. Для произвольного конечного набора $u_1 < \cdots < u_n$

1) $x(u_1, \cdot)$ — стандартный винеровский процесс, начинающийся в точке u_1,

2) для произвольного $t \in [0;1]$

$$x(u_1,t) \leq x(u_2,t),$$

3) сужение распределения $(x(u_1,\cdot),\ldots,x(u_n,\cdot))$ в $C([0;1],\mathbb{R}^n)$ на множество функций

$$\{f : f_k(0) = u_k,\ k = 1,\ldots,n,\ f_1(t) < f_2(t) < \cdots < f_n(t),\ t \in [0;1]\}$$

совпадает с сужением на то же множество распределения стандартного n-мерного винеровского процесса, стартовавшего из $(u_1,\ldots,u_n)$.

Замечание 1.1. Из приведенного описания следует, что для каждых $u_1 < u_2$ случайные процессы $x(u_1,\cdot), x(u_2,\cdot)$ ведут себя как независимые винеровские процессы до момента встречи, а затем движутся вместе. Последнее вытекает из того, что момент встречи координат является марковским моментом для двумерного винеровского процесса, строго марковского свойства [4] для винеровского процесса и условий 1) и 2), сформулированных выше.

Говоря неформально, поток Арратья состоит из броуновских частиц, начинающих движение независимым образом из каждой точки прямой и движущихся вместе после встречи. Как слабый предел подходящим образом шкалированных семейств случайных блужданий такой поток возникает в первоначальной работе [6]. В дальнейшем схемы взаимодействия таких блужданий усложнялись (см., например, [7] и имеющиеся там ссылки). В работе [5] поток Арратья получен как слабый предел гладких стохастических потоков, отвечающих стохастическим дифференциальным уравнениям. Много интересных свойств потока Арратья и исследование им порожденных σ-алгебр содержится в [1]. Для нас будут представлять интерес функционалы от всего потока Арратья, его сужения на некоторый отрезок, а также наборов случайных процессов вида $\{x(u_k,\cdot); k \geq 1\}$, $\{x(k,\cdot); k \in \mathbb{Z}\}$, где $\{u_k; k \geq 1\}$ — последовательность плотная в $\mathbb{R}$ или на некотором отрезке. В работе [8] было показано, что будучи рассмотрен как случайный процесс в $C([0;1])$ $x(u,\cdot), u \in \mathbb{R}$ является марковским процессом, имеющим модификацию, непрерывную справа и с пределами слева в каждой точке. Далее рассматривается именно эта модификация. Отметим, что в [8] показано, что $x(u,\cdot), u \in \mathbb{R}$ не является непрерывным процессом в $C([0;1])$. Тем не менее, справедливо следующее утверждение.

Лемма 1.1. *Для произвольного $u_0 \in \mathbb{R}$ x непрерывен в u_0 (как $C([0;1])$-значная функция) с вероятностью 1.*

Доказательство. Достаточно заметить, что, как слабый предел винеровских процессов, процесс $x(u_0-,\cdot)$ является стандартным винеровским, начинающимся в u_0 и, при этом,

$$\forall\, t \in [0;1]: \ x(u_0-,t) \le x(u_0,t).$$

Так как в приведенном неравенстве возможен только знак равенства, то утверждение леммы справедливо. $\square$

Приведем теперь конструкции интегралов по потоку Арратья, используемые далее. Впервые эти конструкции были предложены в работах автора [2, 3].

Пусть $\{x(u,t), u \in \mathbb{R}, t \in [0;1]\}$ — поток Арратья. Рассмотрим отрезок $[0,U] \subset \mathbb{R}$ и последовательность различных точек $\{u_n; n \ge 1\}$ из этого отрезка. Определим случайные моменты времени

$$\begin{aligned}
&\tau_1 = 1,\\
&\tau_k = \inf\left\{1; t: \prod_{j=1}^{k-1}(x(u_k,t) - x(u_j,t)) = 0\right\}, \qquad (1.1)\\
&k \ge 2.
\end{aligned}$$

Случайное время τ_k можно интерпретировать как время свободного пробега частицы, стартовавшей из u_k до момента ее приклеивания к какой-нибудь из частиц, стартовавших из точки с меньшим номером или до 1, если такое склеивание не состоялось. Покажем, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tau_n < +\infty \text{ п.н.} \qquad (1.2)$$

Так как случайные величины τ_n неотрицательны, то достаточно проверить, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} M\tau_n < +\infty. \qquad (1.3)$$

Начнем со следующей простой леммы.

Лемма 1.2. *Пусть* $\{w(t);\ t \in [0;1]\}$ *— стандартный винеровский процесс на* $[0;1]$*, начинающийся в* 0*. Обозначим для* $u > 0$

$$\tau_u = \inf\{1,\ t : w(t) = u\}.$$

Тогда

$$M\tau_u \sim \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\, u, \qquad u \to 0+.$$

Доказательство. Так как $\forall\, t \in [0;1]$:

$$P\{\tau_u \geq t\} = \int\limits_{-u}^{u} p_t(v)\, dv,$$

где p_t — плотность распределения $w(t)$, то

$$M\tau_u = \int\limits_0^1 P\{\tau_u \geq t\}\, dt = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \int\limits_0^1 \int\limits_{-u}^{u} \frac{e^{-\frac{v^2}{2t}}}{\sqrt{t}}\, dv\, dt$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \int\limits_{-u}^{u} \int\limits_0^1 \frac{e^{-\frac{v^2}{2t}}}{\sqrt{t}}\, dt\, dv.$$

Так как

$$\lim_{v \to 0} \int\limits_0^1 \frac{e^{-\frac{v^2}{2t}}}{\sqrt{t}}\, dt = \int\limits_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2,$$

то

$$M\tau_u \sim \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\, u, \qquad u \to 0+.$$

Лемма доказана. □

Следствие 1.1. *Из доказанного соотношения следует, что существует такая положительная постоянная* C*, что для всех* $u > 0$

$$M\tau_n \leq C \cdot u.$$

Рассмотрим теперь частичную сумму ряда (1.3). Отметим, что для каждого $n \geq 1$

$$\sum_{k=1}^{n} \tau_k = \sum_{k=1}^{n} \sigma_k,$$

где

$$\sigma_1 = \tau_1 = 1,$$
$$\sigma_k = \inf\{1, t : x(u_{(k)}, t) = x(u_{(k-1)}, t)\},$$
$$k = 2, \ldots, n.$$

Здесь $u_{(1)} < u_{(2)} < \cdots < u_{(n)}$ — упорядоченные в порядке возрастания точки $u_1, \ldots, u_n$. Согласно следствию из леммы 1.2

$$M \sum_{k=1}^{n} \sigma_k \le C \sum_{k=2}^{n} (u_{(k)} - u_{(k-1)}) \le C \cdot U.$$

Таким образом, ряд (1.3) сходится и, следовательно, ряд (1.2) сходится почти наверное.

Заметим, что в том случае, когда $\{u_n; n \ge 1\}$ плотна в $[0; U]$,

$$M \sum_{k=1}^{n} \tau_k = M \sum_{k=1}^{n} \sigma_k \to 2\sqrt{2}U + 1, \qquad n \to \infty. \tag{1.4}$$

Для двух последовательностей $\{u_n; n \ge 1\}$ и $\{v_n; n \ge 1\}$, плотных в $[0; U]$, совпадают не только суммы в (1.3), но и суммы в (1.2). Чтобы убедиться в этом, заметим, что в силу леммы 1.2

$$\left| M \sum_{k=1}^{n} \sigma_k - \frac{2}{\sqrt{\pi}} U + 1 \right| \le \varphi\bigl(\max_{k=1,\ldots,n-1} u_{(k+1)} - u_{(k)} \bigr),$$

где $\varphi : [0; +\infty) \to [0; +\infty)$ — функция, такая, что

$$\varphi(r) \to 0, \qquad r \to 0+.$$

Поэтому, две суммы времен свободного пробега для частиц, стартовавших из $u_1, \ldots, u_n$ и $v_1, \ldots, v_n$ близки к такой же сумме, построенной по объединению этих двух множеств при достаточно большом n. Получающуюся сумму (1.2) для какой-либо плотной в $[0; U]$ последовательности $\{u_n; n \ge 1\}$ назовем суммарным свободным пробегом и обозначим через $S(U)$. Значение $S(U)$ можно получить и по-другому. Для каждого $n \ge 1$

$$\sum_{k=1}^{n} \tau_k = \int_0^1 \nu_n(t)\, dt,$$

где $\nu_n(t)$ — количество различных чисел среди $x(u_1, t), \ldots, x(u_n, t)$. Заметим теперь, что при каждом t $x(\cdot, t)$ — возрастающая функция по u. Следовательно, $\nu_n(t) \to \nu(t), n \to \infty$, где $\nu(t)$ на единицу превосходит количество скачков $x(\cdot, t)$ на $[0; U]$. В силу теоремы Лебега о монотонной сходимости

$$S(U) = \sum_{k=1}^{\infty} \tau_k = \int_0^1 \nu(t)\,dt. \tag{1.5}$$

В частности, $\nu(t)$ конечно почти наверное, что означает, что образ каждого отрезка при отображении $x(\cdot, t)$ является конечным множеством. Таким образом, $x(\cdot, t)$ — монотонно неубывающая ступенчатая функция, имеющая конечное число скачков на любом отрезке.

Пусть $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — ограниченная измеримая функция, множество $\{u_n; n \geq 1\}$ плотно в $[0; U]$, содержит 0 и U, а случайные моменты $\{\tau_n; n \geq 1\}$ определены так же, как раньше.

Теорема 1.1 ([2, 3]). *Ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\tau_n} a(x(u_n, s))\,dx(u_n, s) \tag{1.6}$$

сходится в среднем квадратическом, а его сумма не зависит от выбора последовательности $\{u_n; n \geq 1\}$.

Доказательство. Заметим, что в (1.6) слагаемые некоррелированы. Действительно, при фиксированном $N \geq 1$ моменты $\tau_1, \ldots, \tau_N$ и случайные процессы $x(u_1, t), \ldots, x(u_N, t),\ t \in [0; 1]$ могут быть описаны следующим образом. Пусть $w_1, \ldots, w_N$ — независимые стандартные винеровские процессы, начинающиеся в $u_1, \ldots, u_N$ соответственно. Положим $y_1(t) = w_1(t),\ t \in [0; 1]$, $\sigma_1 = 1$. Пусть

$$\sigma_2 = \inf\{1;\ t : w_2(t) = w_1(t)\},$$

и

$$y_2(t) = \begin{cases} w_2(t), & t \leq \sigma_2 \\ w_1(t), & t \geq \sigma_2. \end{cases}$$

Далее

$$\sigma_3 = \inf\{1; t : w_3(t) = y_2(t) \text{ или } w_3(t) = y_1(t)\},$$

$$y_3(t) = \begin{cases} w_3(t), & t \leq \sigma_3 \\ y_2(t) \text{ или } y_1(t), & t \geq \sigma_3. \end{cases}$$

Поступая аналогичным образом, получим последовательность случайных процессов $y_1, \ldots, y_N$ и моментов $\sigma_1, \ldots, \sigma_N$. При этом набор

$y_1, \ldots, y_N$ совпадает по распределению с набором $x(u_1, \cdot), \ldots, x(u_N, \cdot)$, а моменты σ_i определены аналогично моментам τ_i. Поэтому, для произвольных $1 \le k < l \le N$

$$M \int_0^{\tau_k} a(x(u_k, s))\, dx(u_k, s) = M \int_0^{\sigma_k} a(y_k(s))\, dy_k(s),$$

$$\begin{aligned} M \int_0^{\tau_k} a(x(u_k, s))\, dx(u_k, s) \int_0^{\tau_l} a(x(u_l, s))\, dx(u_l, s) \\ = M \int_0^{\sigma_k} a(y_k(s))\, dy_k(s) \int_0^{\sigma_l} a(y_l(s))\, dy_l(s). \end{aligned}$$

Отметим теперь, что w_k являются независимыми винеровскими процессами и σ_k — момент остановки относительно их совместного потока σ-алгебр. Поэтому,

$$M \int_0^{\sigma_k} a(y_k(s))\, dy_k(s) = M \int_0^{\sigma_k} a(w_k(s))\, dw_k(s) = 0.$$

Аналогично

$$M \left(\int_0^{\sigma_k} a(y_k(s))\, dy_k(s) \right)^2 = M \int_0^{\sigma_k} a^2(y_k(s))\, ds,$$

$$M \int_0^{\sigma_k} a(y_k(s))\, dy_k(s) \int_0^{\sigma_l} a(y_l(s))\, dy_l(s) = 0.$$

Таким образом, сходимость в среднем квадратическом ряда (1.6) равносильна сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} M \int_0^{\tau_n} a^2(x(u_n, s))\, ds, \tag{1.7}$$

который, в силу ограниченности функции a, мажорируется рядом (1.3). То, что сумма в (1.6) не зависит от выбора последовательности $\{u_n; n \ge 1\}$, проверяется аналогично доказательству такого же факта для (1.2). Теорема доказана. □

Отметим, что ряд (1.6) сходится иногда и для неограниченной функции a.

Пример 1.1. Докажем, что утверждение теоремы 1.1 справедливо для ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{\Delta_m(\tau_n)} d\vec{x}(u_n, s), \tag{1.8}$$

где

$$\Delta_m(t) = \{0 \le s_1 \le \cdots \le s_m \le t\},$$

а символ $d\vec{x}(u, s)$ соответствует m дифференциалам $dx(u, s_1) \times dx(u, s_2) \cdots dx(u, s_m)$. Действительно, в силу известного соотношения для произвольного $t \in [0; 1]$ справедливо равенство

$$\left(\int\limits_{\Delta_m(t)} d\vec{x}(u_n, s) \right)^2 = \int\limits_0^t \xi(s)\, dx(u_n, s) + \frac{t^m}{m!}$$

с некоторой квадратично интегрируемой случайной функцией ξ, согласованной с потоком $x(u_n, \cdot)$. Поэтому

$$M\left(\int\limits_{\Delta_m(\tau_n)} d\vec{x}(u_n, s) \right)^2 = \frac{1}{m!}\, M\tau_n^m.$$

Кроме того, как и в (1.6), слагаемые в (1.8) ортогональны. Таким образом, сходимость в среднем квадратическом ряда (1.8) равносильна сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} M\tau_n^m,$$

который сейчас мажорируется сходящимся рядом (1.3). Независимость суммы от выбора $\{u_n; n \ge 1\}$ проверяется так же, как и раньше.

Определение 1.1. *Сумма* (1.6) *называется интегралом от функции a относительно потока Арратья по отрезку* $[0; U]$.

Обозначать такой интеграл в дальнейшем будем

$$\int\limits_0^U \int\limits_0^{\tau(u)} a(x(u, s))\, dx(u, s).$$

В этом обозначении $\tau(u)$ больше не является моментом встречи винеровского процесса, вышедшего из u с каким-то еще, а только подчеркивает, что интеграл получился в результате суммирования стохастических интегралов по кускам траекторий до случайных моментов времени. Также, два знака интеграла и только один знак дифференциала соответствуют тому, что малыми становятся сами стохастические интегралы. Следующее свойство введенного интеграла используется далее. Обозначим для $U \geq 0$

$$G_U = \sigma(x(u,\cdot); u \in [0;U]).$$

Лемма 1.3. *Случайный процесс*

$$\int_0^U \int_0^{\tau(u)} a(x(u,s))\, dx(u,s)$$

является (G_U)-мартингалом.

Доказательство леммы 1.3 мы проведем после обсуждения аналога теоремы Кларка для полученного стохастического интеграла. Как известно [4], любая квадратично интегрируемая случайная величина α, измеримая относительно винеровского процесса $\{w(t); t \in [0;1]\}$, может быть единственным образом представлена в виде

$$\alpha = M\alpha + \int_0^1 \xi(t)\, dw(t). \tag{1.9}$$

В интеграле Ито (1.9) квадратично интегрируемая случайная функция ξ единственным образом строится по α. Поскольку поток Арратья построен по совокупности винеровских процессов, то можно ожидать, что для функционалов от него также будет иметь место аналог представления (1.9). Начнем со следующей леммы [2].

Лемма 1.4. *Пусть $\{w(t); t \in [0;1]\}$ — стандартный винеровский процесс, τ — момент остановки для него, квадратично интегрируемая величина α измерима относительно $\{w(t \wedge \tau); t \in [0;1]\}$. Тогда α единственным образом представляется в виде*

$$\alpha = M\alpha + \int_0^\tau \xi(t)\, dw(t)$$

с интегралом Ито от квадратично интегрируемой случайной функции ξ в правой части.

Полученное представление можно распространить и на функционалы, зависящие от нескольких независимых винеровских процессов. Пусть $w_k,\ k = 1, \ldots, n$ — независимые винеровские процессы на $[0; 1]$. Отметим, что случайную функцию ξ, измеримую относительно $w_k,\ k = 1, \ldots, n$ так, что при каждом $t \in [0; 1]$ сужение ξ на $[0; t]$ измеримо относительно $\{w_k(s);\ s \in [0; 1],\ k < n,\ w_n(s);\ s \leq t\}$ можно интегрировать по w_n так же, как и при конструировании интеграла Ито, и полученный интеграл обладает теми же свойствами. Про такую случайную функцию далее будем говорить, что она измерима относительно $w_1, \ldots, w_{n-1}$ и согласована с потоком w_n.

Лемма 1.5. *Пусть при каждом $k = 1, \ldots, n$ τ_k — момент остановки относительно потока, порожденного $w_1, \ldots, w_k$, α — квадратично интегрируемая величина, измеримая относительно $\{w_1(t \wedge \tau_1), w_2(t \wedge \tau_2), \ldots, w_n(t \wedge \tau_n)\};\ t \in [0; 1]$. Тогда α единственным образом представляется в виде суммы*

$$\alpha = M\alpha + \sum_{k=1}^{n} \int_0^{\tau_k} \xi_k(t)\, dw_k(t),$$

где случайная функция ξ_k при $k = 1, \ldots, n$ измерима относительно $w_1, \ldots, w_{k-1}$ и согласована с потоком w_k.

Доказательство. Пусть

$$\widetilde{w}_k(t) = w_k(t \wedge \tau_k).$$

Рассмотрим случайную величину

$$\zeta = \alpha - M(\alpha / \widetilde{w}_1, \ldots, \widetilde{w}_{n-1}).$$

По условию ζ является функцией от $\widetilde{w}_1, \ldots, \widetilde{w}_n$. Поэтому ζ при фиксированных $\widetilde{w}_1, \ldots, \widetilde{w}_n$ измерима относительно $\widetilde{w}_n$, и согласно предыдущей лемме, допускает представление

$$\zeta = \int_0^{\tau_n} \xi_n(t)\, dw_n(t),$$

где случайная функция ξ_n измерима относительно $w_1, \ldots, w_{n-1}$ и согласована с потоком w_n. Применяя те же рассуждения к

$$M(\alpha / \widetilde{w}_1, \ldots, \widetilde{w}_{n-1}) - M(\alpha / \widetilde{w}_1, \ldots, \widetilde{w}_{n-2}),$$

получаем следующее слагаемое в представлении α и т.д. Единственность представления очевидна. Лемма доказана. □

Пусть теперь последовательность точек $\{u_n; n \geq 0\}$ плотна в отрезке $[0; U]$ и содержит 0 и U в качестве членов. Для каждого $n \geq 0$ определим момент остановки

$$\tau_n = \inf\{1, t : x(u_n, t) \in \{x(u_0, t), \ldots, x(u_{n-1}, t)\}$$

и положим $\tau_0 = 1$. Так как x непрерывен справа как случайный процесс в $C([0; 1])$, то σ-алгебра, порожденная x на $[0; U]$ совпадает с σ-алгеброй, порожденной значениями x в точках $\{u_n; n \geq 0\}$ и, что то же самое, с σ-алгеброй, порожденной процессами $\{x(u_n, \tau_n \wedge \cdot); n \geq 0\}$. Поэтому в качестве следствия леммы 1.5 и теоремы Леви [4] получаем утверждение.

Лемма 1.6 ([2]). *Пусть случайная величина α интегрируема с квадратом и измерима относительно σ-алгебры, порожденной x на $[0; U]$. Тогда α допускает представление*

$$\alpha = M\alpha + \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\tau_n} \xi_n(t)\, dx(u_n, t), \tag{1.10}$$

где при каждом $n \geq 0$ случайная функция ξ_n измерима относительно $x(u_0, \tau_0 \wedge \cdot), x(u_1, \tau_1 \wedge \cdot), \ldots, x(u_{n-1}, \tau_{n-1} \wedge \cdot)$ и согласована с потоком $x(u_n, \cdot)$.

Замечание 1.2. Отметим, что в (1.10) τ_n и ξ_n зависят от перестановки и выбора точек последовательности $\{u_n; n \geq 0\}$.

Вернемся теперь к доказательству утверждения леммы 1.3.

Доказательство. Пусть α — квадратично интегрируемая случайная величина, измеримая относительно σ-алгебры G_U, порожденной x на $[0; U']$. Для $U'' > U'$ рассмотрим

$$M\alpha \int_0^{U''} \int_0^{\tau(u)} a(x(u, s))\, dx(u, s).$$

Выберем последовательность разбиений, участвующую в построении интеграла, так, чтобы в нее всегда входила точка U'. Тогда, используя представление (1.9) для α, в котором в качестве последовательности $\{u_n; n \geq 0\}$ взята совокупность всех точек разбиений, попадающих в $[0; U']$, получаем, что

$$M\alpha \int_0^{U''} \int_0^{\tau(u)} a(x(u, s))\, dx(u, s) = M\alpha \int_0^{U'} \int_0^{\tau(u)} a(x(u, s))\, dx(u, s).$$

Лемма доказана. □

Аналогично построенному интегралу можно определить

$$\int\limits_0^U \int\limits_0^{\tau(u)} a(x(u,s))\,ds.$$

Построенные интегралы позволяют записать теорему Гирсанова для стохастических потоков. Построим вначале аналог потока Арратья со сносом. Пусть a — ограниченная функция на $\mathbb{R}$, удовлетворяющая условию Липшица. Рассмотрим стохастический поток в $\mathbb{R}$ $\{y(u,t); u \in \mathbb{R}, t \geq 0\}$, удовлетворяющий следующим условиям. Для произвольных $u_1 < \cdots < u_n$

1) $y(u_1, \cdot)$ — диффузионный процесс в $\mathbb{R}$ со сносом a и диффузией 1, стартовавший из u_1,

2) для всякого $t \geq 0$

$$y(u_1,t) \leq y(u_2,t) \leq \cdots \leq y(u_n,t),$$

3) для всякого $t \geq 0$ сужение распределения случайного процесса $\{(y(u_1,s),\ldots,y(u_n,s)) : s \in [0;t]\}$ на множество функций

$$\{\vec{f} \in C([0;t],\mathbb{R}^n) : f_i(0) = u_i, \qquad i = 1,\ldots,n,$$

$$f_1(s) < \cdots < f_n(s), \qquad s \in [0;t]\}$$

совпадает с сужением на то же множество распределения решения следующей системы (или совокупности) стохастических дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} dz_i(s) = a(z_i(s))\,dt + dw_i(s), \\ z_i(0) = u_i, \qquad\qquad\qquad i = 1,\ldots,n, \end{cases} \tag{1.11}$$

где $w_1,\ldots,w_n$ — независимые стандартные винеровские процессы.

На неформальном уровне поток y может быть описан как совокупность диффузионных частиц, имеющих снос a и диффузию 1, движущихся независимым образом до момента встречи и продолжающих движение вместе после встречи.

Лемма 1.7. *Поток y существует и определяется свойствами* 1)–3) *однозначно.*

Доказательство. Построим конечномерные распределения для y (отвечающие конечным наборам $u_1 < \cdots < u_n$). Для этого рассмотрим набор случайных процессов $z_1,\ldots,z_n$ из (1.11). Положим

$$y(u_1,t) = z_1(t), \qquad t \in [0;1].$$

Пусть
$$\tau_1 = \inf\{1, t : z_1(t) = z_2(t)\}.$$
Определим
$$y(u_2, t) = \begin{cases} z_2(t), & t \le \tau_1, \\ y(u_1, t), & t \ge \tau_1. \end{cases}$$
Так как τ_1 является моментом остановки относительно потока σ-алгебр, порожденного w_1 и w_2, а z_2 обладает строго марковским свойством относительно этого потока, то получившийся процесс $y(u_2, \cdot)$ будет диффузионным со сносом a и единичной диффузией. Определим далее τ_2, как обрезанный единицей момент встречи z_3 и $y(u_2, \cdot)$, и построим $y(u_3, \cdot)$ так же, как $y(u_2, \cdot)$. Поступая аналогичным образом далее, получим набор $y(u_1, \cdot), \dots, y(u_n, \cdot)$, который удовлетворяет всем требованиям 1)–3). Распределения полученных наборов согласованы между собой и отвечают некоторому случайному процессу $y(u, \cdot), u \in \mathbb{R}$ в $C([0; 1])$. Отметим также, что условия 1)–3) однозначно задают конечномерные распределения y. Лемма доказана. □

Цель настоящего пункта — доказательство абсолютной непрерывности распределения y относительно потока Арратья на фиксированном интервале по переменной u. Аналогично [8] можно показать, что y имеет модификацию с cádlág траекториями в $C([0; 1])$. Поэтому σ-алгебра, порожденная $y(x)$ на отрезке $[0; U]$ совпадает с σ-алгеброй, порожденной значениями $y(x)$ в точках вида $\left\{\frac{kU}{2^n};\ 0 \le k \le 2^n,\ n \ge 1\right\}$. Следовательно, достаточно проверить абсолютную непрерывность распределения сужения y на это множество относительно соответствующего сужения x. Справедлива следующая теорема [3], доказанная автором совместно с Маловичко Т. В.

Теорема 1.2. *Распределение процесса y абсолютно непрерывно относительно распределения процесса x в пространстве $D([0; U]$, $C([0; 1]))$ с плотностью*
$$p(x) = \exp\left\{ \int_0^U \int_0^{\tau(u)} a(x(u, s))\, ds(u, s) - \frac{1}{2} \int_0^U \int_0^{\tau(u)} a^2(x(u, s))\, ds \right\}. \quad (1.12)$$

Обозначим через $\mathcal{F}_{s,t}$ σ-алгебру, порожденную значениями $x(u)$, $u \in [s; t]$.

Лемма 1.8. *$\mathcal{F}_{s,t}$ непрерывно по t, т.е.* $\forall\, s_0 < t_0$:
$$\mathcal{F}_{s_0,t_0} = \bigvee_{s_0 \le t < t_0} \mathcal{F}_{s_0,t} = \bigcap_{t_0 < t} \mathcal{F}_{s_0,t} = \mathcal{F}_{s_0,t_0+}.$$

Доказательство. Равенство

$$\mathcal{F}_{s_0,t_0} = \bigvee_{s_0 \le t < t_0} \mathcal{F}_{s_0,t}$$

следует из леммы 1.1. Пусть теперь интегрируемая с квадратом случайная величина α измерима относительно $\mathcal{F}_{s_0,t_0+}$ и имеет нулевое среднее. Для $t > t_0$, согласно доказанной в [2] теореме Кларка, α можно представить как предел в среднем квадратическом сумм

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \int\limits_0^{\tau(u_k)} g_k(r)\, dx(u_k, r),$$

где $s_0 = u_0 < \cdots < u_n = t$ — разбиение $[s_0; t]$, $\tau(u_k)$ определен обычным образом при каждом k, случайная функция g_k измерима относительно $x(u_0), \ldots, x(u_{k-1})$ и согласована с потоком σ-алгебр, порожденным $x(u_k)$. Выберем разбиение так, чтобы некоторое u_k совпадало с t_0. Тогда

$$S'_n = S_n - M(S_n/\mathcal{F}_{s_0,t_0}) = \sum_{k=k_0+1}^{n} \int\limits_0^{\tau(u_k)} g_k(r)\, dx(u_k, r).$$

При этом S'_n сходится с измельчением разбиения в среднем квадратическом к $\alpha' = \alpha - M(\alpha/\mathcal{F}_{s_0,t_0})$.

Зафиксируем некоторое n. Затем повторим все построения для $t_0 < t_1 < u_{k_0+1}$. Получим новую последовательность сумм $\{S''_n\}$, построенную по разбиениям отрезка $[t_0; t_1]$ и также сходящуюся к α'. Пусть

$$S''_m = \sum_{j=1}^{m} \int\limits_0^{\tau(v_j)} h_m(r)\, dx(v_j, r),$$

где $t_0 < v_1 < \cdots < v_m = t_1$. Тогда

$$M S'_n S''_m = \sum_{j=1}^{m} M \int\limits_0^{\tau(v_j)} h_m(r)\, dx(v_j, r) \int\limits_0^{\tau(u_{k_0+1})} g_{k_0+1}(r)\, dx(u_{k_0+1}, r).$$

Здесь случайный момент $\tau(u_{k_0+1})$ связан с разбиением $\{u_k\}$. Таким образом,

$$|M S'_n S''_m|$$

$$\le (M S''_m)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(M \left(\int\limits_0^{\tau(u_{k_0+1})} g_{k_0+1}(r)\, dx(u_{k_0+1}, r) 1\!\!1_{\{\tau(u_{k_0+1}) = \sigma(t_1)\}} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

где $\sigma(t_1) = \inf\{1;\ r : x(t_1, r) = x(t_0, r)\}$. Отметим, что

$$M\,1\!\!1_{\{\tau(u_{k_0+1}) = \sigma(t_1)\}} \to 0, \qquad t_1 \to t_0+.$$

Более того, при $t_0 < t_1' < t_1'' < u_{k_0+1}$,

$$\{\tau(u_{k_0+1}) = \sigma(t_1'')\} \supset \{\tau(u_{k_0+1}) = \sigma(t_1')\}.$$

Таким образом, в силу теоремы Лебега о монотонной сходимости,

$$M\left(\int_0^{\tau(u_{k_0+1})} g_{k_0+1}(r)\,dx(u_{k_0+1}, r)\right)^2 1\!\!1_{\{\tau(u_{k_0+1})=\sigma(t_1)\}} \to 0, \qquad t_1 \to t_0+.$$

Тем самым

$$M(\alpha')^2 = 0.$$

Следовательно,

$$\bigcap_{t>t_0} \mathcal{F}_{s_0,t} = \mathcal{F}_{s_0,t_0}.$$

Лемма доказана. □

Замечание 1.3. Аналогичные построения в обратном времени показывают непрерывность $\mathcal{F}_{s,t}$ по первому аргументу.

Следствие 1.2. *Справедливо равенство*

$$\bigcap_{t>s} \mathcal{F}_{s,t} = \mathcal{F}_{s,s} = \sigma(x(s,\cdot)).$$

2. Преобразование Фурье–Винера

Напомним некоторые факты, касающиеся преобразования Фурье–Винера функционалов от винеровского процесса, в форме, удобной для дальнейшего. Пусть $\{w(t);\ t \in [0;1]\}$ — стандартный винеровский процесс, начинающийся в 0. Для произвольной случайной величины α, интегрируемой с квадратом и измеримой относительно w, справедливо разложение Ито–Винера

$$\alpha = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^1 \overset{k}{\cdots} \int a_k(r_1, \ldots, r_k)\, dw(r_1) \cdots dw(r_k), \tag{2.1}$$

в котором $a_0 = M\alpha$ — симметричные по совокупности переменных функции a_k, интегрируемые с квадратом по $[0;1]^k$, $k \geq 1$, а

$$\int_0^1 \overset{k}{\ldots} \int a_k(r_1, \ldots, r_k)\, dw(r_1) \cdots dw(r_k) \text{ —}$$

удобная запись кратного интеграла Ито

$$k! \int\limits_{\Delta_k(1)} a_k(r_1, \ldots, r_k)\, dw(r_1) \cdots dw(r_k).$$

Ряд (2.1) состоит из ортогональных слагаемых и

$$M\alpha^2 = a_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} k! \int_0^1 \overset{k}{\ldots} \int a_k^2(r_1, \ldots, r_k)\, ds_1 \cdots ds_k. \tag{2.2}$$

Обозначим для $\varphi \in L_2([0;1])$ через $\mathcal{E}_\varphi(t)$ стохастическую экспоненту

$$\mathcal{E}_\varphi(t) = e^{\int_0^t \varphi(s)\, dw(s) - \frac{1}{2}\int_0^t \varphi^2(s)\, ds}.$$

Отметим, что

$$M\mathcal{E}_\varphi(t) = 1.$$

Поэтому

$$M\mathcal{E}_\varphi^2(t) < +\infty.$$

Следовательно, определено математическое ожидание произведения

$$M\alpha\mathcal{E}_\varphi(1).$$

Так как для непрерывных φ

$$d\mathcal{E}_\varphi(t) = \varphi(t)\mathcal{E}_\varphi(t)\, dw(t),$$
$$\mathcal{E}_\varphi(0) = 1,$$

то

$$\mathcal{E}_\varphi(1) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \int_0^1 \overset{k}{\ldots} \int \varphi(r_1)\varphi(r_2) \cdots \varphi(r_k)\, dw(r_1) \cdots dw(r_k).$$

Отсюда и из (2.2)

$$M\alpha\mathcal{E}_\varphi(1) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^1 \overset{k}{\ldots} \int a_k(r_1, \ldots, r_k)\varphi(r_1) \cdots \varphi(r_k)\, dr_1 \cdots dr_k. \tag{2.3}$$

Обозначим
$$\mathcal{T}_\alpha(\varphi) = M\alpha\mathcal{E}_\varphi(1).$$
Отметим, что (2.3) — аналитическая по φ функция на $L_2([0;1])$. Следовательно, ядра $\{a_k; k \geq 0\}$, а значит и сама α, восстанавливаются по $\mathcal{T}_\alpha(\cdot)$ однозначно.

Определение 2.1. *$\mathcal{T}_\alpha$ называется преобразованием Фурье–Винера случайной величины α.*

Замечание 2.1. Отметим, что в литературе чаще используется
$$e^{i\int_0^t \varphi(s)\,dw(s) + \frac{1}{2}\int_0^t \varphi^2(s)\,ds}$$
вместо $\mathcal{E}_\varphi(t)$. Однако для нас $\mathcal{E}_\varphi(t)$ удобнее, т.к. является плотностью распределения процесса $w(\cdot) + \int_0^\cdot \varphi(s)\,ds$ относительно распределения $w(\cdot)$.

Пусть теперь функция $\varphi \in C([0;U] \times [0;1])$. Интегралы
$$m_\varphi((U) = \int\limits_0^U \int\limits_0^{\tau(u)} \varphi(u,s)\,dx(u,s),$$
$$a_\varphi(U) = \int\limits_0^U \int\limits_0^{\tau(u)} \varphi^2(u,s)\,ds$$
определены так же, как и ранее. Обозначим через $\mathcal{E}_\varphi(U)$ аналог стохастической экспоненты
$$\mathcal{E}_\varphi(U) = \exp\Big\{m_\varphi(U) - \frac{1}{2}a_\varphi(U)\Big\}.$$
Пусть L_2^U — пространство интегрируемых с квадратом случайных величин, измеримых относительно $\mathcal{F}_{0,U}$.

Теорема 2.1. *Линейные комбинации $\{\mathcal{E}_\varphi(U)\}$ плотны в L_2^U.*

Доказательство. Достаточно проверить, что из соотношения
$$M\alpha\mathcal{E}_\varphi(U) = 0, \qquad \varphi \in C([0;U] \times [0;1])$$
следует равенство $\alpha = 0$ для $\alpha \in L_2^U$. Заметим, что $\mathcal{F}_{0,U}$ порождена значениями потока x, отвечающими начальным точкам $\{u_k;\ k \geq 1\}$, образующим всюду плотное подмножество $[0;U]$. Учитывая приведенные выше построения конечномерных распределений x, можно

считать, что набор процессов $\{x(u_k,\cdot);\ k\ge 1\}$ получен из набора независимых винеровских процессов $\{w_k;\ k\ge 1\}$, стартующих из $\{u_k;\ k\ge 1\}$ таким образом, что $x(u_k,\cdot)$ совпадает с w_k до момента встречи с одним из процессов $\{x(u_1,\cdot),\ldots,x(u_{k-1},\cdot)\}$. Пусть α измерима относительно $\{x(u_1,\cdot),\ldots,x(u_n,\cdot)\}$. Тогда

$$\begin{aligned}
&M\alpha\mathcal{E}_\varphi(U)\\
&=\lim_{m\to\infty} M\alpha\exp\left\{\sum_{k=1}^{m}\int\limits_0^{\tau(u_k)}\varphi(u_k,s)\,dx(u_k,s)-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\int\limits_0^{\tau(u_k)}\varphi(u_k,s)^2\,ds\right\}\\
&\quad= M\alpha\exp\left\{\sum_{k=1}^{n}\int\limits_0^{\tau(u_k)}\varphi(u_k,s)\,dx(u_k,s)-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\int\limits_0^{\tau(u_k)}\varphi(u_k,s)^2\,ds\right\}\\
&\qquad= M\alpha\exp\left\{\sum_{k=1}^{n}\int\limits_0^{1}\varphi(u_k,s)\,dw(s)-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\int\limits_0^{1}\varphi(u_k,s)^2\,ds\right\}. \qquad (2.4)
\end{aligned}$$

Здесь использованы равенство нулю взаимной характеристики процессов $x(u_i,\cdot)$ и $x(u_j,\cdot), i\ne j$ до момента встречи и мартингальное свойство стохастической экспоненты. Согласно (2.4) из соотношения

$$M\alpha\mathcal{E}_\varphi(U)=0, \qquad \varphi\in C([0;U]\times[0;1])$$

следует, что $\alpha=0$. Таким образом, α лежит в замыкании линейной оболочки $\{\mathcal{E}_\varphi(U)\}$. Теперь утверждение теоремы следует из теоремы Леви и того факта, что сейчас

$$\mathcal{F}_{0,U}=\bigvee_{n=1}^{\infty}\sigma(x(u_1,\cdot),\ldots,x(u_n,\cdot)).$$

Теорема доказана. □

Введем следующее определение.

Определение 2.2. *Для случайной величины α, интегрируемой с квадратом и измеримой относительно $\mathcal{F}_{0,U}$, ее преобразованием Фурье–Винера называется функционал*

$$\mathcal{T}_\alpha(\varphi)=M\alpha\mathcal{E}_\varphi(U),$$

определенный на $C([0;U]\times[0;1])$.

Следствием теоремы является следующий факт.

Теорема 2.2. *Преобразование Фурье–Винера однозначно определяет случайную величину* α.

В некоторых случаях преобразование $\mathcal{T}$ для функционалов от потока Арратья можно вычислить в явном виде.

Пример 2.1. Рассмотрим случайную величину α из примера 1

$$\alpha = \int\limits_0^U \int\limits_{\Delta_m(\tau(u))} d\vec{x}(u,\cdot).$$

Для нее преобразование $\mathcal{T}$

$$\begin{aligned}
M\alpha\mathcal{E}_\varphi(U) &= \lim_{n\to\infty} M\Bigg(\sum_{k=1}^n \int\limits_{\Delta_m(\tau(u))} d\vec{x}(u,\cdot)\Bigg) \\
&\times \exp\Bigg\{\sum_{k=1}^n \int\limits_0^{\tau(u_k)} \varphi(u_k,s)\,dx(u_k,s) - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^n \int\limits_0^{\tau(u_k)} \varphi(u_k,s)^2\,ds\Bigg\} \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n M \int\limits_{\Delta_m(\tau(u_k))} d\vec{x}(u_k,\cdot) \\
&\times \cdot \exp\Bigg\{\int\limits_0^{\tau(u_k)} \varphi(u_k,s)\,dx(u_k,s) - \frac{1}{2}\int\limits_0^{\tau(u_k)} \varphi(u_k,s)^2\,ds\Bigg\} \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n M \int\limits_{\Delta_m(\tau(u_k))} \varphi(u_k,s_1)\cdots\varphi(u_k,s_m)\,ds_1\cdots ds_m \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{m!} \int \overset{m}{\underset{0}{\overset{1}{\cdots}}} \int \varphi(u_k,s_1)\cdots\varphi(u_k,s_m) P\{\tau(u_k)\ge s^*\}\,ds_1\cdots ds_m \\
&= \frac{2}{m!} \int\limits_0^U \int \overset{m}{\underset{0}{\overset{1}{\cdots}}} \int \varphi(u,s_1)\ldots\varphi(u,s_m)\sqrt{\frac{1}{\pi s^*}}\,ds_1\cdots ds_m\,du.
\end{aligned}$$

Здесь $s^* = \max_{k=1,\dots,m} s_k$.

Пусть теперь g ограниченная измеримая функция на $\mathbb{R}$. Рассмотрим следующий интегральный функционал от x

$$A(U) = \int\limits_0^U \int\limits_0^{\tau(u)} g(x(u,t))\,dx(u,t).$$

Знак $+$ в нижнем пределе интегрирования означает, что в суммах, использующихся при определении интеграла, отсутствует слагаемое, отвечающее точке 0.

Функционал A является мартингалом по U, а его приращения задают однородный аддитивный функционал от x. A определяется функцией g. Покажем, что g можно восстановить однозначно по преобразованию Фурье–Винера функционала A.

Теорема 2.3. *Функция g однозначно определяется по набору $\{A(U), U \geq 0\}$.*

Доказательство. Пусть $\varphi \in C^2([0;1])$. Определим, как и ранее, стохастическую экспоненту равенством

$$\mathcal{E}_\varphi(U) = \exp\left\{\int_0^U\int_0^{\tau(u)} \varphi(t)\,dx(u,t) - \frac{1}{2}\int_0^U\int_0^{\tau(u)} \varphi^2(t)\,dt\right\}.$$

Тогда, как и при доказательстве теоремы 2.1, можно проверить, что

$$MA(U)\mathcal{E}_\varphi = M\int_0^U\int_0^{\tau(u)} g(x(u,s))\varphi(s) \times \exp\left\{\int_0^s \varphi(t)\,dx(u,t) - \frac{1}{2}\int_0^s \varphi^2(t)\,dt\right\} ds.$$

Докажем, что существует

$$\lim_{U\to 0+} \frac{1}{u} MA(U)\mathcal{E}_\varphi$$

при $\varphi = \mathrm{const}$. Рассмотрим, как и ранее, $u_1 < u_2$,

$$\tau(u_2) = \inf\{1, t : x(u_2,t) = x(u_1,t)\}.$$

Найдем асимптотику при $u_2 \to u_1+$ математического ожидания

$$I(u_2) = M\int_0^{\tau(u_2)} g(x(u_2,s))\exp\left\{\lambda(x(u_2,s) - u_2) - \frac{\lambda^2 s}{2}\right\} ds.$$

Пусть w_1, w_2 — независимые стандартные винеровские процессы. Тогда

$$I(u_2) = M\int\limits_0^{\sigma(u_2)} g\Big(u_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}w_1(s) + \frac{1}{\sqrt{2}}w_2(s)\Big) \\ \times \exp\Big\{\frac{\lambda}{\sqrt{2}}w_1(s) + \frac{\lambda}{\sqrt{2}}w_2(s) - \frac{\lambda^2 s}{2}\Big\}\,ds,$$

где

$$\sigma(u_2) = \inf\Big\{1, t : w_1(t) = \frac{u_2 - u_1}{\sqrt{2}}\Big\}.$$

Поэтому,

$$I(u_2) = \int\limits_0^1 M\widetilde{g}\Big(\lambda, s, u_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}w_1(s)\Big)e^{\frac{\lambda}{\sqrt{2}}w_1(s) - \frac{\lambda^2 s}{4}}\,1\!\!\mathrm{I}_{\{\sigma(u_2)\geq s\}}\,ds.$$

Здесь

$$\widetilde{g}(\lambda, s, r) = Mg\Big(r + \frac{1}{\sqrt{2}}w_2(s)\Big)e^{\frac{\lambda}{\sqrt{2}}w_2(s) - \frac{\lambda^2 s}{4}}.$$

Следовательно,

$$I(u_2) = \int\limits_0^1\int\limits_0^{+\infty}\widetilde{g}\Big(\lambda, s, u_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}v\Big)e^{\frac{\lambda}{\sqrt{2}}v - \frac{\lambda^2 s}{4}} \\ \times \Big(p_s\Big(\frac{u_2 - u_1}{\sqrt{2}} - v\Big) - p_s\Big(\frac{u_2 - u_1}{\sqrt{2}} + v\Big)\Big)\,dv\,ds.$$

Таким образом,

$$\lim_{u_2\to u_1}\frac{1}{u_2 - u_1}I(u_2) \\ = \sqrt{2}\int\limits_0^1\int\limits_0^{+\infty}\widetilde{g}\Big(\lambda, s, u_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\,v\Big)\cdot e^{\frac{\lambda}{\sqrt{2}}v - \frac{\lambda^2 s}{4}}\frac{v}{s}p_s(v)\,dv\,ds. \quad (2.5)$$

Используя определение $A(u)$ и соотношение (2.5), получаем, что для $\varphi \equiv \lambda$

$$\lim_{U\to 0+}\frac{1}{U}MA(U)\mathcal{E}_\varphi = \sqrt{2}\int\limits_0^1\int\limits_0^{+\infty}\widetilde{g}\Big(\lambda, s, \frac{1}{\sqrt{2}}\,v\Big)e^{\frac{\lambda}{\sqrt{2}}v - \frac{\lambda^2 s}{4}}\frac{v}{s}p_s(v)\,dv\,ds.$$

Отметим, что аналогичные вычисления могли быть проведены для $\varphi = \lambda 1\!\!1_{[0;t]}$. Знание соответствующих пределов дает возможность найти

$$\int_0^{+\infty} \widetilde{g}\Big(\lambda, s, \frac{1}{\sqrt{2}}\, v\Big) e^{\frac{\lambda}{\sqrt{2}} v - \frac{\lambda^2 s}{4}} v p_s(v)\, dv\, ds$$

при $s \in (0; 1]$. Нетрудно видеть, что g однозначно восстанавливается по значениям полученных интегралов при фиксированном s. Теорема доказана. $\square$

Приведенное в этой теореме свойство функционала A является аналогом возможности восстановления неотрицательного аддитивного функционала по его характеристике.

Литература

[1] Le Jan Yves, Raimond Olivier, *Flows, coalescence and noise* // The Annals of Probability, **32** (2004), N 2, 1247–1315.

[2] A. A. Dorogovtsev, *One version of the Clark representation theorem for Arratia flow* // Theory of stochastic processes, **11(27)** (2005), N 3–4, 63–70.

[3] А. А. Дороговцев, *Стохастический интеграл по потоку Арратья* // Доклады Академии Наук, **410** (2006), N 2.

[4] Р. Ш. Липцер, А. Н. Ширяев, *Статистика случайных процессов.* М.: Наука, 1974, 696 с.

[5] A. A. Dorogovtsev, *One Brownian stochastic flow* // Theory of Stochastic Processes, **10 (26)**, (2004) N 3–4, 21–25.

[6] R. A. Arratia, *Brownian motion on the line. Ph.D dissertation.* Univ. Wisconsin, Madison, 1979.

[7] C. M. Newman, K. Ravishankar, R. Sun, *Convergence of coalescing nonsimple random walks to the Brownian web* // Electron. J. Probab. **10** (2005), N 2, 21–60 (electronic).

[8] А. А. Дороговцев, *Некоторые замечания о винеровских процессах со склеиванием* // Укр. мат. журн. **57** (2005), N 10, 1327–1333.

Сведения об авторах

Андрей Анатольевич Дороговцев

Институт математики НАН Украины
ул. Терещенковская 3,
01601, Киев-4,
Украина
E-Mail: adoro@imath.kiev.ua