Український математичний вісник
Том 4 **(2007)**, № 3, 311 – 332

Посвящается 100-летию
Марка Григорьевича Крейна

Бистрогие плюс-операторы и операторные дробно-линейные преобразования

Томас Я. Азизов, Виктор А. Хацкевич

(*Представлена М. М. Маламудом*)

Аннотация. Описаны условия, при которых дробно-линейное операторное отображение является преобразованием операторного шара $\mathfrak{K} = \{K \mid \|K\| \le 1\}$.

2000 MSC. 47B50.

Ключевые слова и фразы. Пространство Крейна, дробно-линейное преобразование, бистрогий плюс-оператор.

1. Введение

Пусть $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$ — гильбертовы пространства со скалярными произведениями $(\cdot,\cdot)_1$ и $(\cdot,\cdot)_2$, соответственно. Введем гильбертово пространство $\mathcal{H}$ со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2, \qquad (x,y) = (x_1,y_1)_1 + (x_2,y_2)_2, \tag{1.1}$$

где $x = x_1 + x_2$, $y = y_1 + y_2$, $x_j, y_j \in \mathcal{H}_j$, $j = 1, 2$.

Для гильбертовых пространств $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ через $L(\mathcal{F},\mathcal{G})$ обозначим множество линейных непрерывных операторов, определенных на $\mathcal{F}$ и действующих из $\mathcal{F}$ в $\mathcal{G}$. Если пространства $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ совпадают: $\mathcal{F} = \mathcal{G} =: \mathcal{H}$, то множество линейных непрерывных операторов, действующих в $\mathcal{H}$ будем обозначать $L(\mathcal{H})$.

Статья поступила в редакцию 28.08.2007
Работа Т. Я. Азизова поддержана грантом РФФИ 05-01-00203-а

ISSN 1810 – 3200. © Інститут математики НАН України

Четверка операторов $A_{ij} \in L(\mathcal{H}_i, \mathcal{H}_j)$, $i, j = 1, 2$, определяет матрицей

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

оператор $A \in L(\mathcal{H})$, и обратно, по оператору $A \in L(\mathcal{H})$ однозначно определяются компоненты $A_{ij} \in L(\mathcal{H}_i, \mathcal{H}_j)$, $i, j = 1, 2$, матрицы (1.2).

Обозначим через $\mathfrak{K}$ замкнутый шар в $L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ радиуса 1:

$$\mathfrak{K} = \{K \in L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2) \mid \|K\| \leq 1\},$$

и через $\mathcal{K}^\circ$ его внутренность:

$$\mathfrak{K}^\circ = \{K \in L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2) \mid \|K\| < 1\}.$$

Пусть оператор $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ задан матрицей (1.2). Формулой

$$F_A(X) = (A_{21} + A_{22}X)(A_{11} + A_{12}X)^{-1} \tag{1.3}$$

зададим *дробно-линейное отображение* (д.л.о.) $F_A : L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2) \to L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$. Область определения этого отображения $\operatorname{dom} F_A$ совпадает со множеством операторов $X \in L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$, для которых $(A_{11} + A_{12}X)^{-1} \in L(\mathcal{H}_1)$, а потому может оказаться и пустой. Заметим, что $\operatorname{dom} F_A \neq \emptyset$, если $A_{11}^{-1} \in L(\mathcal{H}_1)$ (в этом случае $X = 0 \in \operatorname{dom} F_A$). Нас будет интересовать случай $\operatorname{dom} F_A \supset \mathfrak{K}$, а это выполнено тогда и только тогда, когда

$$\|A_{11}^{-1}A_{12}\| < 1. \tag{1.4}$$

При выполнении условия (1.4) $\operatorname{dom} F_A$ содержит открытый шар $\mathfrak{K}_R^\circ \subset L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ с центром в нуле и радиуса $R = (\|A_{11}^{-1}A_{12}\|)^{-1}$.

Если

$$\mathfrak{K} \subset \operatorname{dom} F_A, \qquad F_A(\mathfrak{K}) \subset \mathfrak{K}, \tag{1.5}$$

будем называть F_A *дробно-линейным преобразованием* (д.л.п.) шара $\mathfrak{K}$. При выполнении условий (1.5) возможны варианты:

(a) $F_A(K) = \text{const}$ для всех $K \in \mathfrak{K}$,

(b) $F_A(K) \neq \text{const}$

Прямо проверяется, что случай (a) имеет место тогда и только тогда, когда оператор $A_{11}^{-1} \in L(\mathcal{H}_1)$, $\Gamma := A_{21}A_{11}^{-1}$ — сжатие, $A_{11}^{-1}A_{12}$ — равномерное сжатие и $A_{22} = \Gamma A_{12}$.

Пусть выполнено (b). В этом случае, как показано в [27], д.л.о. F_A — д.л.п. шара $\mathfrak{K}$ тогда и только тогда, когда A — бистрогий плюс-оператор в пространстве Крейна $\mathcal{H}$ относительно индефинитной J-метрики $[x, y] = (Jx, y)$, где J задается относительно (1.1) матрицей

$$J = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}.$$

Определение бистрогого плюс-оператора см. ниже в (1.9)–(1.10).

В [27] также показано, что для бистрогого плюс-оператора A наряду с (1.5) имеет место включение:

$$F_A(\mathfrak{K}^\circ) \subset \mathfrak{K}^\circ. \tag{1.6}$$

Таким образом, описание д.л.п. шара $\mathfrak{K}$, образ которого состоит из одного оператора, не представляет труда, и потому далее будем полагать, что выполнено условие (b) или, чуть более общо, оператор A является бистрогим плюс-оператором.

Напомним (за подробностями отсылаем к [4]), что оператор A называется бистрогим плюс-оператором, если он коллинеарен J-бинесжимающему оператору T:

$$[Tx, Tx] \geq [x, x], \quad [T^c x, T^c x] \geq [x, x], \qquad x \in \mathcal{H};$$

здесь через T^c обозначен J-сопряженный оператор T (определение см. ниже, в (1.19)). В качестве оператора T можно взять

$$T = (\mu(A))^{-1/2} A: \ \mu(A) \in (\mu_-(A), \mu_+(A)], \tag{1.7}$$

$$\mu_-(A) = \max\bigl\{0, \sup_{[x,x]=-1} [Ax, Ax]\bigr\}, \quad \mu_+(A) = \inf_{[x,x]=1} [Ax, Ax] > 0. \tag{1.8}$$

Таким образом, оператор A является бистрогим плюс-оператором тогда и только тогда, когда существует такая положительная постоянная μ, что

$$[Ax, Ax] \geq \mu[x, x], \qquad x \in \mathcal{H}, \tag{1.9}$$

$$[A^c x, A^c x] \geq \mu[x, x], \qquad x \in \mathcal{H}. \tag{1.10}$$

Отметим также, что оператор A является бистрогим плюс-оператором тогда и только тогда, когда выполнено хотя бы одно из условий (1.9) или (1.10) и A_{11} непрерывно обратим на всем $\mathcal{H}_1$. При этом оба оператора $A_{11}^{-1} A_{12}$ и $A_{21} A_{11}^{-1}$ — равномерные сжатия.

Оператор U называется J-унитарным, если

$$[Ux, Ux] = [x, x], \qquad x \in \operatorname{dom} U = \operatorname{ran} U = \mathcal{H}. \tag{1.11}$$

Если U — J-унитарный оператор, то

$$F_U(\mathfrak{K}) = \mathfrak{K}, \qquad F_U(\mathfrak{K}^\circ) = \mathfrak{K}^\circ. \tag{1.12}$$

В последнее время опубликована серия работ в различных областях математики, в которой используются д.л.о. и д.л.п. F_A как общего вида (1.3), так и их частные случаи, когда $\mathcal{H}_1 = \mathbb{C}$ или $\mathcal{H}_1 = \mathbb{C}$, $\mathcal{H}_2 = \mathbb{C}^n$, и часто даже в простейшем случае $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2 = \mathbb{C}$, где через $\mathbb{C}$ обозначается множество комплексных чисел. Так, например, д.л.о. и д.л.п. применялись в [11, 19–21] к изучению дихотомии, согласованной с сигнатурой пространства Крейна, дифференциальных и разностных уравнений специальных классов; в [12, 31] — к изучению генераторов однопараметрических полугрупп, в [7, 8, 13, 14, 16–18] — к проблеме Кёнигса и связанным с ней уравнениям Абеля–Шредера, в [1, 6, 7, 10, 29] — к изучению операторов композиции на функциональных пространствах, и т.д.

Остановимся подробнее на некоторых приложениях. Напомним, что проблема Кёнигса заключается во вложении заданной дискретной полугруппы G итераций д.л.п. F_A в непрерывную однопараметрическую полугруппу д.л.п. $F_{A(t)}$, $t > 0$, причем так, чтобы для $F_{A(t)}$, $t > 0$, были выполнены условия (1.5) и (1.6). Применяя различные методы, в том числе, уравнения Абеля–Шредера, удается построить непрерывную однопараметрическую полугруппу д.л.о. $F_{A(t)}$, содержащую G. При этом ключевым является установление условий (1.5) и (1.6), т.е. условий, при которых д.л.о. $F_{A(t)}$ является д.л.п. .

В теории операторов композиции рассматриваются операторы C_{F_A} вида

$$C_{F_A} = f \circ F_A, \tag{1.13}$$

где F_A — д.л.п. , а функции f голоморфны на $\mathfrak{K}^\circ$ и принадлежат пространствам Харди, Бергмана, Дирихле и др. Изучаются условия непрерывности, норма, спектр, сопряженный оператор $C^*_{F_A}$. При изучении $C^*_{F_A}$ часто удается показать, что

$$C^*_{F_A} = C_{F_B}, \tag{1.14}$$

где F_B — некоторое д.л.о. шара $\mathfrak{K}^\circ$. И снова ключевым является установление включения (1.6). Таким образом, насущной является задача отыскания условий в терминах элементов A_{ij}, $i, j = 1, 2$, матрицы A вида (1.2), при которых д.л.о. F_A — д.л.п. шара $\mathfrak{K}$. Впервые это было сделано в [2], где дано параметрическое описание всех J-бинесжимающих операторов и сразу для случая бесконечномерных $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$.

Для случая $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2 = \mathbb{C}$ описание д.л.о. F_A:

$$F_A(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \qquad z \in \mathbb{D}, \tag{1.15}$$

где $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$, являющихся д.л.п. круга радиуса 1 с центром в нуле, приведено в [29]. Именно, в [29] установлен следующий критерий: пусть $ad - bc \neq 0$ и $|\frac{d}{c}| \geq 1$ для $c \neq 0$. Д.л.о. F_A является д.л.п. круга $\mathbb{D}$ точно тогда, когда

$$|ad - bc| + |b\bar{d} - a\bar{c}| \leq |d|^2 - |c|^2 \tag{1.16}$$

или, эквивалентно,

$$|ad - bc| + |d\bar{c} - \bar{a}b| \leq |d|^2 - |b|^2. \tag{1.17}$$

Этот безусловно красивый результат вызвал определенный интерес и явился толчком к его распространению хотя бы на случай $\mathcal{H}_1 = \mathbb{C}$, $\mathcal{H}_2 = \mathbb{C}^n$. Ниже, в следствии 2.1 мы дадим простое доказательство этого критерия с позиций нашего подхода. Также поясним далее как получить гораздо более общий результат, опираясь на результаты из [2] (см. также [3]) о факторизации J-бинесжимающих операторов.

В разделе 2 настоящей статьи мы устанавливаем (теорема 3.2) как необходимое (2.17), так и достаточное (2.18) условия включения (1.5) для общего д.л.о. F_A вида (1.3).

Показано, что в частном случае числового д.л.о., т.е. при $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2 = \mathbb{C}$, условие (2.17) является не только достаточным, но также и необходимым, более того, оно совпадает с критерием (1.16). Приводится также соответствующий аналог (1.17). Эти результаты мы устанавливаем на основе факторизационной теоремы 3.1 нашей статьи. Все это вместе является соответственным продолжением и развитием результатов работ [15, 17].

В следующем разделе 3 рассматривается иной подход к описанию бистрогих плюс-операторов и порождаемых ими д.л.п., отвечающий другим потребностям.

Мы даем параметрическое описание J-несжимающего оператора T с помощью четырех параметров: обратимого растяжения $T_1 : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_1$ ($\|T_1x_1\| \geq \|x_1\|$, $x_1 \in \mathcal{H}_1$) и сжатий $T_2 : \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_2$, $S_{12} : \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_1$, $\Gamma : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$, причем $\|\Gamma\| < 1$ (Теорема 3.3). Добавив к ним пятый параметр — положительное число $\mu(A)$ — мы получаем полное описание всех бистрогих плюс-операторов в классе всех операторов из $L(\mathcal{H})$. При этом установлена формула

$$T_{21} = (I - T_2 T_2^*)^{1/2} S_{21} (T_1^* T_1 - I)^{1/2}, \tag{1.18}$$

связывающая внедиагональный элемент T_{21} нижнего треугольного J-несжимающего оператора T с элементами главной диагонали T_1 и T_2. Аналогичная формула имеет место для верхнего треугольного J-бинесжимающего T. Заметим, что все операторы A, порождающие одно и то же д.л.п., коллинеарны [18], поэтому при работе с д.л.п. F_A можно всегда считать оператор A J-бинесжимающим. Указанное параметрическое представление, прежде всего, имеет значение в теоретических исследованиях внутри самой теории операторов в пространствах Крейна. С другой стороны, оно имеет и прикладное значение. В работах [7, 15–17] в связи с применением к уравнениям Абеля–Шредера и проблеме Кёнигса, рассматривались верхние и нижние треугольные плюс-операторы A. Изучались ядра их внедиагональных элементов A_{ij}, $i \neq j$, в частности, устанавливались условия диагональности A. Показано, что A диагонален, если A_{11} унитарен и $\|A_{22}\| = 1$, либо если A_{22} изометричен и $\|A_{11}^{-1}\| = 1$. Из нашей формулы (1.18) и двойственной ей (для верхнего треугольного T) непосредственно следует, что для диагональности треугольного J-несжимающего оператора T достаточно изометричности T_1 или коизометричности T_2. Из двойственной формулы (3.2) для верхнего треугольного J-бинесжимающего оператора T следует, что для диагональности T достаточно изометричности одного из операторов T_1 или T_2.

Мы даем (см. замечание 3.3) также другой подход к параметрическому представлению строгих плюс-операторов T с $\operatorname{ran} T_{12} \subset \operatorname{ran} T_1$: в качестве параметров выступают положительное число μ, обратимое на своей области значений растяжение T_1, сжатие $S_2 : \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_2$ и два равномерных сжатия Γ и $\widetilde{\Gamma}$. При этом T_2 вычисляется по формуле (3.22).

В заключение введения сделаем важное, на наш взгляд, терминологическое замечание. В ряде работ (напр., [6, 10, 29] и др.) рассматривается сопряженное с д.л.о. F_A отображение $(F_A)^* = F_B$, где B определяется следующим образом:

$$B = \begin{pmatrix} A_{11}^* & -A_{21}^* \\ -A_{12}^* & A_{22}^* \end{pmatrix} \ (= JA^*J).$$

В фундаментальных работах [25–27] введено понятие J-сопряженного с A оператора A^c, который в случае ограниченного A может быть определен так:

$$[Ax, y] = [x, A^c y], \qquad \forall\, x, y \in \mathcal{H} \Longleftrightarrow A^c = JA^*J. \tag{1.19}$$

В свете этого, нам представляются естественными следующие обозначения: $(F_A)^* = F_{A^*}$, $(F_A)^c = F_{A^c}$. При этом формулы для сопряженной к оператору композиции C_{F_A}, установленные в вышеупомянутых работах [10, 29], переписываются в виде:

$$(C_{F_A})^* = C_{(F_A)^c} = C_{F_{A^c}}.$$

2. Условия, при которых д.л.о. — д.л.п. $\mathfrak{K}$

Пусть A — ограниченный линейный оператор, действующий в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ и

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

— матричное представление оператора A относительно разложения пространства $\mathcal{H}$:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2. \tag{1.1}$$

Далее будем предполагать, что A_{11} — непрерывно обратимый на $\mathcal{H}_1$ оператор, а $A_{11}^{-1}A_{12}$ — равномерное сжатие, т.е. $\|A_{11}^{-1}A_{12}\| < 1$. Эти условия эквивалентны тому, что д.л.о.

$$F_A(K) = (A_{21} + A_{22}K)(A_{11} + A_{12}K)^{-1} \tag{1.3}$$

определено на шаре $\mathfrak{K}$:

$$\mathfrak{K} = \{K \in L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2) \mid \|K\| \le 1\}.$$

Поскольку

$$\operatorname{dom} F_A = \{K \in L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2) \mid -1 \in \rho(A_{11}^{-1}A_{12}K)\}, \tag{2.1}$$

то, как отмечалось выше, $\operatorname{dom} F_A$ содержит открытый шар $\mathfrak{K}_R^\circ \subset L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ радиуса $R = (\|A_{11}^{-1}A_{12}\|)^{-1} > 1$ с центром в нуле.

Пусть $\Gamma \in \mathfrak{K}^\circ$ — равномерное сжатие, действующее из $\mathcal{H}_1$ в $\mathcal{H}_2$. Определим по нему оператор

$$U(\Gamma) = \begin{pmatrix} (I - \Gamma^*\Gamma)^{-1/2} & (I - \Gamma^*\Gamma)^{-1/2}\Gamma^* \\ \\ \Gamma(I - \Gamma^*\Gamma)^{-1/2} & (I - \Gamma\Gamma^*)^{-1/2} \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

и дробно-линейное преобразование $F_{U(\Gamma)}$. Из матричного представления (2.2) оператора $U(\Gamma)$ следует, что

$$\operatorname{dom} F_{U(\Gamma)} = \{K \in L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2) \mid -1 \in \rho(\Gamma^* K)\}. \tag{2.3}$$

Из (2.1) и (2.3) следует

$$\operatorname{dom} F_A = \operatorname{dom} F_{U(\Gamma)} \quad \text{при} \quad \Gamma = (A_{11}^{-1} A_{12})^*. \tag{2.4}$$

Так как при $\Gamma = (A_{11}^{-1} A_{12})^*$ оператор $C := AU(-\Gamma)$ представлен нижней треугольной матрицей:

$$C = AU(-\Gamma) = \begin{pmatrix} C_{11} & 0 \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}, \tag{2.5}$$

где

$$C_{11} = (A_{11} - A_{12}\Gamma)(I - \Gamma^*\Gamma)^{-1/2}, \tag{2.6}$$

$$C_{21} = (A_{21} - A_{22}\Gamma)(I - \Gamma^*\Gamma)^{-1/2}, \tag{2.7}$$

$$C_{22} = (-A_{21}\Gamma^* + A_{22})(I - \Gamma\Gamma^*)^{-1/2}, \tag{2.8}$$

то порождаемое им дробно-линейное преобразование

$$F_C(K) = (C_{21} + C_{22}K)C_{11}^{-1} \tag{2.9}$$

является аффинным и всюду определенным на $L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$. Из (2.4) и (2.9) с учетом равенства $U(\Gamma)^{-1} = U(-\Gamma)$ получаем, что оператор A допускает факторизацию

$$A = CU(\Gamma) \quad \text{при} \quad \Gamma = (A_{11}^{-1} A_{12})^*, \tag{2.10}$$

а дробно-линейное преобразование F_A допускает факторизацию

$$F_A = F_C \circ F_{U(\Gamma)} \quad \text{с} \quad \Gamma = (A_{11}^{-1} A_{12})^*. \tag{2.11}$$

С другой стороны, оператор A с непрерывно обратимой компонентой A_{11}, при условии $\Gamma := A_{21} A_{11}^{-1}$ — равномерное сжатие, допускает также факторизацию:

$$A = U(\Gamma)B, \tag{2.12}$$

где оператор B представлен верхней треугольной матрицей. Однако, в отличии от (2.11) мы получаем лишь включение:

$$F_A \supset F_{U(\Gamma)} \circ F_B \quad \text{с} \quad \Gamma = A_{21} A_{11}^{-1}, \tag{2.13}$$

причем в общем случае область определения правой части этого включения может быть достаточно узкой. Тем не менее справедлива следующая ключевая для нас теорема.

Теорема 2.1. *В выше приведенных обозначениях следующие условия эквивалентны:*

(i) д.л.о. F_A — д.л.п. *шара* $\mathfrak{K}$*;*

(ii) *оператор* A_{11} *непрерывно обратим на* $\mathcal{H}_1$*, оператор* $\Gamma := A_{11}^{-1}A_{12}$ *— равномерное сжатие и* д.л.о. F_C — д.л.п. *шара* $\mathfrak{K}$*;*

В предположении, что $\operatorname{ran} F_A$ *состоит более, чем из одной точки, можно добавить и еще одно условие, эквивалентное предыдущим:*

(iii) *оператор* A_{11} *непрерывно обратим на* $\mathcal{H}_1$*, оператор* $\Gamma := A_{21}A_{11}^{-1}$ *— равномерное сжатие и* д.л.о. F_B — д.л.п. *шара* $\mathfrak{K}$*;*

Доказательство. Прямо проверяется, что $U(\Gamma)$ (см. (2.2)) — J-унитарный оператор для любого равномерного сжатия Γ, и потому справедливы соотношения (1.12). Тогда из (2.11) имеем, что $\mathfrak{K} \subset \operatorname{dom} F_A$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{K} \subset \operatorname{dom} F_C$, и при этом

$$F_A(\mathfrak{K}) = F_C(F_{U(\Gamma)}(\mathfrak{K})) = F_C(\mathfrak{K}).$$

Следовательно, для включения $F_A(\mathfrak{K}) \subset \mathfrak{K}$ необходимо и достаточно, чтобы имело место включение $F_C(\mathfrak{K}) \subset \mathfrak{K}$. Отсюда, с учетом того, что $\mathfrak{K} \subset \operatorname{dom} F_A$ тогда и только тогда, когда выполнено условие (1.5), немедленно следует эквивалентность требований (i) и (ii).

Эквивалентность же условий (i)–(iii) в предположении, что $\operatorname{ran} F_A$ состоит более, чем из одной точки, прямо следует из приведенного на с. 313 напоминания, что в этом случае F_A — д.л.п. шара $\mathfrak{K}$ тогда и только тогда, когда A — бистрогий плюс-оператор. □

Теорема 3.1 позволяет нам сперва находить условия, при которых д.л.о. F_C является д.л.п. шара $\mathfrak{K}$, а затем, используя формулы (2.6)–(2.8), формулировать требования для общего д.л.о.

Лемма 2.1. *Пусть оператор C имеет нижнее треугольное матричное представление* (2.5)*.*

Тогда:

(i) *если*

$$\|C_{21}\| + \|C_{22}\| \le (\|C_{11}^{-1}\|)^{-1}, \tag{2.14}$$

то д.л.о. F_C *является* д.л.п. *шара* $\mathfrak{K}$*;*

(ii) *если* д.л.о. F_C *является* д.л.п. *шара* $\mathfrak{K}$*, то*

$$\|C_{21}\|^2 + \|C_{22}\|^2 \le \|C_{11}\|^2, \tag{2.15}$$

Доказательство. (i) прямо следует из (2.9), поскольку при $\|K\| \leq 1$ из (2.14) получаем:

$$\|(C_{21} + C_{22}K)C_{11}^{-1}\| \leq (\|C_{21}\| + \|C_{22}\|)\|C_{11}^{-1}\| \leq 1,$$

т.е. имеет место включение (1.5).

(ii) Так как из (1.5) следует, что для каждого $x_1 \in \mathcal{H}_1$ вектор Cx_1 является неотрицательным: $[Cx_1, Cx_1] \geq 0$, или, что эквивалентно, $\|C_{11}x_1\| \geq \|C_{21}x_1\|$, то $\|C_{11}\| \geq \|C_{21}\|$. Поэтому, если $\operatorname{ran} F_C$ состоит из одной точки, а это имеет место только тогда, когда $C_{22} = 0$, то в этом случае неравенство (2.15) доказано. Если же $\operatorname{ran} F_C$ состоит не из одной точки, то, как указывалось на с. 313, оператор C коллинеарен J-бинесжимающему. Поскольку (2.15) не зависит от умножения оператора на положительную постоянную, то без ограничения общности будем считать C сразу J-бинесжимающим. Непосредственно проверяется, что для такого оператора компонента C_{22} — сжатие. Поэтому для каждого вектора $x_1 \in \mathcal{H}_1$, $\|x_1\| = 1$, имеем

$$\|C_{11}\|^2 - \|C_{21}x_1\|^2 \geq \|C_{11}x_1\|^2 - \|C_{21}x_1\|^2 \geq \|x_1\|^2 = 1 \geq \|C_{22}\|^2,$$

что влечет

$$\|C_{11}\|^2 \geq \|C_{21}x_1\|^2 + \|C_{22}\|^2, \qquad x_1 \in \mathcal{H}_1.$$

Переходя в правой части к супремуму по $x_1 \in \mathcal{H}_1$, получим неравенство (2.15). □

Замечание 2.1. Если $\dim \mathcal{H}_1 = \dim \mathcal{H}_2 = 1$, то условие (2.14) принимает вид

$$|c_{21}| + |c_{22}| \leq |c_{11}|, \tag{2.16}$$

где c_{11}, $c_{21}\, c_{22} \in \mathbb{C}$, и является не только достаточным, но и необходимым, для (1.5). В самом деле, пусть $c_{21} = e^{i\varphi}|c_{21}|$ и $c_{22} = e^{i\xi}|c_{22}|$ — полярное представление чисел c_{21} и c_{22}, соответственно. Из представления (2.9) следует, что имеет место (1.5) тогда и только тогда, когда при всех числах k с $|k| \leq 1$ справедливо неравенство $|c_{21}+c_{22}k| \leq |c_{11}|$. В частности, оно выполнено и при $k = e^{i(\varphi-\xi)}$, что и влечет (2.14).

Перейдем к основному результату этого раздела.

Теорема 2.2. *Пусть* д.л.о. F_A *порождено оператором* A*, в матричном представлении* (1.2) *которого оператор* A_{11} *непрерывно обратим на всем* $\mathcal{H}_1$ *и выполнено условие* (1.4)*:*

$$\|A_{11}^{-1}A_{12}\| < 1. \tag{1.4}$$

Тогда

(*i*) *из неравенства:*

$$\begin{aligned}\|(A_{21}A_{11}^* - A_{22}A_{12}^*)(A_{11}A_{11}^* - A_{12}A_{12}^*)^{-1/2}\| \\ + \|(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})(I - A_{12}^*A_{11}^{*\,-1}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1/2}\| \\ \le \|(A_{11}A_{11}^* - A_{12}A_{12}^*)^{-1/2}\|^{-1}\end{aligned} \quad (2.17)$$

следует, что F_A *является* д.л.п. *шара* $\mathfrak{K}$, *т.е. имеет место включение* (1.5)*:*

$$F_A(\mathfrak{K}) \subset \mathfrak{K};$$

(*ii*) *из условия* (1.5)*, следует неравенство:*

$$\begin{aligned}\|(A_{21}A_{11}^* - A_{22}A_{12}^*)(A_{11}A_{11}^* - A_{12}A_{12}^*)^{-1/2}\|^2 \\ + \|(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})(I - A_{12}^*A_{11}^{*\,-1}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1/2}\|^2 \\ \le \|(A_{11}A_{11}^* - A_{12}A_{12}^*)^{1/2}\|^2.\end{aligned} \quad (2.18)$$

Доказательство. Неравенства (2.17) и (2.18) есть ни что иное, как переписанные с учетом (2.6)–(2.8) условия (2.14) и (2.15), соответственно. □

Следствие 2.1. *Пусть в условиях теоремы* 3.2 $\dim H_1 = \dim H_2 = 1$, $A_{ij} = a_{ij} \in \mathbb{C}$, $i, j = 1, 2$. *Тогда* F_A *удовлетворяет условию* (1.5) *тогда и только тогда, когда*

$$|a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}| + |\bar{a}_{11}a_{21} - \bar{a}_{12}a_{22}| \le |a_{11}|^2 - |a_{12}|^2. \quad (2.19)$$

Доказательство. Как отмечалось в замечании 2.1, условие (2.16) является необходимым и достаточным условием для того, чтобы при $\dim H_1 = \dim H_2 = 1$ нижняя треугольная матрица C порождала д.л.п. единичного круга. Следовательно, (2.17) играет ту же роль для произвольной матрицы. Формула (2.19) совпадает с (2.17) с точностью до элементарных преобразований. □

Как указано во введении, критерий (1.16) приведен в [29]. Ниже будут получены также другие условия в гораздо более общем случае (см. теорему 3.3, теорему 3.4, следствие 3.3 и замечание 3.2), из которых будет следовать и этот критерий.

3. J-несжимающие операторы

В этом разделе мы дадим параметрическое описание J-несжимающих операторов специального класса, включающего в себя и J-бинесжимающие операторы. Сперва мы исследуем нижние треугольные матрицы, а затем воспользуемся факторизацией (2.10). Для удобства ссылок и полноты изложения приведем без доказательства соответствующие результаты (лемма 3.1, теорема 3.1) из [3]. При этом мы сохраним и обозначения из [3], где роль $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$ играют $\mathcal{H}^+$ и $\mathcal{H}^-$, соответственно: $\mathcal{H}^+ := \mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}^- := \mathcal{H}_2$.

Лемма 3.1. *Линейный непрерывный оператор T верхнего треугольного вида*

$$T = \begin{pmatrix} T_1 & T_{12} \\ 0 & T_2 \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

задает J-бинесжимающий оператор тогда и только тогда, когда T_1 — обратимый на $\mathcal{H}^+$ оператор, T_1^{-1} и T_2 — сжатия на $\mathcal{H}^+$ и $\mathcal{H}^-$, соответственно, и существует такое сжатие $S_{12} : \mathcal{H}^- \mapsto \mathcal{H}^+$, что

$$T_{12} = (T_1 T_1^* - I)^{1/2} S_{12} (I - T_2^* T_2)^{1/2}. \tag{3.2}$$

Пусть $A : \mathcal{H} \mapsto \mathcal{H}$ — непрерывный всюду заданный оператор, пусть P_A и P_{A^*} — ортопроекторы на замыкание областей значений $\operatorname{ran} A$ и $\operatorname{ran} A^*$ операторов A и A^*, соответственно. Оператор

$$A^{(-1)} := (A|_{P_{A^*}\mathcal{H}})^{-1} P_A$$

называется псевдо-обратным к оператору A.

Отметим, что если B — непрерывный оператор, то

$$\begin{aligned} \overline{B(B^*B - I)^{(-1)}B^*} = \overline{BB^*(BB^* - I)^{(-1)}} \\ = (BB^* - I)^{(-1)}BB^* \\ = P_{BB^*-I} + (BB^* - I)^{(-1)}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Здесь черта над оператором означает его замыкание.

Введем в рассмотрение множество упорядоченных четверок сжатий:

$$\Omega = \{\{\Gamma, S_1, T_2, S_{12}\}\},$$

где $\Gamma : \mathcal{H}^+ \mapsto \mathcal{H}^-$, $\|\Gamma\| < 1$, $S_1 : \mathcal{H}^+ \mapsto \mathcal{H}^+$ — обратимое на $\mathcal{H}^+$ сжатие, $T_2 : \mathcal{H}^- \mapsto \mathcal{H}^-$, $\|T_2\| \le 1$, $S_{12} : \mathcal{H}^- \mapsto \mathcal{H}^+$, $\|S_{12}\| \le 1$. Через Ω_0 обозначим подмножество множества Ω, такое, что $\ker S_{12} \supset \ker(I - T_2^* T_2)$ и $\operatorname{ran} S_{12} \subset \overline{\operatorname{ran}(I - S_1^* S_1)}$.

Теорема 3.1. *Каждому элементу $\omega = \{\Gamma, S_1, T_2, S_{12}\} \in \Omega$ ставится в соответствие J-бинесжимающий оператор V по следующему алгоритму: (a) по оператору Γ строится J-унитарный оператор $U(\Gamma)$* (см. (2.2)), *(b) по операторам $T_1 = S_1^{-1}, T_2, S_{12}$ согласно лемме* 3.1 *определяем J-бинесжимающий оператор T вида* (3.1), *(c) остается положить $V = U(\Gamma)T$.*

Обратно, по каждому J-бинесжимающему оператору V находим элемент $\omega = \{\Gamma, S_1, T_2, S_{12}\} \in \Omega$, где $\Gamma = V_{21}V_{11}^{-1}$, операторы $S_1 = T_1^{-1}$ и T_2 определяются из матричного представления (3.1) *верхнего треугольного оператора $T = U(\Gamma)^{-1}V$, а S_{12} — из* (3.2)*:*

$$S_{12} = \overline{(T_1T_1^* - I)^{(-1/2)}T_{12}(I - T_2^*T_2)^{(-1/2)}}.$$

Соответствие $\omega \longleftrightarrow V$ взаимно однозначно, если $\omega \in \Omega_0$. □

Ниже нам понадобится следующий хорошо известный результат, часто относимый к фольклору, опубликованный рядом авторов в эквивалентном виде (см., [24, 32] и др.), прямо вытекающий, например, из леммы Дугласа [9].

Лемма 3.2. *Пусть $\mathcal{H}$ — гильбертово пространство и $A : \mathcal{H} \mapsto \mathcal{H}$ — непрерывный самосопряженный оператор, заданный относительно разложения* (1.1) *в матричном виде:*

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12}^* & A_{22} \end{pmatrix}.$$

Следующие условия **(i)**–**(iv)** *эквивалентны:*

- **(i)** *Оператор A неотрицателен;*
- **(ii)** *Операторы A_{11} и A_{22} неотрицательны и существует такое сжатие $S_{12} : \mathcal{H}^- \mapsto \mathcal{H}^+$, что $A_{12} = A_{11}^{1/2}S_{12}A_{22}^{1/2}$;*
- **(iii)** *Операторы A_{11} и $A_{22} - \overline{A_{12}^*A_{11}^{(-1)}A_{12}}$ всюду заданы на $\mathcal{H}^+$ и $\mathcal{H}^-$, соответственно, и неотрицательны, и $\operatorname{ran} A_{12} \subset \operatorname{ran} A_{11}^{1/2}$.*
- **(iv)** *Операторы A_{22} и $A_{11} - \overline{A_{12}A_{22}^{(-1)}A_{12}^*}$ всюду заданы на $\mathcal{H}^-$ и $\mathcal{H}^+$, соответственно, неотрицательны, и $\operatorname{ran} A_{12}^* \subset \operatorname{ran} A_{22}^{1/2}$.*

Доказательство. Доказательство эквивалентности условий **(i)** и **(ii)** можно найти, например, в [4, лемма II.3.21], а эквивалентности **(ii)** и **(iii)** — в [3]. Условие **(iv)** является симметричной перефразировкой условия **(iii)**.

□

Аналог леммы 3.3 не имеет места для верхних треугольных матриц без дополнительных условий.

Лемма 3.3. *Нижний треугольный оператор* T :

$$T = \begin{pmatrix} T_1 & 0 \\ T_{21} & T_2 \end{pmatrix}. \tag{3.4}$$

задает J*-несжимающий оператор тогда и только тогда, когда* T_1 — *обратимый на* $\operatorname{ran} T_1 \subset \mathcal{H}^+$ *оператор,* T_1^{-1} *и* T_2 — *сжатия на* $\operatorname{ran} T_1$ *и* $\mathcal{H}^-$*, соответственно, и существует такое сжатие* $S_{21} : \mathcal{H}^+ \mapsto \mathcal{H}^-$*, что*

$$T_{21} = (I - T_2 T_2^*)^{1/2} S_{21} (T_1^* T_1 - I)^{1/2}. \tag{3.5}$$

Доказательство. По определению T — J-несжимающий оператор, если

$$T^* J T - J = \begin{pmatrix} T_1^* T_1 - T_{21}^* T_{21} - I & -T_{21}^* T_2 \\ \\ -T_2^* T_{21} & I - T_2^* T_2 \end{pmatrix} \geq 0. \tag{3.6}$$

Проверим, что неотрицательность оператора (3.6) эквивалентна неотрицательности оператора

$$\widetilde{T} = \begin{pmatrix} T_1^* T_1 - I & T_{21}^* \\ \\ T_{21} & I - T_2 T_2^* \end{pmatrix}. \tag{3.7}$$

В самом деле, операторы $I - T_2^* T_2$ и $I - T_2 T_2^*$ неотрицательны одновременно, поскольку T_2 и T_2^* — сжатия одновременно. Итак,

$$I - T_2^* T_2 \geq 0 \Longleftrightarrow I - T_2 T_2^* \geq 0. \tag{3.8}$$

Из непрерывности оператора T_2 следует, что

$$\operatorname{ran} T_{21} \subset \operatorname{ran} (I - T_2 T_2^*)^{1/2} \Longleftrightarrow \operatorname{ran} T_2^* T_{21} \subset \operatorname{ran} (I - T_2^* T_2)^{1/2}. \tag{3.9}$$

В самом деле, пусть $\operatorname{ran} T_{21} \subset \operatorname{ran}(I - T_2 T_2^*)^{1/2}$, т.е. для каждого вектора $T_{21} x$ найдется y такой, что $(I - T_2 T_2^*)^{1/2} y = T_{21} x$, а потому из непрерывности оператора T_2 имеем:

$$T_2^* (I - T_2 T_2^*)^{1/2} y = (I - T_2^* T_2)^{1/2} T_2^* y = T_2^* T_{21} x,$$

т.е. $\operatorname{ran} T_2^* T_{21} \subset \operatorname{ran}(I - T_2^* T_2)^{1/2}$.

Обратно, пусть $\operatorname{ran} T_2^* T_{21} \subset \operatorname{ran}(I - T_2^* T_2)^{1/2}$, т.е. для каждого вектора $T_2^* T_{21} u$ найдется такой v, что $(I - T_2^* T_2)^{1/2} v = T_2^* T_{21} u$. Как и выше, из непрерывности оператора T_2 следует

$$T_2 (I - T_2^* T_2)^{1/2} v = (I - T_2 T_2^*)^{1/2} T_2 v = T_2 T_2^* T_{21} u.$$

Поскольку $T_2T_2^*T_{21}u = -(I-T_2T_2^*)^{1/2}((I-T_2T_2^*)^{1/2}T_{21}u)+T_{21}u$, то

$$(I-T_2T_2^*)^{1/2}(T_2v+(I-T_2T_2^*)^{1/2}T_{21}u)=T_{21}u,$$

а потому $\operatorname{ran} T_{21}\subset \operatorname{ran}(I-T_2T_2^*)^{1/2}$.

Из (3.3) с $B=T_2$ и (3.9) заключаем, что

$$\begin{aligned} T_1^*T_1 - T_{21}^*T_{21} - I - \overline{T_{21}^*T_2(I-T_2^*T_2)^{(-1)}T_2^*T_{21}} \\ = T_1^*T_1 - I - \overline{T_{21}^*(I-T_2T_2^*)^{(-1)}T_{21}}. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Соотношения (3.8), (3.3) и (3.10) с учетом леммы 3.2 доказывают, что операторы (3.6) и (3.7) неотрицательны одновременно. Для завершения доказательства леммы достаточно применить к оператору (3.7) лемму 3.2. □

Введем в рассмотрение множество упорядоченных четверок операторов:

$$\Omega' = \{\{\Gamma, T_1, T_2, S_{21}\}\},$$

где $\Gamma:\mathcal{H}^+\mapsto\mathcal{H}^-$, $\|\Gamma\|<1$, $T_1:\mathcal{H}^+\mapsto\mathcal{H}^+$ — растяжение на $\mathcal{H}^+$, т.е. $\|T_1x\|\geq\|x\|$ при всех $x\in\mathcal{H}^+$, $T_2:\mathcal{H}^-\mapsto\mathcal{H}^-$, $\|T_2\|\leq 1$, $S_{21}:\mathcal{H}^+\mapsto\mathcal{H}^-$, $\|S_{21}\|\leq 1$. Через Ω_0' обозначим подмножество множества Ω', такое, что $\ker S_{21}\supset\ker(T_1^*T_1-I)$ и $\operatorname{ran} S_{21}\subset\overline{\operatorname{ran}(I-T_2T_2^*)}$.

Основным результатом этого раздела является следующая теорема, доказательство которой, по существу, уже проведено выше.

Теорема 3.2. *Каждому элементу $\omega=\{\Gamma,T_1,T_2,S_{21}\}\in\Omega'$ ставится в соответствие J-несжимающий оператор*

$$V=\begin{pmatrix} V_{11} & V_{12}\\ V_{21} & V_{22}\end{pmatrix} \tag{3.11}$$

с $\operatorname{ran} V_{12}\subset\operatorname{ran} V_{11}$ по следующему алгоритму: (a) по оператору Γ строится J-унитарный оператор $U(\Gamma)$ (см. (2.2)), (b) по операторам T_1,T_2,S_{21} согласно лемме 3.3 определяем нижний треугольный J-несжимающий оператор T вида (3.4), (c) остается положить $V=TU(\Gamma)$; обратно, по каждому J-несжимающему оператору V с $\operatorname{ran} V_{12}\subset\operatorname{ran} V_{11}$ находим элемент $\omega=\{\Gamma,T_1,T_2,S_{21}\}\in\Omega'$, где $\Gamma=(V_{11}^{-1}V_{12})^*$, операторы T_1 и T_2 определяются из матричного представления (3.4) нижнего треугольного оператора $T=VU(\Gamma)^{-1}$, а S_{21} — из (3.5):

$$S_{21}=\overline{(I-T_2T_2^*)^{(-1/2)}T_{21}(T_1^*T_1-I)^{(-1/2)}}.$$

При этом оператор V является J-бинесжимающим тогда и только тогда, когда $\operatorname{ran} T_1 = \mathcal{H}^+$.

Соответствие $\omega \longleftrightarrow V$ взаимно однозначно, если $\omega \in \Omega_0'$.

Замечание 3.1. Лемма 3.1 и лемма 3.3, а с ними теорема 3.1 и теорема 3.3, соответственно, могут быть сформулированы и доказаны для операторов, действующих из одного пространства Крейна в другое. Мы предоставляем читателю проделать эту несложную операцию самостоятельно, почти полностью повторив аргументацию доказательства соответствующих утверждений. □

Пусть оператор A представлен нижней треугольной матрицей вида (3.4). Из (1.7) и (1.8) следует, что необходимым условием того, что A — строгий плюс-оператор, т.е. коллинеарный J-несжимающему, является неравенство

$$\|A_2\|^2 \le \|(A_1^*A_1 - A_{21}^*A_{21})^{-1}\|^{-1}. \tag{3.12}$$

Хотя это условие является чуть менее удобно для проверки нежели (2.15), однако в качестве константы $\mu(A)$ коллинеарности оператора A J-несжимающему оператору $T = \mu(A)^{-1/2}A$ рекомендуется тестировать три постоянные: $\|A_2\|^2$, $\|A_1^{-1}\|^{-2}$ и $\|(A_1^*A_1 - A_{21}^*A_{21})^{-1}\|^{-1}$. Если окажется, что выполнено одно из следующих равенств:

$$\|A_2\|^2 = \|A_1^{-1}\|^{-2}$$

либо

$$\|A_2\|^2 = \|(A_1^*A_1 - A_{21}^*A_{21})^{-1}\|^{-1},$$

то $\mu(A) = \|A_2\|^2$ — единственно возможная константа коллинеарности оператора A J-несжимающему оператору и потому остается проверить будет ли оператор $T = A/\|A_2\|$ J-несжимающим, т.е. будет ли

$$A_1^*A_1 - \|A_2\|^2 - A_{21}^*(\|A_2\|^2 - A_2)^{(-1)}A_{21} \ge 0?$$

По той же схеме, как было показано, что операторы (3.6) и (3.7) неотрицательны одновременно, показывается, что нижний треугольный оператор

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ A_{21} & A_2 \end{pmatrix}$$

является строгим плюс-оператором тогда и только тогда, когда существует такая постоянная $\mu > 0$, что неотрицателен оператор A_μ:

$$A_\mu = \begin{pmatrix} A_1^*A_1 - \mu I & \sqrt{\mu}A_{21}^* \\ \\ \sqrt{\mu}A_{21} & \mu I - A_2A_2^* \end{pmatrix}. \tag{3.13}$$

Рассмотрим случаи, когда либо A_1 коллинеарен изометрическому оператору, либо A_2 коллинеарен коизометрическому оператору. Первый случай выполнен для всех операторов, когда $\dim \mathcal{H}^+ = 1$, второй — когда $\dim \mathcal{H}^- = 1$.

Теорема 3.3. *Пусть A — нижний треугольный оператор, A_1 коллинеарен изометрическому оператору V, т.е. $A_1 = \|A_1\| V$. Тогда для того, чтобы A был строгим плюс-оператором, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\|A_1\| \geq \sup_{\|x\|=1} \{\|A_{21}^* x\| + \|A_2^* x\|\}. \tag{3.14}$$

Доказательство. Если $A_{21} = 0$, то условие (3.14) принимает вид $\|A_1\| \geq \|A_2\|$ и потому при $\mu \in [\|A_2\|, \|A_1\|]$ оператор A_μ (см. (3.13)) неотрицателен, а это эквивалентно тому, что A — бистрогий плюс-оператор.

Пусть теперь $A_{21} \neq 0$. Предположим сперва, что A — бистрогий плюс-оператор, что, как отмечалось, эквивалентно неотрицательности оператора A_μ. Согласно лемме 3.2 оператор A_μ неотрицателен тогда и только тогда, когда найдется такое $\mu \in [\|A_2\|, \|A_1\|)$, что

$$\mu - A_2 A_2^* - \mu A_{21} (\|A_1\|^2 - \mu)^{-1} A_{21}^* \geq 0,$$

или, что эквивалентно,

$$\mu^2 - \mu(\|A_1\|^2 + A_2 A_2^* - A_{21} A_{21}^*) + \|A_1\|^2 A_2 A_2^* \leq 0. \tag{3.15}$$

Отсюда следует, что при каждом $x \in \mathcal{H}^-$ уравнение

$$\begin{aligned} \lambda^2 (x,x) - \lambda(\|A_1\|^2 (x,x) + (A_2^* x, A_2^* x) - (A_{21}^* x, A_{21}^* x)) \\ + \|A\|^2 (A_2^* x, A_2^* x) = 0 \end{aligned} \tag{3.16}$$

имеет только вещественные решения, т.е. дискриминант этого уравнения

$$\begin{aligned} \mathbf{D} = (\|A_1\|^2 (x,x) + (A_2^* x, A_2^* x) - (A_{21}^* x, A_{21}^* x))^2 \\ - 4\|A\|^2 (A_2^* x, A_2^* x)(x,x) \geq 0, \end{aligned}$$

что эквивалентно неравенству

$$\|A_1\|^2 (x,x) + (A_2^* x, A_2^* x) - (A_{21}^* x, A_{21}^* x) \geq 2\|A_1\| \|A_2^* x\|,$$

которое переписывается как

$$\|A_1\| \|x\| - \|A_2^* x\| \geq \|A_{21}^* x\|.$$

Последнее неравенство влечет справедливость (3.14).

Обратно, пусть выполнено условие (3.14). Тогда, обратив приведенные выше рассуждения, получим, что уравнение (3.16) имеет только вещественные корни $p_\pm(x)$ при каждом $x \in \mathcal{H}^-$:

$$p_\pm(x) = \frac{(\|A_1\|^2(x,x) + (A_2^*x, A_2^*x) - (A_{21}^*x, A_{21}^*x)) \pm \sqrt{\mathbf{D}}}{2(x,x)}. \qquad (3.17)$$

Как известно [28, Глава IV], $p_-(x) \le p_+(y)$ при всех $x, y \in \mathcal{H}^-$ и множества $\Delta_\pm := \{p_\pm(x) \mid x \in \mathcal{H}^-\}$ связны, $\overline{\Delta_-} \cap \overline{\Delta_+}$ состоит не более, чем из одной точки. Следовательно, существует такое $\mu > 0$, что $p_-(x) \le \mu \le p_+(y)$ при всех $x, y \in \mathcal{H}^-$. Поэтому для таких μ справедливо неравенство (3.15). Остается показать, что

$$\|A_2\|^2 \le \mu \le \|A_1\|^2. \qquad (3.18)$$

Прямым счетом проверяется, что

$$p_-(x) \ge \frac{(A_2^*x, A_2^*x)}{(x,x)}, \qquad p_+(x) \le \|A_1\|^2,$$

откуда и следует (3.18). $\square$

Следствие 3.1. *Пусть A — нижний треугольный оператор с непрерывно обратимым (на своей области значений) оператором A_1. Требование*

$$\|A_1^{-1}\|^{-1} \ge \|A_{21}\| + \|A_2\| \qquad (3.19)$$

является достаточным для того, чтобы A был строгим плюс-оператором.

Доказательство. В самом деле, пусть $A_1^* = W|A_1^*|$ — полярное разложение оператора A_1^*. Тогда $A_1 = |A_1^*|V$, где $V = W^*$ — изометрический оператор. Поскольку $\| \, |A_1^*|Vx_+\| \ge \|A^{-1}\|^{-1}\|Vx_+\|$, $x \in \mathcal{H}^+$, то

$$[Ax, Ax] \ge [\widetilde{A}x, \widetilde{A}x], \qquad x \in \mathcal{H},$$

где

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} \|A^{-1}\|^{-1}V & 0 \\ A_{21} & A_2 \end{pmatrix}.$$

Из (3.19) и (3.14) следует, что $\widetilde{A}$ — строгий плюс-оператор, а потому и A — строгий плюс-оператор. $\square$

Ниже приводим без доказательства теорему 3.4, поскольку она проверяется по той же схеме, что и теорема 3.3 с тем отличием, что за основу надо взять из леммы 3.2 условие

$$A_1^*A_1 - \mu - \mu A_{21}^*(\mu - \|A_2\|^2)^{-1}A_{21} \geq 0.$$

Теорема 3.4. *Пусть A — нижний треугольный оператор, A_2 коллинеарен коизометрическому оператору W, т.е. $A_2 = \|A_2\|W$. Тогда для того, чтобы A был строгим плюс-оператором, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\|A_2\| \leq \inf_{\|x\|=1}\{\|A_1x\| - \|A_{21}x\|\}. \tag{3.20}$$

Следствие 3.2. *Условие* (3.20) *является достаточным для того, чтобы произвольный нижний треугольный оператор был строгим плюс-оператором.*

Доказательство. В самом деле, в силу теоремы 3.4 условие (3.20) достаточно (и необходимо), чтобы строгим плюс-оператором был оператор

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ A_{21} & \|A_2\|\, I \end{pmatrix}.$$

Следовательно, найдется такое $\mu > 0$, что

$$\widetilde{A}_\mu = \begin{pmatrix} A_1^*A_1 - \mu I & \sqrt{\mu}A_{21}^* \\ \\ \sqrt{\mu}A_{21} & \mu I - \|A_2\|^2 \end{pmatrix} \geq 0.$$

Поскольку для оператора A_μ из (3.13) имеем

$$A_\mu \geq \widetilde{A}_\mu \geq 0,$$

то A — строгий плюс-оператор. □

Из (3.14) и (3.20) следует следующее обобщение ситуации, знакомой нам по случаю $\dim\mathcal{H}^+ = \dim\mathcal{H}^- = 1$ (см. (2.16)).

Следствие 3.3. *Если одновременно A_1 коллинеарен изометрическому оператору и A_2 — коизометрическому, то нижний треугольный оператор A является строгим плюс-оператором тогда и только тогда, когда*

$$\|A_2\| + \|A_{21}\| \leq \|A_1\|. \tag{3.21}$$

□

Замечание 3.2. Произвольный оператор A допускает факторизацию вида (2.10), если $\operatorname{ran} A_{12} \subset \operatorname{ran} A_1$, A_1 — непрерывно обратим на своей области значений и $\|A_1^{-1}A_{12}\| < 1$. Мы предоставляем читателю переписать, как это было сделано в теореме 3.2, условия, полученные для нижних треугольных матриц на случай произвольных операторов.

Замечание 3.3. Формула (3.13) позволяет построить другую, нежели приведенная выше, параметризацию нижних треугольных строгих плюс-операторов, а именно: каждому нижнему треугольному строгому плюс-оператору соответствует набор $\{\mu, A_1, \Gamma, S\}$, состоящий из положительного числа μ, непрерывно обратимого на своей области значений оператора A_1 с $\|A_1^{-1}\|^{-1} \geq \mu$, равномерного сжатия Γ : $\mathcal{H}^+ \to \mathcal{H}^-$, являющегося расширением оператора $A_{21}A_1^{-1}$ на все $\mathcal{H}^+$ и сжатия $S : \mathcal{H}^- \to \mathcal{H}^-$, являющегося расширением оператора

$$\frac{1}{\sqrt{\mu}}(I - A_{21}(A_1^*A_1 - \mu)^{(-1)}A_{21}^*)^{(-1)}A_2$$

на все пространство $\mathcal{H}^-$; обратно, по упомянутой четверке строим оператор $A_{21} = \Gamma A_1$ и оператор

$$A_2 = \sqrt{\mu}(I - A_{21}(A_1^*A_1 - \mu)^{(-1)}A_{21}^*)S. \tag{3.22}$$

Для того, чтобы описать в классе всех операторов T с $\operatorname{ran} T_{12} \subset \operatorname{ran} T_1$ множество строгих плюс-операторов, надо добавить еще один параметр, а именно, равномерное сжатие $\widetilde{\Gamma} = (T_1^{-1}T_{12})^* : \mathcal{H}^+ \to \mathcal{H}^-$, участвующий в построении J-унитарного оператора $U(\widetilde{\Gamma})$, позволяющего провести факторизацию $T = AU(\widetilde{\Gamma})$, где A — нижний треугольный оператор.

Литература

[1] D. Alpay and V. Khatskevich, *Linear fractional transformations: basic properties, applications to spaces of analytic functions and Schroeder's equation* // Int. J. Appl. Math., **2** (2000), N 4, 459–476.

[2] Т. Я. Азизов, *О расширениях инвариантных дуальных пар* // Укр. матем. ж., **41** (1989), N 7, 958–961.

[3] Т. Я. Азизов, *Параметрическое представление операторов* // Учёные записки Таврического Национального Университета им. В. И. Вернадского. Серия: Математика. Механика. Информатика и Кибернетика. Издательство Таврического Национального Университета им. В. И. Вернадского, (2006), 19 (2), 3–11.

[4] Т. Я. Азизов, И. С. Иохвидов, *Основы теории операторов в пространствах с индефинитной метрикой.* М.: Наука, 1986.

[5] Т. Я. Азизов, В. К. Кириакиди, *Выпуклость и слабая замкнутость образа операторных шаров при дробно-линейном преобразовании* // Математические заметки, **67** (2000), N 2, 302–303.

[6] C. C. Cowen, *Linear fractional composition operators on H^2* // Integral Equations Operator Theory, (1988), N 11, 151–160.

[7] C. C. Cowen and B. D. MacCluer, *Linear fractional maps of the ball and their composition operators* // Acta Sci. Math. (Szeged), **66** (2000), N 1–2, 351–376.

[8] C. C. Cowen and B. D. MacCluer, *Schroeder's equation in several variables* // Taiwanese J. Math., **7** (2003), N 1, 129–154.

[9] R. G. Douglas, *On majorization, factorization, and range inclusion of operators on Hilbert space* // Proc. Amer. Math. Soc. **17** (1966), 413-–415.

[10] E. A. Gallardo-Gutiérrez, A. Montes-Rodríguez, *Adjonts of linear fractional composition operators on the Dirichlet space* // Math. Ann, (2003), N 327, 117–134.

[11] V. Khatskevich, I. I. Karelin, L. Zelenko, *Operator pencils of the second order and linear fractional relations* // Ukrainskii matem. visnyk, **3** (2006), N 4, 467–503.

[12] V. Khatskevich, S. Reich, and D. Shoikhet, *One-parameter semigroups of fractional-linear transformations* in: Operator theory, system theory and related topics, (Beer-Sheva/Rehovot, 1997), 401–411, Oper. Theory Adv. Appl., **123**, Birkhäuser, Basel, 2001.

[13] V. Khatskevich, S. Reich, and D. Shoikhet, *Schröder's functional equation and the Koenigs embedding property* // Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, **47** (2001), 3977–3988.

[14] V. Khatskevich, S. Reich, and D. Shoikhet, *Abel-Schröder equations for linear fractional mappings and the Koenigs embedding problem* // Acta Sci. Math. (Szeged), **69** (2003), 67–98.

[15] V. Khatskevich and V. Senderov, *Basic properties of linear fractional mappings of operator balls: Schröeder's equation* in: Operator theory and its applications (Winnipeg, MB, 1998), 331–344, Fields Inst. Commun., **25**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000.

[16] В. Хацкевич, В. Сендеров, *Уравнение Абеля-Шредера для дробно-линейных преобразований операторного шара* // ДАН России, **379** (2001), N 4, 455–458.

[17] V. Khatskevich and V. Senderov, *Abel–Schröder type equations for maps of operator balls* // Functional Differential Equations, **10** (2003), 239–258.

[18] V. Khatskevich, V. Senderov, and V. Shulman, *On operator matrices generating linear fractional maps of operator balls* // Israel Conference Proceedings, Contemporary Math., **364** (2004), 93–102.

[19] V. Khatskevich and V. Senderov, *Fractional-Linear Transformation of Operator Balls, Applications to Dynamical Systems* // Acta Math. Sinica, English Series, **22** (2006), 1687–1694.

[20] V. Khatskevich and L. Zelenko, *Bistrict plus-operators in Krein spaces and dichotomous behavior of irreversible dynamical systems* in: Operator theory and related topics, Vol. **II** (Odessa, 1997), 191–203, Oper. Theory Adv. Appl., **118**, Birkhäuser, Basel, 2000.

[21] V. Khatskevich and L. Zelenko, *Plus-operators in Krein spaces and dichotomous behavior of irreversible dynamical systems with a discrete time* // Studia Mathematica, to appear

[22] М. Г. Крейн, *Об одном применении принципа неподвижной точки в теории операторов пространств с индефинитной метрикой* // УМН, **5** (1950), N 2, 180–190.

[23] М. Г. Крейн, *Об одном новом применении принципа неподвижной точки в теории операторов в пространстве с индефинитной метрикой* // ДАН СССР, **154** (1964), N 5, 1023–1026.

[24] М. Г. Крейн, И. Е. Овчаренко, *О Q-функциях и sc-резольвентах неплотно заданного эрмитова сжатия* // Сибирский матем. журнал **18** (1977), N 5, 1032–1056.

[25] М. Г. Крейн, Ю. Л. Шмульян, *Плюс-операторы в пространстве с индефинитной метрикой* // Матем. исследования (Кишинев), **1** (1966), N 1, 131–161.

[26] М. Г. Крейн, Ю. Л. Шмульян, *J-полярное представление плюс-операторов* // Матем. исследования (Кишинев), **1** (1966), N 1, 172–210.

[27] М. Г. Крейн, Ю. Л. Шмульян, *О дробно-линейных преобразованиях с операторными коэффициентами* // Матем. исследования (Кишинев), **2** (1967), N 1, 64–96.

[28] A. S. Markus, *Introduction to the spectral theory of polynomial operator pencils.* Transl. of Mathem. Monographs, Vol. 71, AMS, 1988.

[29] M. J. Martin, *Composition operators with linear fractional symbols and their adjoints.* First advanced course in operator theory and complex analysis, University of Seville, June, 2004.

[30] R. Phillips, *The extension of dual subspaces invariant under an algebra* in: Proc. Internat. Sympos. Linear Spaces (Jerusalem, 1960), Jerusalem Academic Press, Jerusalem; Pergamon, Oxford, 1961, pp. 366–398.

[31] E. Vesentini, *Semigroups of linear contractions for an indefinite metric* // Mem. Mat. Accad. Lincei, **2** (1994), 53–83.

[32] Ю. Л. Шмульян, *Операторный интеграл Хеллингера* // Матем. сб., **49** (1959), 381–430.

Сведения об авторах

Томас Яковлевич Азизов

Воронежский государственный университет
Университетская площадь, 1
Воронеж, 394693
Россия
E-Mail: azizov@math.vsu.ru

Виктор А. Хацкевич

Department of Mathematics
ORT Braude Academic College
College Campus, P.O.Box 78
Karmiel 21982
Israel
E-Mail: victor_kh@hotmail.com