Український математичний вісник
Том 4 **(2007)**, № 2, 235 – 264

Рациональные аппроксимации и сильная матричная проблема моментов

Кирилл К. Симонов

(Представлена М. М. Маламудом)

Аннотация. *Проблема моментов Гамбургера* — это задача, в которой по заданной последовательности моментов $\{S_k\}$ требуется найти меру $d\Sigma$, удовлетворяющую тождествам $S_k = \int_{-\infty}^{+\infty} t^k \, d\Sigma(t)$. Если индексы k принимают не только положительные, но и отрицательные значения, то проблема моментов называется *сильной.* С сильной проблемой моментов тесно связаны *двухточечные аппроксимации Паде* — рациональные аппроксимации, приближающие одновременно два заданных ряда в точках $\lambda = \infty$ и $\lambda = 0$, соответственно.

В этой работе рассматривается *сильная усеченная матричная проблема моментов Гамбургера*, что означает: индексы k меняются в диапазоне $-2\mu_- \leq k \leq 2\mu_+$, а моменты S_k являются самосопряженными матрицами. Мы находим условия разрешимости и единственности решения этой задачи и даем описание всех решений в терминах самосопряженных расширений некоторого модельного симметрического оператора. Кроме того, мы строим последовательность двухточечных диагональных аппроксимаций Паде, соответствующих сильной проблеме моментов, и исследуем сходимость этой последовательности. Наконец, мы факторизуем резольвентную матрицу сильной усеченной проблемы моментов.

2000 MSC. 44A60, 47A57, 42C05, 41A21.

Ключевые слова и фразы. Сильная матричная проблема моментов, двухточечные аппроксимации Паде.

1. Введение

В этой работе мы рассматриваем так называемую *сильную матричную проблему моментов Гамбургера.* Пусть задана последовательность самосопряженных $N \times N$-матриц $\{S_k\}_{-\infty}^{+\infty}$ и некоторый набор целых чисел $K \subset \mathbb{Z}$. Требуется найти самосопряженные матри-

Статья поступила в редакцию 22.02.2007

чные меры $d\Sigma$ на $\mathbb{R}$ такие, что выполнены условия:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^k \, d\Sigma(t) = S_k \qquad (k \in K). \tag{1.1}$$

При $K = \{0, 1, 2, \ldots\}$ ($K = \{0, 1, \ldots, 2\mu_+\}$), эта задача является классической полной (усеченной) проблемой моментов. Выбирая различные наборы индексов K, мы будем получать следующие классы задач:

1. Усеченная сильная проблема моментов (общий случай) $\mathrm{SHMP}(\{S_k\}_{-\infty}^{+\infty}, \mu_-, \mu_+)$:
$$K = \{-2\mu_-, -2\mu_- + 1, \ldots, 2\mu_+\} \qquad (\mu_- \geq 1,\ \mu_+ \geq 0).$$
2. Усеченная сильная проблема моментов (четный случай) $\mathrm{SHMP}(\{S_k\}_{-\infty}^{+\infty}, 2\mu)$:
$$K = \{-2\mu, -2\mu + 1, \ldots, 2\mu\} \qquad (\mu \geq 0).$$
3. Усеченная сильная проблема моментов (нечетный случай) $\mathrm{SHMP}(\{S_k\}_{-\infty}^{+\infty}, 2\mu + 1)$:
$$K = \{-2\mu - 2, -2\mu - 1, \ldots, 2\mu\} \qquad (\mu \geq 0).$$
4. Полная сильная проблема моментов $\mathrm{SHMP}(\{S_k\}_{-\infty}^{+\infty}, \infty)$: $K = \mathbb{Z}$.

Сильная матричная проблема моментов может быть представлена, как интерполяционная задача в классе Неванлинны–Пика $\mathcal{N}_{\mathbb{C}^N}$ $N \times N$-матриц-функций $\phi(\lambda)$, голоморфных в $\mathbb{C}_+ \cup \mathbb{C}_-$ и удовлетворяющих условию

$$\Im\phi(\lambda)\Im\lambda \geq 0 \qquad (\lambda \in \mathbb{C}_+ \cup \mathbb{C}_-).$$

А именно, согласно теореме Гамбургера–Неванлинны для сильной проблемы моментов (см. теорему 2.2), задача $\mathrm{SHMP}(\{S_k\}_{-\infty}^{+\infty}, \mu_-, \mu_+)$ эквивалентна следующей проблеме: найти функции $\phi \in \mathcal{N}_{\mathbb{C}^N}$, удовлетворяющие условиям:

$$\begin{gathered}\phi(\lambda) = S_{-1} + S_{-2}\lambda + \cdots + S_{-2\mu_-}\lambda^{2\mu_- - 1} + o(\lambda^{2\mu_- - 1}) \quad \text{при} \quad \lambda \widehat{\rightarrow} 0, \\ \phi(\lambda) = -\frac{S_0}{\lambda} - \frac{S_1}{\lambda^2} - \cdots - \frac{S_{2\mu_+}}{\lambda^{2\mu_+ + 1}} + o\left(\frac{1}{\lambda^{2\mu_+ + 1}}\right) \quad \text{при} \quad \lambda \widehat{\rightarrow} \infty.\end{gathered} \tag{1.2}$$

Здесь и далее $\lim_{\lambda \widehat{\to} a} f(\lambda) = A$ обозначает некасательный предел: для любого $\epsilon > 0$, $f(\lambda) \to A$ при $\lambda \to a$ и $\epsilon < \arg \lambda < \pi - \epsilon$. Полная сильная проблема моментов $\mathrm{SHMP}(\{S_k\}_{-\infty}^{+\infty}, \infty)$ эквивалентна такой задаче: найти функции $\phi \in \mathcal{N}_{\mathbb{C}_N}$, удовлетворяющие условиям (1.2) при любых $\mu_- \geq 1, \mu_+ \geq 0$.

Всякая функция $\phi \in \mathcal{N}_{\mathbb{C}^N}$, удовлетворяющая условию $\phi(\lambda) = O(\lambda^{-1})$ при $\lambda \widehat{\to} \infty$, однозначно представляется в виде

$$\phi(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\Sigma(t)}{t - \lambda} \qquad (\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}), \tag{1.3}$$

где $d\Sigma$ — некоторая конечная самосопряженная $N \times N$-матричная мера. Согласно теореме 2.2, функция $\phi(\lambda)$ вида (1.3) удовлетворяет (1.2) тогда и только тогда, когда $d\Sigma$ является решением задачи $\mathrm{SHMP}(\{S_k\}_{-\infty}^{+\infty}, \mu_-, \mu_+)$. $\phi(\lambda)$ удовлетворяет условиям (1.2) при любых $\mu_- \geq 1, \mu_+ \geq 0$ тогда и только тогда, когда $d\Sigma$ является решением полной проблемы моментов $\mathrm{SHMP}(\{S_k\}_{-\infty}^{+\infty}, \infty)$.

Другим предметом исследования этой работы являются двухточечные рациональные аппроксимации.

Обозначим через $L_-(\lambda)$ и $L_+(\lambda)$ формальные степенные ряды:

$$L_-(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} S_{-k} \lambda^{k-1}, \qquad L_+(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} -S_k \lambda^{-k-1}. \tag{1.4}$$

Пусть $A(\lambda)$ и $B(\lambda)$ — $N \times N$-матричные полиномы формальной степени m и

$$F(\lambda) = A(\lambda^{-1}) B(\lambda^{-1})^{-1}.$$

Функция $F(\lambda)$ называется *двухточечной $N \times N$-матричной m-ой диагональной аппроксимацией Паде типа* (m_-, m_+), *соответствующей паре* $(L_-(\lambda), L_+(\lambda))$, если выполнены условия:

(i) Матрицы $B(0)$ и $\lambda^m B(\lambda^{-1})|_{\lambda=0}$ невырождены.

(ii) Функция $F(\lambda)$ имеет асимптотические разложения:

$$F(\lambda) = L_-(\lambda) + o(\lambda^{m_- - 1}) \quad \text{при} \quad \lambda \to 0,$$
$$F(\lambda) = L_+(\lambda) + o(\lambda^{-m_+ - 1}) \quad \text{при} \quad \lambda \to \infty$$

для $m_- \geq 1$, $m_+ \geq 0$, таких, что $2m = m_- + m_+ + 1$.

Классическая матричная проблема моментов рассматривалась многими авторами, включая М. Г. Крейна [20], В. П. Потапова и И. В. Ковалишину [19], H. Dym [10], В. М. Адамяна и И. М. Ткаченко [1]. Однако сильная проблема моментов, до появления работ [25, 26], рассматривалась лишь в скалярном случае (см. [6, 11–18, 23]). Условия разрешимости полной сильной скалярной проблемы моментов, как указал нам Ю. М. Березанский, можно получить, как частный случай теоремы 5.1 из его книги [6, стр. 722]. Решения полной сильной скалярной проблемы моментов Гамбургера были описаны O. Njåstad в [23]. Заметим, что в работе [23] описание дано при дополнительном условии регулярности проблемы моментов (см. определение 4.2). Описание решений сильной скалярной проблемы моментов на полуоси $[0, \infty)$ было получено И. С. Кацем и А. А. Нудельманом в [18].

Двухточечные рациональные аппроксимации и соответствующие им непрерывные дроби рассматривались в работах W. B. Jones и W. J. Thron (см. [4, 8, 14]). Диагональные аппроксимации Паде типа $(m,\, m-1)$ были описаны в [14] при условии, что проблема моментов регулярна.

Сильная матричная проблема моментов $\mathrm{SHMP}(\{S_k\}_{-\infty}^{+\infty}, m)$ рассматривалась в [25] и [26] для случаев $m = 2\mu$ и $m = \infty$, соответственно. В этих работах были получены критерии разрешимости и единственности решения, а также дано описание всех решений.

Приведем содержание и основные результаты этой работы.

В разделе 2 получены необходимые и достаточные условия разрешимости проблемы моментов $\mathrm{SHMP}(\{S_k\}_{-\infty}^{+\infty}, \mu_-, \mu_+)$ (см. предложение 2.1 и следствие 2.1). В случае выполнения этих условий, мы строим модельное гильбертово пространство $\mathfrak{H}_{(\mu_-,\mu_+)}$ и модельный симметрический оператор $A_{(\mu_-,\mu_+)}$. Тогда существует взаимно-однозначное соответствие между множеством всех решений проблемы моментов $\mathrm{SHMP}(\{S_k\}_{-\infty}^{+\infty}, \mu_-, \mu_+)$ и некоторым классом самосопряженных расширений оператора $A_{(\mu_-,\mu_+)}$ (см. теорему 2.3).

В разделе 3 построены двухточечные диагональные аппроксимации Паде, соответствующие задаче $\mathrm{SHMP}(\{S_k\}_{-\infty}^{+\infty}, \mu_-, \mu_+)$ (см. теорему 3.1), и исследована их сходимость (см. теорему 3.2).

В разделе 4 мы переходим к рассмотрению задачи $\mathrm{SHMP}(\{S_k\}_{-\infty}^{+\infty}, m)$. Здесь мы находим аппроксимации Паде типов $(2\mu,\, 2\mu+1)$ и $(2\mu+2,\, 2\mu+1)$, выраженные в явном виде через ортогональные полиномы Лорана первого и второго рода.

В разделе 5 факторизуется резольвентная матрица задачи $\mathrm{SHMP}(\{S_k\}_{-\infty}^{+\infty}, m)$.

2. Операторная модель

Напомним основные свойства *линейных отношений* (см. [5]).

Линейным отношением в гильбертовом пространстве H называется линейное многообразие в $H \oplus H$. Поскольку каждый линейный оператор S в H можно отождествить с его графиком

$$\{\{f, Sf\} \in H \oplus H : \ f \in \operatorname{dom} S\},$$

то каждый линейный оператор можно считать линейным отношением.

Для произвольных линейных отношений $\widetilde{S}, \widetilde{T}$ в пространстве H и $\lambda \in \mathbb{C}$ положим:

$$\operatorname{dom} \widetilde{S} = \{f : \ \{f, g\} \in \widetilde{S}\}, \qquad \operatorname{ran} \widetilde{S} = \{g : \ \{f, g\} \in \widetilde{S}\},$$
$$\ker \widetilde{S} = \{f : \ \{f, 0\} \in \widetilde{S}\}, \qquad \operatorname{mul} \widetilde{S} = \{g : \ \{0, g\} \in \widetilde{S}\},$$

$$\begin{aligned}
&\widetilde{S}^{-1} = \{\{g, f\} \in H \oplus H : \ \{f, g\} \in \widetilde{S}\},\\
&\widetilde{S}^{*} = \{\{f', g'\} \in H \oplus H : \ (g, f') = (f, g') \text{ for all } \{f, g\} \in \widetilde{S}\},\\
&\lambda\widetilde{S} = \{\{f, \lambda g\} \in H \oplus H : \ \{f, g\} \in \widetilde{S}\},\\
&\widetilde{S} + \widetilde{T} = \{\{f, g + g'\} \in H \oplus H : \ \{f, g\} \in \widetilde{S}, \ \{f, g'\} \in \widetilde{T}\},\\
&\widetilde{S}\widetilde{T} = \{\{f, h\} \in H \oplus H : \ \{f, g\} \in \widetilde{T}, \ \{g, h\} \in \widetilde{S}\}.
\end{aligned}$$

Резольвентное множество $\rho(\widetilde{S})$ линейного отношения $\widetilde{S}$ в H определяется по формуле

$$\rho(\widetilde{S}) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \ \ker(\widetilde{S} - \lambda) = 0, \ \operatorname{ran}(\widetilde{S} - \lambda) = \mathfrak{H}\}.$$

Линейное отношение называется *замкнутым*, если оно в самом деле является замкнутым подпространством в $H \oplus H$. Линейное отношение $\widetilde{S}$ в H называется *симметрическим* (*диссипативным*), если $(f', f) \in \mathbb{R}$ ($\Im(f', f) \geq 0$) для любой пары $\{f, f'\} \in \widetilde{S}$. Симметрическое (диссипативное) отношение $\widetilde{S}$ называется *самосопряженным* (*максимально диссипативным*), если $\mathbb{C}_+ \cup \mathbb{C}_- \subset \rho(\widetilde{S})$ ($\mathbb{C}_- \subset \rho(\widetilde{S})$).

Любое максимально диссипативное отношение $\widetilde{S}$ в H однозначно представляется в виде

$$\widetilde{S} = S \oplus \widehat{\operatorname{mul}}\, \widetilde{S},$$

где

$$S = \{\{f, f'\} \in \widetilde{S} : \ f' \perp \operatorname{mul} \widetilde{S}\}, \quad \widehat{\operatorname{mul}}\, \widetilde{S} = \{\{0, f'\} \in \widetilde{S}\}.$$

Линейный оператор S называется *операторной частью* $\widetilde{S}$, а линейное отношение $\widehat{\mathrm{mul}}\,\widetilde{S}$ — *многозначной частью* $\widetilde{S}$.

Пусть S — симметрический линейный оператор в H, $\widetilde{S}$ — его самосопряженное расширение в $\widetilde{H} \supset H$, L — подпространство в H. Заметим, что мы не требуем, чтобы расширение $\widetilde{S}$ являлось оператором. Тогда $\widetilde{S}$ называется L-минимальным расширением S, если

$$\widetilde{H} = \operatorname{clos}\operatorname{span}\{L,\ (\widetilde{S}-\lambda)^{-1}L:\ \lambda \in \rho(\widetilde{S})\}.$$

Определение 2.1 (см. [21]). *Говорят, что голоморфная функция* $\tau:\ \mathbb{C}_+ \cup \mathbb{C}_- \to H \oplus H$ *принадлежит классу Неванлинны–Пика* $\widetilde{\mathcal{N}}_H$*, если при каждом* $\lambda \in \mathbb{C}_+$ $\tau(\lambda)$ *является максимально диссипативным линейным отношением в* H *и для всех* $\lambda \in \mathbb{C}_+ \cup \mathbb{C}_-$ *выполнено тождество*

$$\tau(\lambda) = \tau(\overline{\lambda})^*.$$

Говорят, что $\tau \in \widetilde{\mathcal{N}}_H$ *принадлежит классу* $\mathcal{N}_H$*, если* $\tau(\lambda)$ *— максимально диссипативный линейный* оператор *при всех* $\lambda \in \mathbb{C}_+$.

Перейдем теперь к рассмотрению сильной проблемы моментов. Прежде всего, покажем, что проблему моментов SHMP($\{S_k\}_{-\infty}^{+\infty}, \mu_-$, μ_+) можно представить как некоторую интерполяционную задачу в классе $\mathcal{N}_{\mathbb{C}^N}$. Напомним классический результат Гамбургера и Неванлинны.

Теорема 2.1 (см. [2]). *Пусть* $d\Sigma$ *—* $N\times N$*-матричная неотрицательная мера на* $\mathbb{R}$*, удовлетворяющая равенствам*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^k\, d\Sigma(t) = S_k \qquad (k = 0, 1, \ldots, 2\mu_+). \tag{2.1}$$

Тогда функция

$$F(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\Sigma(t)}{t-\lambda} \tag{2.2}$$

имеет асимптотическое разложение

$$F(\lambda) = -\frac{S_0}{\lambda} - \frac{S_1}{\lambda^2} - \cdots - \frac{S_{2\mu_+}}{\lambda^{2\mu_+ + 1}} + o\left(\frac{1}{\lambda^{2\mu_+ + 1}}\right) \quad \text{при} \quad \lambda \widehat{\to} \infty. \tag{2.3}$$

Обратно, всякая функция $F(\lambda)$ *класса* $\mathcal{N}_{\mathbb{C}^N}$*, имеющая асимптотическое разложение* (2.3)*, представляется в виде* (2.2)*, где мера* $d\Sigma$ *удовлетворяет равенствам* (2.1).

Для сильной проблемы моментов, аналогичное утверждение может быть сформулировано следующим образом.

Теорема 2.2. *Если* $d\Sigma$ — *решение сильной проблемы моментов* $\mathrm{SHMP}(\{S_k\}_{-\infty}^{+\infty}, \mu_-, \mu_+)$, *то соответствующая функция* $F(\lambda)$ *вида* (2.2) *имеет асимптотические разложения*

$$\begin{gathered} F(\lambda) = S_{-1} + S_{-2}\lambda + \dots + S_{-2\mu_-}\lambda^{2\mu_- -1} + o(\lambda^{2\mu_- -1}) \quad \textit{при} \quad \lambda \widehat{\to} 0, \\ F(\lambda) = -\frac{S_0}{\lambda} - \frac{S_1}{\lambda^2} - \dots - \frac{S_{2\mu_+}}{\lambda^{2\mu_+ +1}} + o\left(\frac{1}{\lambda^{2\mu_+ +1}}\right) \quad \textit{при} \quad \lambda \widehat{\to} \infty. \end{gathered} \tag{2.4}$$

Обратно, если функция $F(\lambda)$ *класса* $\mathcal{N}_{\mathbb{C}^N}$ *имеет асимптотические разложения* (2.4), *то она представима в виде* (2.2), *где* $d\Sigma$ — *некоторое решение проблемы моментов* $\mathrm{SHMP}(\{S_k\}_{-\infty}^{+\infty}, \mu_-, \mu_+)$.

Доказательство. Прежде чем перейти непосредственно к доказательству, сделаем одно предварительное замечание. Для всякой конечной и непрерывной в точке $t = 0$ меры $d\Sigma$ определим ассоциированную меру $d\widetilde{\Sigma}$ по формуле

$$\widetilde{\Sigma}(t) = \begin{cases} -\Sigma(t^{-1}) + \Sigma(-\infty) & (t < 0), \\ 0 & (t = 0), \\ -\Sigma(t^{-1}) + \Sigma(+\infty) & (t > 0). \end{cases}$$

Тогда функции

$$F(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\Sigma(t)}{t-\lambda} \quad \text{и} \quad \widetilde{F}(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\widetilde{\Sigma}(t)}{t-\lambda}$$

будут связаны тождеством

$$\widetilde{F}(\lambda) = -\frac{S_0}{\lambda} - \frac{1}{\lambda^2} F(\lambda^{-1}) \qquad (\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}),$$

где

$$S_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} d\Sigma(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\widetilde{\Sigma}(t).$$

Поэтому разложения (2.4) справедливы тогда и только тогда, когда

$$\begin{gathered} \widetilde{F}(\lambda) = -\frac{S_0}{\lambda} - \frac{S_{-1}}{\lambda^2} - \dots - \frac{S_{-2\mu_-}}{\lambda^{2\mu_- +1}} + o\left(\frac{1}{\lambda^{2\mu_- +1}}\right) \quad \text{при} \quad \lambda \widehat{\to} \infty, \\ F(\lambda) = -\frac{S_0}{\lambda} - \frac{S_1}{\lambda^2} - \dots - \frac{S_{2\mu_+}}{\lambda^{2\mu_+ +1}} + o\left(\frac{1}{\lambda^{2\mu_+ +1}}\right) \quad \text{при} \quad \lambda \widehat{\to} \infty. \end{gathered} \tag{2.5}$$

Пусть теперь $d\Sigma$ — решение SHMP($\{S_k\}_{-\infty}^{+\infty}, \mu_-, \mu_+$). Тогда верны равенства

$$\begin{aligned} S_{-k} &= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} t^k \, d\widetilde{\Sigma}(t) \qquad (k = 0, 1, \ldots, 2\mu_-), \\ S_k &= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} t^k \, d\Sigma(t) \qquad (k = 0, 1, \ldots, 2\mu_+), \end{aligned} \tag{2.6}$$

и из теоремы 2.1 следует справедливость разложений (2.5), а значит и (2.4).

Обратно, если имеют место асимптотические разложения (2.4), то функция $F(\lambda)$ представима в виде (2.2) с некоторой конечной мерой $d\Sigma$, непрерывной в точке $t = 0$, и верны разложения (2.5). Применяя дважды теорему 2.1, получаем равенства (2.6). Отсюда следует, что $d\Sigma$ — решение проблемы моментов SHMP($\{S_k\}_{-\infty}^{+\infty}, \mu_-, \mu_+$). $\square$

Теперь определим необходимые условия разрешимости проблемы моментов SHMP($\{S_k\}_{-\infty}^{+\infty}, \mu_-, \mu_+$).

Предложение 2.1. *Если проблема моментов* SHMP($\{S_k\}_{-\infty}^{+\infty}, \mu_-, \mu_+$) *разрешима, то следующие условия выполнены при любых* $\{\xi_k\}_{-\mu_-}^{\mu_+} \subset \mathbb{C}^N$*:*

$$\sum_{i,j=-\mu_-}^{\mu_+} \xi_j^* S_{i+j} \xi_i \geq 0 \tag{2.7}$$

и

$$\sum_{i,j=-\mu_-}^{\mu_+-1} \xi_j^* S_{i+j} \xi_i = 0 \text{ тогда и только тогда, когда } \sum_{i,j=-\mu_-}^{\mu_+-1} \xi_j^* S_{i+j+2} \xi_i = 0. \tag{2.8}$$

Доказательство. Пусть $d\Sigma$ — решение проблемы моментов SHMP($\{S_k\}_{-\infty}^{+\infty}, \mu_-, \mu_+$). Тогда

$$\sum_{i,j=-\mu_-}^{\mu_+} \xi_j^* S_{i+j} \xi_i = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Bigg(\sum_{j=-\mu_-}^{\mu_+} \xi_j t^j \Bigg)^* d\Sigma(t) \Bigg(\sum_{i=-\mu_-}^{\mu_+} \xi_i t^i \Bigg) \geq 0$$

при любых $\{\xi_k\}_{-\mu_-}^{\mu_+} \subset \mathbb{C}^N$. Таким образом, выполнено (2.7).

Поскольку выполнены неравенства

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} t^k \, d\Sigma(t) = S_k < \infty \qquad (k = -1, -2, \ldots, -\mu_-),$$

то точка $t=0$ не принадлежит дискретному спектру $d\Sigma$. Поэтому условие

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\Big(\sum_{j=-\mu_-}^{\mu_+-1}\xi_j t^j\Big)^* d\Sigma(t)\Big(\sum_{i=-\mu_-}^{\mu_+-1}\xi_i t^i\Big)=0$$

выполнено тогда и только тогда, когда

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\Big(\sum_{j=-\mu_-}^{\mu_+-1}\xi_j t^{j+1}\Big)^* d\Sigma(t)\Big(\sum_{i=-\mu_-}^{\mu_+-1}\xi_i t^{i+1}\Big)=0,$$

что доказывает (2.8). □

Далее в этом разделе мы всюду подразумеваем, что выполнены условия (2.7) *и* (2.8).

В дальнейшем мы покажем, что (2.7) и (2.8) являются также и достаточными условиями разрешимости $\mathrm{SHMP}(\{S_k\}_{-\infty}^{+\infty},\mu_-,\mu_+)$.

Рассмотрим пространство N-векторных полиномов Лорана

$$\widehat{\mathfrak{H}}_{(\mu_-,\mu_+)}=\mathrm{span}\{\xi t^k:\ \xi\in\mathbb{C}^N,k\in\{-\mu_-,-\mu_-+1,\dots,\mu_+\}\}.$$

В этом пространстве введем внутреннее произведение

$$(\phi z^i,\ \psi z^j)=\psi^* S_{i+j}\phi \qquad (\phi,\psi\in\mathbb{C}^N,\ -\mu_-\le i,j\le\mu_+). \tag{2.9}$$

Изотропную часть этого произведения обозначим через

$$\mathring{\mathfrak{H}}_{(\mu_-,\mu_+)}=\{f\in\widehat{\mathfrak{H}}_{(\mu_-,\mu_+)}:\ (f,f)=0\}.$$

Согласно (2.7), внутреннее произведение (2.9) неотрицательно. Поэтому фактор-пространство

$$\mathfrak{H}_{(\mu_-,\mu_+)}=\widehat{\mathfrak{H}}_{(\mu_-,\mu_+)}/\mathring{\mathfrak{H}}_{(\mu_-,\mu_+)}$$

является гильбертовым пространством. Обозначим через $\hat\phi z^k$ класс эквивалентности $(\phi z^k+\mathring{\mathfrak{H}}_{(\mu_-,\mu_+)})\in\mathfrak{H}_{(\mu_-,\mu_+)}$. Из условия (2.8) следует, что

$$z(\hat\phi z^k)=\hat\phi z^{k+1},\quad z^{-1}(\hat\phi z^{k+1})=\hat\phi z^k\quad (k=-\mu_-,-\mu_-+1,\dots,\mu_+-1).$$

Поэтому оператор умножения

$$A_{(\mu_-,\mu_+)}(\hat\phi z^k)=\hat\phi z^{k+1},$$
$$\mathrm{dom}\,A_{(\mu_-,\mu_+)}=\mathrm{span}\{\hat\phi z^k:\ \phi\in\mathbb{C}^N,\ k=-\mu_-,-\mu_-+1,\dots,\mu_+-1\}$$

корректно определен и $\ker A_{(\mu_-,\mu_+)} = 0$.

Заметим, что область определения оператора $A_{(\mu_-,\mu_+)}$, в общем случае, неплотна в $\mathfrak{H}_{(\mu_-,\mu_+)}$. Следовательно, в общем случае, $A^*_{(\mu_-,\mu_+)}$ является линейным отношением.

Выделим некоторые специальные пространства и операторы среди пространств $\mathfrak{H}_{(\mu_-,\mu_+)}$ и операторов $A_{(\mu_-,\mu_+)}$:

$$\mathfrak{H}_{2\mu} = \mathfrak{H}_{(\mu,\mu)}, \quad A_{2\mu} = A_{(\mu,\mu)},$$
$$\mathfrak{H}_{2\mu+1} = \mathfrak{H}_{(\mu+1,\mu)}, \quad A_{2\mu+1} = A_{(\mu+1,\mu)},$$
$$\mathfrak{L} = \{\hat{\phi} = \hat{\phi} z^0 : \ \phi \in \mathbb{C}^N\}.$$

Если условия (2.7) выполнены при всех $\mu_- \geq 1$, $\mu_+ \geq 0$, то можно определить гильбертово пространство $\mathfrak{H}$ и оператор A по формулам

$$\mathfrak{H} = \operatorname{clos\,span}\{\hat{\phi} z^k : \ \phi \in \mathbb{C}^N, k \in \mathbb{Z}\},$$
$$A = \operatorname{clos\,span}\{(\hat{\phi} z^k, \hat{\phi} z^{k+1}) \in \mathfrak{H} \oplus \mathfrak{H} : \ k \in \mathbb{Z}\}.$$

Существует прямая связь между самосопряженными расширениями оператора $A_{(\mu_-,\mu_+)}$ и решениями проблемы моментов $\mathrm{SHMP}(\{S_k\}_{-\infty}^{+\infty}, \mu_-, \mu_+)$.

Теорема 2.3. *Пусть $\widetilde{A}$ — $\mathfrak{L}$-минимальное самосопряженное расширение оператора $A_{(\mu_-,\mu_+)}$ в некотором пространстве $\widetilde{\mathfrak{H}} \supset \mathfrak{H}_{(\mu_-,\mu_+)}$, и пусть $dE_t = dE_t(\widetilde{A})$ — разложение единицы $\widetilde{A}$. Тогда $N \times N$-матричная мера $d\Sigma(t)$, определенная по формуле*

$$\psi^* \Sigma(t) \phi = (E_t(\widetilde{A})\hat{\phi}, \hat{\psi}) \qquad (\phi, \psi \in \mathbb{C}^N), \tag{2.10}$$

является решением проблемы моментов $\mathrm{SHMP}(\{S_k\}_{-\infty}^{+\infty}, \mu_-, \mu_+)$ *тогда и только тогда, когда* $\ker \widetilde{A} = \operatorname{mul} \widetilde{A} = 0$.

Более того, если

$$I_k = \int_{-\infty}^{+\infty} t^k \, \Sigma(t) \qquad (-2\mu_- \leq k \leq 2\mu_+),$$

то выполнены следующие условия:

(*i*) $I_k = S_k$ *при* $-2\mu_- < k < 2\mu_+$, $I_{-2\mu_-} \leq S_{-2\mu_-}$ *и* $I_{2\mu_+} \leq S_{2\mu_+}$*;*

(*ii*) $I_{-2\mu_-} = S_{-2\mu_-}$ *тогда и только тогда, когда* $\ker \widetilde{A} = 0$*;*

(*iii*) $I_{2\mu_+} = S_{2\mu_+}$ *тогда и только тогда, когда* $\operatorname{mul} \widetilde{A} = 0$.

Обратно, для всякого решения $d\Sigma(t)$ *проблемы моментов* $\mathrm{SHMP}(\{S_k\}_{-\infty}^{+\infty}, \mu_-, \mu_+)$ *найдется* $\mathfrak{L}$*-минимальное самосопряженное расширение* $\widetilde{A}$ *оператора* $A_{(\mu_-,\mu_+)}$ *такое, что выполнено равенство* (2.10).

Замечание 2.1. Теорема 2.3 была доказана в [26] для задачи $\mathrm{SHMP}(\{S_k\}_{-\infty}^{+\infty}, 2\mu)$.

Доказательство. Докажем прямое утверждение теоремы. Мы ограничимся доказательством того, что выполнены соотношения

$$I_0 = S_0,\ I_1 = S_1,\ \dots,\ I_{2\mu_+-1} = S_{2\mu_+-1},\ I_{2\mu_+} \le S_{2\mu_+}$$

и $I_{2\mu_+} = S_{2\mu_+}$, только если $\operatorname{mul}\widetilde{A} = 0$. Тем самым мы покажем справедливость условий (i) при $k \ge 0$ и условия (iii). Доказательство условий (i) при $k < 0$ и условия (ii) мы опускаем.

Прежде всего заметим, что существует следующее ограничение на многозначную часть $\widetilde{A}$:

$$\begin{aligned}\operatorname{mul}\widetilde{A} \subset \operatorname{mul} A^*_{(\mu_-,\mu_+)} &\oplus (\widetilde{\mathfrak{H}} \ominus \mathfrak{H}_{(\mu_-,\mu_+)}) \\ &= (\mathfrak{H} \ominus \operatorname{dom} A_{(\mu_-,\mu_+)}) \oplus (\widetilde{\mathfrak{H}} \ominus \mathfrak{H}_{(\mu_-,\mu_+)}).\end{aligned}$$

Поскольку расширение $\widetilde{A}$ является $\mathfrak{L}$-минимальным, то $\operatorname{mul}\widetilde{A} = 0$ тогда и только тогда, когда $\operatorname{mul}\widetilde{A} \perp (\mathfrak{H}_{(\mu_-,\mu_+)} \ominus \operatorname{dom} A_{(\mu_-,\mu_+)})$.

Отношение $\widetilde{A}$ однозначно представляется в виде

$$\widetilde{A} = A' \oplus \widehat{\operatorname{mul}}\,\widetilde{A},$$

где A' — операторная часть $\widetilde{A}$. В частности, $A'f \perp \operatorname{mul}\widetilde{A}$ для любого $f \in \operatorname{dom} A'$.

Ортогональный проектор на многозначную часть $\widetilde{A}$ обозначим через $P_{\mathcal{M}} = P_{\operatorname{mul}\widetilde{A}}$. Покажем по индукции, что выполнены следующие равенства:

$$(A')^k\hat{\phi} = A^k_{(\mu_-,\mu_+)}\hat{\phi} = z^k\hat{\phi} \qquad (\phi \in \mathbb{C}^N,\ k = 0, 1, \dots, \mu_+ - 1). \quad (2.11)$$

В самом деле, предположим, что это условие выполнено для всех $k \le \kappa < \mu_+ - 1$. Тогда

$$(A')^{\kappa+1}\hat{\phi} = A'A^{\kappa}_{(\mu_-,\mu_+)}\hat{\phi} = A^{\kappa+1}_{(\mu_-,\mu_+)}\hat{\phi} - P_{\mathcal{M}}A^{\kappa+1}_{(\mu_-,\mu_+)}\hat{\phi} = A^{\kappa+1}_{(\mu_-,\mu_+)}\hat{\phi},$$

поскольку $A^{\kappa+1}_{(\mu_-,\mu_+)}\hat{\phi} = z^{\kappa+1}\hat{\phi} \in \operatorname{dom} A_{(\mu_-,\mu_+)} \perp \operatorname{mul}\widetilde{A}$ для $0 < \kappa + 1 < \mu_+$. Тем самым мы показали, что $I_k = S_k$ при $k = 0, 1, \dots, 2\mu_+ - 1$.

Вектор $(A')^{\mu_+}\hat\phi$ представляется в виде

$$(A')^{\mu_+}\hat\phi = A'A^{\mu_+-1}_{(\mu_-,\mu_+)}\hat\phi = (1-P_{\mathcal M})A^{\mu_+}_{(\mu_-,\mu_+)}\hat\phi.$$

Покажем, что выполнено условие (iii). Действительно,

$$\begin{aligned}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} t^{2\mu_+}\,d(E_t\hat\phi,\hat\psi) &= ((A')^{\mu_+}\hat\phi,(A')^{\mu_+}\hat\psi)\\ &= (A^{\mu_+}_{(\mu_-,\mu_+)}\hat\phi - P_{\mathcal M}A^{\mu_+}_{(\mu_-,\mu_+)}\hat\phi, A^{\mu_+}_{(\mu_-,\mu_+)}\hat\psi - P_{\mathcal M}A^{\mu_+}_{(\mu_-,\mu_+)}\hat\psi)\\ &= (A^{\mu_+}_{(\mu_-,\mu_+)}\hat\phi, A^{\mu_+}_{(\mu_-,\mu_+)}\hat\psi) - (P_{\mathcal M}A^{\mu_+}_{(\mu_-,\mu_+)}\hat\phi, P_{\mathcal M}A^{\mu_+}_{(\mu_-,\mu_+)}\hat\psi)\\ &= \psi^* S_{2\mu_+}\phi - \psi^* X\phi,\end{aligned}$$

где X — некоторая самосопряженная матрица, определенная тождеством

$$\psi^* X\phi = (P_{\mathcal M}A^{\mu_+}_{(\mu_-,\mu_+)}\hat\phi, P_{\mathcal M}A^{\mu_+}_{(\mu_-,\mu_+)}\hat\psi) \qquad (\phi,\psi\in\mathbb C^N).$$

Теперь ясно, что $0\le X\le S_{2\mu_+}$ и $X=0$ тогда и только тогда, когда

$$A^{\mu_+}_{(\mu_-,\mu_+)}\mathfrak L = \{\hat\phi z^{\mu_+}:\ \phi\in\mathbb C^N\} \perp \operatorname{mul}\widetilde A.$$

$X=0$ тогда и только тогда, когда $\operatorname{mul}\widetilde A = 0$, поскольку $\mathfrak H_{(\mu_-,\mu_+)} = \operatorname{dom}A_{(\mu_-,\mu_+)} + A^{\mu_+}_{(\mu_-,\mu_+)}\mathfrak L$ и $\operatorname{dom}A_{(\mu_-,\mu_+)} \perp \operatorname{mul}\widetilde A$. Это завершает доказательство прямого утверждения теоремы.

Покажем, что справедливо обратное утверждение. Пусть $d\Sigma(t)$ — решение проблемы моментов $\mathrm{SHMP}(\{S_k\}_{-\infty}^{+\infty},\mu_-,\mu_+)$. Определим линейный ограниченный самосопряженный оператор $e(t)$ в пространстве $\mathfrak L$ по формуле

$$(e(t)\hat\phi,\hat\psi) = \psi^*\Sigma(t)\phi.$$

Тогда $e(t)$ удовлетворяет условиям

$$e(-\infty)=0_{\mathfrak L},\quad e(+\infty)=I_{\mathfrak L},\quad e(t-0)=e(t) \qquad (t\in\mathbb R).$$

Согласно теореме Наймарка о дилатации (см. [3, 7]) существует гильбертово пространство $\widetilde{\mathfrak H}\supset\mathfrak L$ и разложение единицы $E_t:\widetilde{\mathfrak H}\to\widetilde{\mathfrak H}$ такие, что

$$e(t) = P_{\mathfrak L}E_t|_{\mathfrak L},\quad \operatorname{clos\,span}\{E_t\hat\phi:\hat\phi\in\mathfrak L\} = \widetilde{\mathfrak H}.$$

Разложение единицы E_t определяет соответствующий самосопряженный оператор

$$\widetilde A = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} t\,dE_t$$

в пространстве $\widetilde{\mathfrak{H}}$. По построению $\widetilde{A}$ является $\mathfrak{L}$-минимальным. Покажем, что существует изометрическое вложение $V : \mathfrak{H}_{(\mu_-,\mu_+)} \to \widetilde{\mathfrak{H}}$ такое, что $VA_{(\mu_-,\mu_+)}V^{-1} \subset \widetilde{A}$. В самом деле,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^{2k}\, d(E_t\hat{\phi},\hat{\phi}) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^{2k}\, d(e(t)\hat{\phi},\hat{\phi}) = \phi^* S_{2k}\phi < \infty \qquad (-\mu_- \le k \le \mu_+)$$

и, следовательно, $\mathfrak{L} \subset \operatorname{dom} \widetilde{A}^k$ для всех $-\mu_- \le k \le \mu_+$. Положим

$$V(z^k\hat{\phi}) = V(A^k_{(\mu_-,\mu_+)}\hat{\phi}) = \widetilde{A}^k\hat{\phi} \qquad (\hat{\phi} \in \mathfrak{L},\ -\mu_- \le k \le \mu_+).$$

Заметим, что V отображает $\mathfrak{L}$ на себя. Отображение V изометрично, поскольку

$$\begin{aligned}(V(z^i\hat{\phi}), V(z^j\hat{\psi}))_{\widetilde{\mathfrak{H}}} &= (\widetilde{A}^i\hat{\phi}, \widetilde{A}^j\hat{\psi})_{\widetilde{\mathfrak{H}}} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} t^{i+j}\, d(E_t\hat{\phi},\hat{\psi}) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^{i+j}\, \psi^* d\Sigma(t)\phi \\ &= \psi^* S_{i+j}\phi = (z^i\hat{\phi}, z^j\hat{\psi}) \qquad (\phi,\psi \in \mathbb{C}^N,\ -\mu_- \le i,j \le \mu_+),\end{aligned}$$

и включение $VA_{(\mu_-,\mu_+)}V^{-1} \subset \widetilde{A}$ выполнено по построению.

Очевидно, что $\operatorname{mul} \widetilde{A} = 0$, поскольку $\widetilde{A}$ является оператором. Из условия (ii) следует, что $\ker \widetilde{A} = 0$. □

Следствие 2.1. *Проблема моментов* $\mathrm{SHMP}(\{S_k\}_{-\infty}^{+\infty}, \mu_-, \mu_+)$ *разрешима тогда и только тогда, когда выполнены условия* (2.7) *и* (2.8).

Следствие 2.2. *Проблема моментов* $\mathrm{SHMP}(\{S_k\}_{-\infty}^{+\infty}, \mu_-, \mu_+)$ *имеет единственное решение тогда и только тогда, когда оператор* $A_{(\mu_-,\mu_+)}$ *является самосопряженным.*

3. Двухточечные аппроксимации Паде

Прежде чем перейти к рассмотрению двухточечных аппроксимаций Паде, формальное определение которых было дано в разделе 1, нам необходимо наложить дополнительные условия невырожденности на последовательность моментов $\{S_k\}_{-\infty}^{+\infty}$.

Определение 3.1. *Последовательность самосопряженных $N \times N$-матриц $\{S_k\}_{-\infty}^{+\infty}$ называется* строго положительной*, если квадратичные формы вида*

$$\sum_{i,j=-m}^{m} \xi_j^* S_{i+j}\xi_i \qquad (\{\xi_k\}_{-m}^{m} \subset \mathbb{C}^N)$$

положительно определены и невырождены при всех $m>0$.

Строго положительная последовательность $\{S_k\}_{-\infty}^{+\infty}$ *называется* нормализованной, *если* $S_0=I$.

Всякую строго положительную последовательность $\{\widetilde{S}_k\}_{-\infty}^{+\infty}$ можно нормализовать по формуле

$$S_k=\widetilde{S}_0^{-\frac{1}{2}}\widetilde{S}_k\widetilde{S}_0^{-\frac{1}{2}}\qquad (k\in\mathbb{Z}).$$

В этом разделе мы будем считать, что заданная последовательность моментов $\{S_k\}_{-\infty}^{+\infty}$ строго положительна.

С каждой усеченной сильной проблемой моментов $\mathrm{SHMP}(\{S_k\}_{-\infty}^{+\infty},\mu_-,\mu_+)$ свяжем ассоциированную *классическую матричную усеченную проблему моментов Гамбургера* $\mathrm{CHMP}(\{S_k\}_{-\infty}^{+\infty},\mu_-,\mu_+)$, которую мы приведем в следующей формулировке. Найти самосопряженные матричные меры $d\Sigma^{(C)}$ на $\mathbb{R}$ такие, что выполнены условия:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} t^{k+2\mu_-}\,d\Sigma^{(C)}(t)=S_k\qquad (k=-2\mu_-,-2\mu_-+1,\dots,2\mu_+). \tag{3.1}$$

Эта задача хорошо изучена (см. [1,10,19,20]). Скалярный случай усеченной проблемы моментов детально разобран в [22] (см. также [9]).

Напомним некоторые хорошо известные факты.

Ортогональные матричные полиномы $P_m^{(C)}(z)$ первого рода, соответствующие задаче $\mathrm{CHMP}(\{S_k\}_{-\infty}^{+\infty},\mu_-,\mu_+)$, определяются по формуле:

$$P_m^{(C)}(z)=Z_m(z)H_m^{-1}\Omega_m D_m,$$

где

$$Z_m(z)=\begin{pmatrix} I & zI & \cdots & z^mI\end{pmatrix},\qquad H_m=\left(S_{-2\mu_-+i+j}\right)_{i,j=0}^m,$$
$$\Omega_m=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & I\end{pmatrix}^*,\qquad D_m=\left(H_m^{-1}\right)_{m,m}^{-\frac{1}{2}}.$$

Заметим, что матрица $P_m^{(C)}(0)$ невырождена тогда и только тогда, когда квадратичная форма

$$\sum_{i,j=0}^{m-1}\xi_j^* S_{i+j-2\mu_-+1}\xi_i\qquad (\{\xi_k\}_0^{m-1}\subset\mathbb{C}^N)$$

невырождена.

Ортогональные матричные полиномы $Q_m^{(C)}(z)$ второго рода определяются по формуле

$$Q_m^{(C)}(z) = \mathfrak{S}\left(\frac{P_m^{(C)}(z) - P_m^{(C)}(\zeta)}{z-\zeta}\right),$$

где $\mathfrak{S}$ — линейный оператор со значениями в $\mathbb{C}^{N\times N}$, действующий на пространстве $N\times N$-матричных полиномов от ζ и определенный равенствами

$$\mathfrak{S}(\zeta^k) = S_{-2\mu_-+k} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Существует взаимно-однозначное соответствие между решениями $d\Sigma^{(C)}$ проблемы моментов СНМР$(\{S_k\}_{-\infty}^{+\infty}, \mu_-, \mu_-)$ и множеством всех функций $\tau \in \mathcal{N}_{\mathbb{C}^N}$, удовлетворяющих условию

$$\lim_{y\to\infty} \frac{\tau(iy)}{y} = 0. \tag{3.2}$$

Это соответствие выражается формулой

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\Sigma^{(C)}(t)}{t-\lambda} = -(Q_{\mu-1}^{(C)}(\lambda)\tau(\lambda) + Q_\mu^{(C)}(\lambda))(P_{\mu-1}^{(C)}(\lambda)\tau(\lambda) + P_\mu^{(C)}(\lambda))^{-1},$$

где

$$\mu = \mu_- + \mu_+ + 1.$$

Замечание 3.1. В рамках операторного подхода к проблеме моментов, условие (3.2) совпадает с условием M-допустимости функции $\tau(\lambda)$ и получено в [9].

Функция

$$F_{(\mu_-,\mu_+)}^{(C)}(\lambda) = -Q_\mu(\lambda)P_\mu(\lambda)^{-1}$$

является μ-ой аппроксимацией Паде формального ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty} -S_{-2\mu_-+k}\lambda^{-k-1}.$$

Это значит, что $F_{(\mu_-,\mu_+)}^{(C)}(\lambda)$ представляется в виде

$$F_{(\mu_-,\mu_+)}^{(C)}(\lambda) = A_{(\mu_-,\mu_+)}^{(C)}(\lambda^{-1})B_{(\mu_-,\mu_+)}^{(C)}(\lambda^{-1})^{-1},$$

где $A^{(C)}_{(\mu_-,\mu_+)}(\lambda)$ и $B^{(C)}_{(\mu_-,\mu_+)}(\lambda)$ — $N\times N$-матричные полиномы формальной степени μ, $B^{(C)}_{(\mu_-,\mu_+)}(0)$ — невырожденная матрица и

$$F^{(C)}_{(\mu_-,\mu_+)}(\lambda) = \sum_{k=0}^{2\mu-1} -S_{-2\mu_-+k}\lambda^{-k-1} + o\left(\lambda^{-2\mu}\right) \qquad (\lambda\to\infty). \tag{3.3}$$

Функции $A^{(C)}_{(\mu_-,\mu_+)}(\lambda)$ и $B^{(C)}_{(\mu_-,\mu_+)}(\lambda)$ имеют вид

$$A^{(C)}_{(\mu_-,\mu_+)}(\lambda) = -\lambda^\mu Q^{(C)}_\mu(\lambda^{-1}),$$
$$B^{(C)}_{(\mu_-,\mu_+)}(\lambda) = \lambda^\mu P^{(C)}_\mu(\lambda^{-1}).$$

Заметим, что функция $F^{(C)}_{(\mu_-,\mu_+)}(\lambda)$ представляется в виде

$$F^{(C)}_{(\mu_-,\mu_+)}(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\Sigma^{(C)}_{(\mu_-,\mu_+)}(t)}{t-\lambda}, \tag{3.4}$$

где $\Sigma^{(C)}_{(\mu_-,\mu_+)}$ — некоторое решение проблемы моментов CHMP$(\{S_k\}_{-\infty}^{+\infty},\mu_-,\mu_+)$

Предложение 3.1. *Всякое решение $d\Sigma$ сильной проблемы моментов* SHMP$(\{S_k\}_{-\infty}^{+\infty},\mu_-,\mu_+)$ *представляется в виде*

$$d\Sigma = t^{2\mu_-}\, d\Sigma^{(C)}, \tag{3.5}$$

где $d\Sigma^{(C)}$ — решение ассоциированной классической проблемы моментов CHMP$(\{S_k\}_{-\infty}^{+\infty},\mu_-,\mu_+)$, *непрерывное в точке $t=0$.*

Обратно, если $\Sigma^{(C)}$ — решение CHMP$(\{S_k\}_{-\infty}^{+\infty},\mu_-,\mu_+)$, *непрерывное в точке $t=0$, то мера Σ, определенная по формуле* (3.5), *является решением* SHMP$(\{S_k\}_{-\infty}^{+\infty},\mu_-,\mu_+)$.

Предложение 3.1 доказывается элементарной проверкой. Заметим, что если $\Sigma^{(C)}$ — решение CHMP$(\{S_k\}_{-\infty}^{+\infty},\mu_-,\mu_+)$, имеющее скачок в точке $t=0$, то мера (3.5) будет удовлетворять равенствам (1.1) при $-2\mu_- < k \le 2\mu_+$, а при $k=-2\mu_-$ будет выполнено неравенство

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^{-2\mu_-}\, d\Sigma(t) < S_{-2\mu_-}.$$

Положим

$$A_{(\mu_-,\mu_+)}(\lambda) = \lambda^{-2\mu_-} A^{(C)}_{(\mu_-,\mu_+)}(\lambda) + \left[\sum_{k=1}^{2\mu_-} S_{-k}\lambda^{-k+1}\right] B^{(C)}_{(\mu_-,\mu_+)}(\lambda),$$
$$B_{(\mu_-,\mu_+)}(\lambda) = B^{(C)}_{(\mu_-,\mu_+)}(\lambda)$$

и

$$F_{(\mu_-,\mu_+)}(\lambda) = A_{(\mu_-,\mu_+)}(\lambda^{-1}) B_{(\mu_-,\mu_+)}(\lambda^{-1})^{-1}$$
$$= \lambda^{2\mu_-} F^{(C)}_{(\mu_-,\mu_+)}(\lambda) + \sum_{k=1}^{2\mu_-} S_{-k}\lambda^{k-1}. \quad (3.6)$$

Теорема 3.1. *Если квадратичная форма*

$$\sum_{i,j=-\mu_-}^{\mu_+} \xi_j^* S_{i+j+1} \xi_i \qquad (\{\xi_k\}_{-\mu_-}^{\mu_+} \subset \mathbb{C}^N) \quad (3.7)$$

невырождена, то функция $F_{(\mu_-,\mu_+)}(\lambda)$ *является* $(\mu_- + \mu_+ + 1)$*-ой диагональной двухточечной аппроксимацией Паде типа* $(2\mu_-,\, 2\mu_+ + 1)$*, соответствующей паре* (1.4).

Доказательство. В первую очередь заметим, что матрица $B_{(\mu_-,\mu_+)}(0) = B^{(C)}_{(\mu_-,\mu_+)}(0)$ невырождена в силу строгой положительности последовательности моментов $\{S_k\}_{-\infty}^{+\infty}$, а матрица $\lambda^{\mu_-+\mu_++1} B_{(\mu_-,\mu_+)}(\lambda^{-1})|_{\lambda=0} = P^{(C)}_{\mu_-+\mu_++1}(0)$ невырождена в силу невырожденности формы (3.7).

Покажем, что функция $A_{(\mu_-,\mu_+)}(\lambda)$ является полиномом формальной степени $(\mu_- + \mu_+ + 1)$. Из (3.3) следует, что верно соотношение

$$A^{(C)}_{(\mu_-,\mu_+)}(\lambda^{-1}) - \left[\sum_{k=0}^{2\mu_-+2\mu_++1} -S_{-2\mu_-+k}\lambda^{-k-1}\right] B^{(C)}_{(\mu_-,\mu_+)}(\lambda^{-1})$$
$$= o\left(\lambda^{-2(\mu_-+\mu_++1)}\right) \qquad (\lambda \to \infty). \quad (3.8)$$

Поэтому также справедливо и разложение

$$A^{(C)}_{(\mu_-,\mu_+)}(\lambda^{-1}) - \left[\sum_{k=1}^{2\mu_-} -S_{-k}\lambda^{k-2\mu_--1}\right] B^{(C)}_{(\mu_-,\mu_+)}(\lambda^{-1})$$
$$= o\left(\lambda^{-2\mu_-}\right) \qquad (\lambda \to \infty).$$

Умножая левую и правую часть на $\lambda^{2\mu_-}$ и делая замену $\lambda = \lambda^{-1}$, получим

$$A_{(\mu_-,\mu_+)}(\lambda) = \lambda^{-2\mu_-}A^{(C)}_{(\mu_-,\mu_+)}(\lambda) - \left[\sum_{k=1}^{2\mu_-} -S_{-k}\lambda^{-k+1}\right]B^{(C)}_{(\mu_-,\mu_+)}(\lambda)$$
$$= o(1) \qquad (\lambda \to 0).$$

Отсюда следует, что $A_{(\mu_-,\mu_+)}(\lambda)$ является полиномом и $A_{(\mu_-,\mu_+)}(0) = 0$. Из определения $A_{(\mu_-,\mu_+)}(\lambda)$ ясно, что его степень не превышает $\mu_- + \mu_+ + 1$.

Осталось показать, что выполнены соотношения

$$A_{(\mu_-,\mu_+)}(\lambda^{-1}) - \left[\sum_{k=1}^{2\mu_-} S_{-k}\lambda^{k-1}\right]B_{(\mu_-,\mu_+)}(\lambda^{-1}) = o(\lambda^{2\mu_- -1}) \qquad (\lambda \to 0), \tag{3.9}$$

$$A_{(\mu_-,\mu_+)}(\lambda^{-1}) - \left[\sum_{k=0}^{2\mu_+ +1} S_k\lambda^{-k-1}\right]B_{(\mu_-,\mu_+)}(\lambda^{-1}) = o(\lambda^{-2\mu_+ -2})$$
$$(\lambda \to \infty). \tag{3.10}$$

Действительно, подставим значения

$$A^{(C)}_{(\mu_-,\mu_+)}(\lambda) = \lambda^{2\mu_-}A_{(\mu_-,\mu_+)}(\lambda) - \left[\sum_{k=0}^{2\mu_- -1} S_{-2\mu_- +k}\lambda^{k+1}\right]B_{(\mu_-,\mu_+)}(\lambda),$$
$$B^{(C)}_{(\mu_-,\mu_+)}(\lambda) = B_{(\mu_-,\mu_+)}(\lambda)$$

в (3.8). Получим

$$\lambda^{-2\mu_-}A_{(\mu_-,\mu_+)}(\lambda^{-1}) - \left[\sum_{k=0}^{2\mu_- -1} S_{-2\mu_- +k}\lambda^{-k-1}\right]B_{(\mu_-,\mu_+)}(\lambda^{-1})$$
$$= \left[\sum_{k=0}^{2\mu_- +2\mu_+ +1} -S_{-2\mu_- +k}\lambda^{-k-1}\right]B_{(\mu_-,\mu_+)}(\lambda^{-1})$$
$$+ o\left(\lambda^{-2(\mu_- +\mu_+ +1)}\right) \qquad (\lambda \to \infty),$$

откуда следует (3.10).

Наконец, из тождества

$$\lambda^{-2\mu_-} A^{(C)}_{(\mu_-,\mu_+)}(\lambda) = A_{(\mu_-,\mu_+)}(\lambda) - \left[\sum_{k=1}^{2\mu_-} S_{-k}\lambda^{-k+1} \right] B_{(\mu_-,\mu_+)}(\lambda)$$

получаем

$$\begin{aligned} A_{(\mu_-,\mu_+)}(\lambda^{-1}) - \left[\sum_{k=1}^{2\mu_-} S_{-k}\lambda^{k-1} \right] B_{(\mu_-,\mu_+)}(\lambda^{-1}) &= \lambda^{2\mu_-} A^{(C)}_{(\mu_-,\mu_+)}(\lambda^{-1}) \\ &= o(\lambda^{2\mu_- -1}) \qquad (\lambda \to 0), \end{aligned}$$

что доказывает (3.9). □

Теорема 3.2. *Пусть заданы две последовательности целых положительных чисел* $\{\mu_-^{(k)}\}_0^\infty$ *и* $\{\mu_+^{(k)}\}_0^\infty$*, такие, что*

$$\mu_-^{(k)} \to \infty, \qquad \mu_+^{(k)} \to \infty \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

Положим $F_k(\lambda) = F_{(\mu_-^{(k)},\mu_+^{(k)})}(\lambda)$*. Тогда верны следующие утверждения:*

1. *Последовательность* $\{F_k(\lambda)\}_0^\infty$ *предкомпактна в пространстве голоморфных функций в топологии равномерной сходимости на компактных подмножествах* $\mathbb{C}_+$*.*

2. *Любая предельная точка* $\{F_k(\lambda)\}_0^\infty$ *имеет вид*

$$F(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\Sigma(t)}{t-\lambda},$$

   где $d\Sigma$ *— некоторое решение полной сильной проблемы моментов* $\mathrm{SHMP}(\{S_k\}_{-\infty}^{+\infty}, \infty)$*.*

3. *Если задача* $\mathrm{SHMP}(\{S_k\}_{-\infty}^{+\infty}, \infty)$ *имеет единственное решение* $d\Sigma$*, то*

$$\lim_{k\to\infty} F_k(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\Sigma(t)}{t-\lambda}.$$

Доказательство. Сперва заметим, что третье утверждение теоремы немедленно следует из второго.

Далее, из (3.4) и (3.6) следует, что $F_k(\lambda)$ представляется в виде

$$F_k(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\Sigma_k(t)}{t-\lambda},$$

где мера Σ_k получается из некоторого решения $\Sigma_k^{(C)}$ проблемы моментов CHMP$(\{S_k\}_{-\infty}^{+\infty}, \mu_-^{(k)}, \mu_+^{(k)})$ по формуле (3.5). Поэтому функция $F_k(\lambda)$ является функцией класса $\mathcal{N}_{\mathbb{C}^N}$ и при достаточно больших k удовлетворяет соотношениям

$$\begin{aligned} F_k(\lambda) &= \sum_{k=0}^{M} -S_k\lambda^{-k-1} + o(\lambda^{-M-1}) \quad \text{при} \quad \lambda \widehat{\to} \infty, \\ F_k(\lambda) &= \sum_{k=1}^{M} S_{-k}\lambda^{k-1} + o(\lambda^{M-1}) \quad \text{при} \quad \lambda \widehat{\to} 0. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Поскольку выражение

$$\left|\xi^* F^{(k)}(\lambda)\xi\right| = \left| \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\xi^* d\Sigma_k(t)\xi}{t-\lambda} \right| \le \xi^* S_0 \xi \, |\Im\lambda|^{-1} \qquad (\xi \in \mathbb{C}^N)$$

ограничено на компактных множествах в $\mathbb{C}_+$, то последовательность $\{F_k(\lambda)\}_0^\infty$ предкомпактна, т. е. выполнено первое утверждение теоремы.

Пусть $F(\lambda)$ некоторая предельная точка $\{F_k(\lambda)\}_0^\infty$. Поскольку $\Im F_k(\lambda)\Im\lambda \ge 0$ для любого k, то и $\Im F(\lambda)\Im\lambda \ge 0$, а значит, $F(\lambda)$ принадлежит классу $\mathcal{N}_{\mathbb{C}^N}$. Кроме того, для $F(\lambda)$ выполнено условие (3.11) при любом M. Поэтому, по теореме 2.2, $F(\lambda)$ представляется в виде

$$F(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\Sigma(t)}{t-\lambda},$$

где мера $d\Sigma(t)$ удовлетворяет тождествам

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} t^k \, d\Sigma(t) = S_k \qquad (k \in \mathbb{Z}).$$

Значит $d\Sigma(t)$ — решение полной проблемы моментов SHMP$(\{S_k\}_{-\infty}^{+\infty}, \infty)$. $\square$

4. Ортогональные полиномы Лорана

Всюду в дальнейшем в этой статье мы предполагаем, что заданная последовательность моментов $\{S_k\}_{-\infty}^{+\infty}$ строго положительна и нормализована.

Определение 4.1. *Проблема моментов* $\mathrm{SHMP}(\{S_k\}_{-\infty}^{+\infty}, m)$ *называется* невырожденной, *если заданная последовательность моментов* $\{S_k\}_{-\infty}^{+\infty}$ *строго положительна.*

Определение 4.2. *Проблема моментов* $\mathrm{SHMP}(\{S_k\}_{-\infty}^{+\infty}, m)$ *называется* регулярной, *если она невырождена и квадратичные формы вида*

$$\sum_{i,j=-m}^{m} \xi_j^* S_{i+j-1} \xi_i, \quad \sum_{i,j=-m}^{m} \xi_j^* S_{i+j+1} \xi_i \qquad (\{\xi_k\}_{-m}^{m} \subset \mathbb{C}^N)$$

невырождены при всех $m > 0$.

Большинство утверждений в этом разделе были доказаны в наших прежних работах [24, 27]. В этом разделе мы приведем явный вид для некоторых классов двухточечных аппроксимаций Паде, связанных с сильной проблемой моментов.

Определение 4.3 (см. [24]). *Последовательность* $N \times N$*-матричных полиномов Лорана* $\{P_k(z)\}_0^{\infty}$ *вида*

$$P_{2k}(z) = \sum_{j=-k}^{k} P_{2k}^{(j)} z^j, \quad P_{2k+1}(z) = \sum_{j=-k-1}^{k} P_{2k+1}^{(j)} z^j \qquad (P_k^{(j)} \in \mathbb{C}^{N\times N})$$

называется последовательностью ортогональных полиномов Лорана первого рода, *если выполнены условия:*

(A) *Коэффициенты* $P_{2k}^{(k)}$ *и* $P_{2k+1}^{(-k-1)}$ *строго положительны.*

(B) *Полиномы Лорана* $\{P_k(z)\}_0^{\infty}$ *ортонормированы, т. е.,*

$$(P_i(z)\xi, P_j(z)\eta) = 0, \quad (P_k(z)\xi, P_k(z)\eta) = \eta^*\xi$$
$$(\xi, \eta \in \mathbb{C}^N, \ i, j, k = 0, 1, \ldots, \ i \neq j).$$

Условия (A) и (B) однозначно определяют последовательность $\{P_k(z)\}_0^{\infty}$.

Определение 4.4 (см. [24]). *Последовательность $N\times N$-матричных полиномов Лорана $\{Q_k(z)\}_0^\infty$, определенная по формулам*

$$\eta^* Q_k(z)\xi = (R_k(\cdot, z)\xi, \eta) \qquad (\xi, \eta \in \mathbb{C}^N,\ k = 0, 1, 2, \ldots),$$

где

$$R_k(\zeta, z) = \frac{P_k(\zeta) - P_k(z)}{\zeta - z} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots),$$

называется последовательностью полиномов Лорана второго рода.

Дополняя определения 4.3 и 4.4, положим

$$P_{-2}(z) = 0, \quad P_{-1}(z) = 0, \quad Q_{-2}(z) = -I, \quad Q_{-1}(z) = 0.$$

Если обозначить через $\{\epsilon_j\}_1^N$ стандартный базис в $\mathbb{C}^N$, то последовательность

$$\{P_i(z)\epsilon_j :\ i = 0, 1, 2, \ldots,\ j = 1, 2, \ldots, N\}$$

образует ортонормированный базис в пространстве $\mathfrak{H}$. Поэтому каждый элемент $f \in \mathfrak{H}$ однозначно представляется в виде ряда

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(z)\phi_k, \tag{4.1}$$

где коэффициенты разложения $\phi_k \in \mathbb{C}^N$ определяются по формулам

$$\epsilon_j^* \phi_k = (f(z), P_k(z)\epsilon_j) \qquad (j = 1, \ldots, N).$$

Коэффициенты $\{\phi_k\}_0^\infty$ удовлетворяют условию

$$\|f\|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \|\phi_k\|^2_{\mathbb{C}^N} < \infty. \tag{4.2}$$

Обратно, всякий вектор f вида (4.1), удовлетворяющий условию (4.2), принадлежит пространству $\mathfrak{H}$.

Ясно, что последовательность $\{P_i(z)\epsilon_j :\ i = 0, 1, \ldots, m,\ j = 1, 2, \ldots, N\}$ образует ортонормированный базис в подпространстве $\mathfrak{H}_m$.

Теорема 4.1 (см. [24]). *Полиномы Лорана* $\{P_k(z)\}_0^\infty$ *и* $\{Q_k(z)\}_0^\infty$ *удовлетворяют следующим рекуррентным соотношениям:*

$$\begin{aligned}
zP_{2k}(z) &= P_{2k-2}(z)C_{2k-2}^* + P_{2k-1}(z)B_{2k-1}^* \\
&\quad + P_{2k}(z)A_{2k} + P_{2k+1}(z)B_{2k} + P_{2k+2}(z)C_{2k}, \\
zQ_{2k}(z) &= Q_{2k-2}(z)C_{2k-2}^* + Q_{2k-1}(z)B_{2k-1}^* \\
&\quad + Q_{2k}(z)A_{2k} + Q_{2k+1}(z)B_{2k} + Q_{2k+2}(z)C_{2k}, \\
zP_{2k+1}(z) &= P_{2k}(z)B_{2k}^* + P_{2k+1}(z)A_{2k+1} + P_{2k+2}(z)B_{2k+1}, \\
zQ_{2k+1}(z) &= Q_{2k}(z)B_{2k}^* + Q_{2k+1}(z)A_{2k+1} + Q_{2k+2}(z)B_{2k+1} \\
&\qquad\qquad (k = 0, 1, 2, \ldots) \qquad (4.3)
\end{aligned}$$

с начальными условиями

$$P_{-2}(z) = 0, \quad P_0(z) = I, \quad Q_{-2}(z) = -I, \quad Q_0(z) = 0, \qquad (4.4)$$

где $\{A_k\}_0^\infty$, $\{B_k\}_{-1}^\infty$, $\{C_k\}_{-2}^\infty$ — *некоторые* $N \times N$*-матрицы.*

Предложение 4.1 ([24]). *Коэффициенты* $\{A_k\}_0^\infty$, $\{B_k\}_{-1}^\infty$, $\{C_k\}_{-2}^\infty$ *рекуррентных соотношений* (4.3) *удовлетворяют следующим условиям.*

(i) $C_{-2} = I,\ B_{-1} = 0,\ C_{2k-1} = 0 \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots);$

(ii) *Следующие матрицы корректно определены:*

$$C_{2k}^{-1}, \quad \widetilde{B}_0 = (B_0^* - A_0 C_0^{-1} B_1)^{-1},$$
$$\widetilde{C}_{2k+1} = -\left[\begin{pmatrix} B_{2k} & B_{2k+1}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{2k} & A_{2k+2} \\ 0 & C_{2k+2} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} B_{2k+2}^* \\ B_{2k+3} \end{pmatrix}\right]^{-1}$$
$$(k = 0, 1, 2 \ldots);$$

(iii) *Верны неравенства:*

$$C_{2k}C_{2k-2}\cdots C_0 > 0, \quad \widetilde{C}_{2k+1}\widetilde{C}_{2k-1}\cdots\widetilde{C}_1\widetilde{B}_0 > 0 \quad (k = 0, 1, 2, \ldots);$$

(iv) *Матрицы* A_k *самосопряженные и удовлетворяют равенствам*

$$A_{2k+1} = B_{2k}C_{2k}^{-1}B_{2k+1} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Крайние коэффициенты полиномов Лорана $\{P_k(z)\}_0^\infty$ *выражаются через коэффициенты разложения* (4.3) *следующим образом:*

$$\begin{aligned}
&P_0^{(0)} = I, \quad P_1^{(-1)} = \widetilde{B}_0^{-1},\\
&P_{2k+1}^{(-k-1)} = P_{2k-1}^{(-k)}\widetilde{C}_{2k-1}^{-1} = \widetilde{B}_0^{-1}\widetilde{C}_1^{-1}\widetilde{C}_3^{-1}\cdots\widetilde{C}_{2k-1}^{-1},\\
&P_{2k+1}^{(k)} = P_{2k}^{(k)}C_{2k}^{-1}B_{2k+1} = C_0^{-1}C_2^{-1}\cdots C_{2k}^{-1}B_{2k+1},\\
&P_{2k+2}^{(k+1)} = P_{2k}^{(k)}C_{2k}^{-1} = C_0^{-1}C_2^{-1}\cdots C_{2k}^{-1},\\
&P_{2k+2}^{(-k-1)} = -P_{2k+1}^{(-k-1)}B_{2k}C_{2k}^{-1} = -\widetilde{B}_0^{-1}\widetilde{C}_1^{-1}\widetilde{C}_3^{-1}\cdots\widetilde{C}_{2k-1}^{-1}B_{2k}C_{2k}^{-1}.
\end{aligned}$$

В предыдущем разделе мы рассматривали семейство симметрических операторов A_m, действующих в подпространствах $\mathfrak{H}_m$. Обозначим через $\widetilde{A}_m$ самосопряженное расширение оператора A_m в пространстве $\mathfrak{H}_m$, определенное следующими тождествами.

1. При $m = 2\mu$:

$$\widetilde{A}_{2\mu}P_{2\mu}(z) = P_{2\mu-2}(z)C_{2\mu-2}^* + P_{2\mu-1}(z)B_{2\mu-1}^* + P_{2\mu}(z)A_{2\mu}.$$

2. При $m = 2\mu + 1$:

$$\begin{aligned}
\widetilde{A}_{2\mu+1}P_{2\mu}(z) = P_{2\mu-2}(z)C_{2\mu-2}^* &+ P_{2\mu-1}(z)B_{2\mu-1}^*\\
&+ P_{2\mu}(z)A_{2\mu} + P_{2\mu+1}(z)B_{2\mu},
\end{aligned}$$

$$\widetilde{A}_{2\mu+1}P_{2\mu+1}(z) = P_{2\mu}(z)B_{2\mu}^* + P_{2\mu+1}(z)A_{2\mu+1}.$$

В базисе $\{P_i(z)\epsilon_j : \ i = 0, 1, \ldots, m, \ j = 1, 2, \ldots, N\}$ оператор $\widetilde{A}_m$ представляется в следующем блочно-матричном виде:

$$\widetilde{A}_{2\mu} = \begin{pmatrix}
A_0 & B_0^* & C_0^* & & & & \\
B_0 & A_1 & B_1^* & & & & \\
C_0 & B_1 & A_2 & & & & \\
 & & & \ddots & & & \\
 & & & & A_{2\mu-2} & B_{2\mu-2}^* & C_{2\mu-2}^* \\
 & & & & B_{2\mu-2} & A_{2\mu-1} & B_{2\mu-1}^* \\
 & & & & C_{2\mu-2} & B_{2\mu-1} & A_{2\mu}
\end{pmatrix},$$

$$\widetilde{A}_{2\mu+1} = \begin{pmatrix} A_0 & B_0^* & C_0^* & & & & & \\ B_0 & A_1 & B_1^* & & & & & \\ C_0 & B_1 & A_2 & & & & & \\ & & & \ddots & & & & \\ & & & & A_{2\mu-2} & B_{2\mu-2}^* & C_{2\mu-2}^* & \\ & & & & B_{2\mu-2} & A_{2\mu-1} & B_{2\mu-1}^* & \\ & & & & C_{2\mu-2} & B_{2\mu-1} & A_{2\mu} & B_{2\mu}^* \\ & & & & & & B_{2\mu} & A_{2\mu+1} \end{pmatrix}.$$

Предложение 4.2. *Выполнены тождества:*

$$\ker \widetilde{A}_{2\mu} = (P_{2\mu-1}(z) - P_{2\mu}(z)C_{2\mu-2}^{-*}B_{2\mu-2}^*) \ker(B_{2\mu-1} - A_{2\mu}C_{2\mu-2}^{-*}B_{2\mu-2}^*),$$

$$\ker \widetilde{A}_{2\mu+1} = P_{2\mu+1}(z) \ker B_{2\mu}^*.$$

Доказательство. Для начала заметим, что $\ker \widetilde{A}_m \subset \ker A_m^* = \mathfrak{H}_m \ominus \operatorname{ran} A_m$ и

$$\mathfrak{H}_{2\mu} \ominus \operatorname{ran} A_{2\mu} = \{(P_{2\mu-1}(z) - P_{2\mu}(z)C_{2\mu-2}^{-*}B_{2\mu-2}^*)\phi : \ \phi \in \mathbb{C}^N\},$$
$$\mathfrak{H}_{2\mu+1} \ominus \operatorname{ran} A_{2\mu+1} = \{P_{2\mu+1}(z)\phi : \ \phi \in \mathbb{C}^N\}.$$

Поэтому

$$\widetilde{A}_{2\mu}(P_{2\mu-1}(z) - P_{2\mu}(z)C_{2\mu-2}^{-*}B_{2\mu-2}^*)\phi = P_{2\mu}(z)(B_{2\mu-1} - A_{2\mu}C_{2\mu-2}^{-*}B_{2\mu-2}^*)\phi \qquad (\phi \in \mathbb{C}^N)$$

и

$$\widetilde{A}_{2\mu+1}P_{2\mu+1}(z)\phi = (P_{2\mu}(z)+P_{2\mu+1}(z)B_{2\mu+1}^*C_{2\mu}^{-*})B_{2\mu}^*\phi \qquad (\phi \in \mathbb{C}^N). \ \square$$

Пусть $E_t = E_t(\widetilde{A}_m)$ — разложение единицы самосопряженного оператора $\widetilde{A}_m$. Положим

$$F_m(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_{\mathfrak{L}}E_t|_{\mathfrak{L}}}{t-\lambda}. \tag{4.5}$$

Функции $F_m(\lambda)$ можно выразить и в явном виде.

Предложение 4.3. *Справедливы тождества*

$$F_{2\mu}(\lambda) = -(Q_{2\mu+1}(\lambda)B_{2\mu} + Q_{2\mu+2}(\lambda)C_{2\mu})(P_{2\mu+1}(\lambda)B_{2\mu} + P_{2\mu+2}(\lambda)C_{2\mu})^{-1},$$

$$F_{2\mu+1}(\lambda) = -Q_{2\mu+2}(\lambda)P_{2\mu+2}(\lambda)^{-1}.$$

Доказательство. Мы докажем первое из тождеств, второе тождество доказывается аналогично.

Сперва заметим, что $F_{2\mu}(\lambda)$ можно представить в виде

$$\eta^* F_{2\mu}(\lambda)\xi = ((\widetilde{A}_{2\mu} - \lambda)^{-1}\xi, \eta) \qquad (\xi, \eta \in \mathfrak{L},\ \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}).$$

Возьмем произвольный вектор $\xi \in \mathfrak{L}$ и положим

$$(\widetilde{A}_{2\mu} - \lambda)^{-1}\xi = f = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(z) f_k. \tag{4.6}$$

Тогда

$$\begin{aligned}\eta^* f_k &= ((\widetilde{A}_{2\mu} - \lambda)^{-1}\xi, P_k(z)\eta)\\ &= ((\widetilde{A}_{2\mu} - \lambda)^{-1}\xi, (P_k(z) - P_k(\overline{\lambda}))\eta) + ((\widetilde{A}_{2\mu} - \lambda)^{-1}\xi, P_k(\overline{\lambda})\eta)\\ &= \eta^*(Q_k(\overline{\lambda})^* + P_k(\overline{\lambda})^* F_{2\mu+1}(\overline{\lambda}))\xi.\end{aligned} \tag{4.7}$$

Заменяя в равенстве (4.6) f_k на (4.7), мы получим

$$(\widetilde{A}_{2\mu} - \lambda)^{-1}\big|_{\mathfrak{L}} = \sum_{k=0}^{2\mu} P_k(z) Q_k(\overline{\lambda})^* + \sum_{k=0}^{2\mu} P_k(z) P_k(\overline{\lambda})^* F_{2\mu+1}(\overline{\lambda}). \tag{4.8}$$

Легко проверить, что

$$(\widetilde{A}_{2\mu} - \lambda) \sum_{k=0}^{2\mu} P_k(z) P_k(\overline{\lambda})^* = -P_{2\mu}(z)(P_{2\mu+1}(\overline{\lambda}) B_{2\mu} + P_{2\mu+2}(\overline{\lambda}) C_{2\mu})^*,$$

$$(\widetilde{A}_{2\mu} - \lambda) \sum_{k=0}^{2\mu} P_k(z) Q_k(\overline{\lambda})^* = I - P_{2\mu}(z)(Q_{2\mu+1}(\overline{\lambda}) B_{2\mu} + Q_{2\mu+2}(\overline{\lambda}) C_{2\mu})^*.$$

Применяя $(\widetilde{A}_{2\mu} - \lambda)$ к обоим сторонам равенства (4.8), получаем

$$\begin{aligned}I = I &- P_{2\mu}(z)(Q_{2\mu+1}(\overline{\lambda}) B_{2\mu} + Q_{2\mu+2}(\overline{\lambda}) C_{2\mu})^*\\ &- P_{2\mu}(z)(P_{2\mu+1}(\overline{\lambda}) B_{2\mu} + P_{2\mu+2}(\overline{\lambda}) C_{2\mu})^* F_{2\mu}(\overline{\lambda}).\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}&F_{2\mu}(\lambda) = F_{2\mu}(\overline{\lambda})^*\\ &= -(Q_{2\mu+1}(\lambda) B_{2\mu} + Q_{2\mu+2}(\lambda) C_{2\mu})(P_{2\mu+1}(\lambda) B_{2\mu} + P_{2\mu+2}(\lambda) C_{2\mu})^{-1}.\end{aligned}$$

□

Из предложения 4.2 следует следующее утверждение.

Теорема 4.2. 1. *Если матрица* $(B_{2\mu-1}-A_{2\mu}C_{2\mu-2}^{-*}B_{2\mu-2}^{*})$ *невырождена, то диагональная аппроксимация Паде типа* $(2\mu,\ 2\mu+1)$ *для пары* (1.4) *существует и имеет вид*

$$-(Q_{2\mu+1}(\lambda)B_{2\mu}+Q_{2\mu+2}(\lambda)C_{2\mu})(P_{2\mu+1}(\lambda)B_{2\mu}+P_{2\mu+2}(\lambda)C_{2\mu})^{-1}.$$

2. *Если матрица* $B_{2\mu}^{*}$ *невырождена, то диагональная аппроксимация Паде типа* $(2\mu+2,\ 2\mu+1)$ *для пары* (1.4) *существует и имеет вид*

$$-Q_{2\mu+2}(\lambda)P_{2\mu+2}(\lambda)^{-1}.$$

Доказательство. В силу (4.5), теоремы 2.2 и теоремы 2.3, нам нужно лишь доказать равенства

$$(\widetilde{A}_{2\mu}^{2\mu+1}\xi,\eta)=\eta^{*}S_{2\mu+1}\xi,\quad (\widetilde{A}_{2\mu+1}^{2\mu+1}\xi,\eta)=\eta^{*}S_{2\mu+1}\xi\qquad (\xi,\eta\in\mathfrak{L}).$$

Поскольку $\widetilde{A}_m=P_{\mathfrak{H}_m}A|_{\mathfrak{H}_m}$, то мы получим

$$(\widetilde{A}_{2\mu}^{2\mu+1}\xi,\eta)=(A^{\mu+1}\xi,A^{\mu}\eta)=(z^{2\mu+1}\xi,\eta)=\eta^{*}S_{2\mu+1}\xi,$$
$$(\widetilde{A}_{2\mu+1}^{2\mu+1}\xi,\eta)=(A^{\mu+1}\xi,A^{\mu}\eta)=(z^{2\mu+1}\xi,\eta)=\eta^{*}S_{2\mu+1}\xi.\qquad\square$$

5. Резольвентные матрицы

Положим (см. [24])

$$V_{2\mu}(\lambda)=\left(v_{ij}^{(2\mu)}\right)_{1}^{2}=\begin{pmatrix}-Q_{2\mu}(\lambda) & -Q_{2\mu+1}(\lambda)B_{2\mu}-Q_{2\mu+2}(\lambda)C_{2\mu}\\ P_{2\mu}(\lambda) & P_{2\mu+1}(\lambda)B_{2\mu}+P_{2\mu+2}(\lambda)C_{2\mu}\end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}V_{2\mu+1}(\lambda)&=\left(v_{ij}^{(2\mu+1)}\right)_{1}^{2}\\ &=\begin{pmatrix}-Q_{2\mu}(\lambda)C_{2\mu}^{*}-Q_{2\mu+1}(\lambda)B_{2\mu+1}^{*} & -Q_{2\mu+2}(\lambda)\\ P_{2\mu}(\lambda)C_{2\mu}^{*}+P_{2\mu+1}(\lambda)B_{2\mu+1}^{*} & P_{2\mu+2}(\lambda)\end{pmatrix}\end{aligned}$$
$$(\mu=0,1,2,\ldots).\quad (5.1)$$

Матрица $V_m(\lambda)$ называется резольвентной матрицей задачи $\mathrm{SHMP}(\{S_k\}_{-\infty}^{+\infty},m)$, поскольку позволяет описывать решения этой задачи в виде дробно-линейного преобразования согласно следующему утверждению.

Теорема 5.1. *Существует взаимно-однозначное соответствие между решениями $d\Sigma(\lambda)$ проблемы моментов* $\mathrm{SHMP}(\{S_k\}_{-\infty}^{+\infty}, m)$ *и множеством всех функций $\tau \in \widetilde{\mathcal{N}}_{\mathbb{C}^N}$, удовлетворяющих условиям*

$$\lim_{y\to\infty} \frac{\tau(iy)}{y} = 0, \quad \lim_{y\to 0} y(v_{22}^{(m)}(iy)(v_{21}^{(m)}(iy))^{-1} + \tau(iy))^{-1} = 0.$$

Это соответствие устанавливается формулой

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\Sigma(t)}{t-\lambda} = \left(v_{11}^{(m)}(\lambda)\tau(\lambda) + v_{12}^{(m)}(\lambda)\right)\left(v_{21}^{(m)}(\lambda)\tau(\lambda) + v_{22}^{(m)}(\lambda)\right)^{-1}, \tag{5.2}$$

где функции $(v_{ij}^{(m)}(\lambda))_1^2$ определены равенствами (5.1).

Доказательство. Для случая $m = 2\mu$ это утверждение было доказано в [26], для случая $m = 2\mu + 1$ оно может быть доказано тем же методом. □

Теорема 5.2. *Справедливо представление*

$$V_m(\lambda) = \prod_{k=0}^{\widehat{m}} T_k(\lambda) \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots), \tag{5.3}$$

где

$$T_{2\mu}(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & \lambda - A_{2\mu} \end{pmatrix},$$

$$T_{2\mu+1}(\lambda) = \begin{pmatrix} C_{2\mu}^* + \frac{1}{\lambda} B_{2\mu}^* B_{2\mu+1}^* & -\frac{1}{\lambda} B_{2\mu}^* B_{2\mu} C_{2\mu}^{-1} \\ \frac{1}{\lambda} C_{2\mu}^{-1} B_{2\mu+1} B_{2\mu+1}^* & C_{2\mu}^{-1} - \frac{1}{\lambda} C_{2\mu}^{-1} B_{2\mu+1} B_{2\mu} C_{2\mu}^{-1} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & C_{2\mu}^{-1} \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} C_{2\mu}^* & 0 \\ 0 & C_{2\mu} \end{pmatrix} + \frac{1}{\lambda} \begin{pmatrix} B_{2\mu}^* \\ B_{2\mu+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{2\mu+1}^* & -B_{2\mu} \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & C_{2\mu}^{-1} \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Для доказательства достаточно убедиться, что $V_0(\lambda) = T_0(\lambda)$, и проверить тождество

$$V_m(\lambda) T_{m+1}(\lambda) = V_{m+1}(\lambda).$$

Мы ограничимся проверкой для случая $m = 2\mu - 1$, случай $m = 2\mu$ проверяется аналогично. Воспользовавшись соотношениями (4.3), получим

$$
\begin{aligned}
&V_{2\mu-1}(\lambda)T_{2\mu}(\lambda)\\
&\quad=\begin{pmatrix}-Q_{2\mu-2}(\lambda)C^*_{2\mu-2}-Q_{2\mu-1}(\lambda)B^*_{2\mu-1} & -Q_{2\mu}(\lambda)\\ P_{2\mu-2}(\lambda)C^*_{2\mu-2}+P_{2\mu-1}(\lambda)B^*_{2\mu-1} & P_{2\mu}(\lambda)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -I\\ I & \lambda-A_{2\mu}\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}-Q_{2\mu}(\lambda) & Q_{2\mu-2}(\lambda)C^*_{2\mu-2}+Q_{2\mu-1}(\lambda)B^*_{2\mu-1}+Q_{2\mu}(\lambda)A_{2\mu}-\lambda Q_{2\mu}(\lambda)\\ P_{2\mu}(\lambda) & -P_{2\mu-2}(\lambda)C^*_{2\mu-2}-P_{2\mu-1}(\lambda)B^*_{2\mu-1}-P_{2\mu}(\lambda)A_{2\mu}+\lambda P_{2\mu}(\lambda)\end{pmatrix}\\
&\qquad=\begin{pmatrix}-Q_{2\mu}(\lambda) & -Q_{2\mu+1}(\lambda)B_{2\mu}-Q_{2\mu+2}(\lambda)C_{2\mu}\\ P_{2\mu}(\lambda) & P_{2\mu+1}(\lambda)B_{2\mu}+P_{2\mu+2}(\lambda)C_{2\mu}\end{pmatrix}=V_{2\mu}(\lambda). \quad \square
\end{aligned}
$$

Литература

[1] V. M. Adamyan and I. M. Tkachenko, *Solutions of the truncated matrix Hamburger moment problem according to M. G. Krein*, Operator Theory: Adv. and Appl. **118** (2000), 33–51.

[2] Н. И. Ахиезер, *Классическая проблема моментов и некоторые вопросы анализа, связанные с нею*, ГИФМЛ, Москва, 1961.

[3] Н. И. Ахиезер, И. М. Глазман, *Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве*, Наука, Москва, 1966.

[4] George A. Baker, Jr. and Peter Graves-Morris, *Padé approximants. Part II*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 14, Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass., 1981.

[5] Ch. Bennewitz, *Symmetric relations on a Hilbert space*, Conference on the Theory of Ordinary and Partial Differential Equations (Univ. Dundee, Dundee, 1972), Springer, Berlin, 1972, pp. 212–218. Lecture Notes in Math., Vol. 280.

[6] Ю. М. Березанский, *Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов*, Наукова думка, Киев, 1965.

[7] М. С. Бродский, *Треугольные и жордановы представления линейных операторов*, Наука, Москва, 1969.

[8] A. Bultheel, *Laurent series and their Padé approximations*, Operator Theory: Advances and Applications, vol. 27, Birkhäuser Verlag, Basel, 1987.

[9] V. A. Derkach and M. M Malamud, *The extension theory of Hermitian operators and the moment problem*, Journal of Mathematical Sciences **73** (1995), N 2, 141–242.

[10] H. Dym, *On Hermitian block Hankel matrices, matrix polynomials, the Hamburger moment problem, interpolation and maximum entropy*, Integral Equations and Operator Theory **12** (1989), 757–812.

[11] E. Hendriksen and C. Nijhuis, *Laurent–Jacobi matrices and the strong Hamburger moment problem*, Acta Appl. Math. **61** (2000), 119–132.

[12] W. B. Jones, O. Njåstad, and W. J. Thron, *Continued fractions and strong Hamburger moment problems*, Proc. London Math. Soc. (3) **47** (1983), N 2, 363–384.

[13] W. B. Jones and Olav Njåstad, *Orthogonal Laurent polynomials and strong moment theory: a survey*, J. Comput. Appl. Math. **105** (1999), N 1–2, 51–91.

[14] W. B. Jones and W. J. Thron, *Continued fractions: Analytic theory and applications*, Addison-Wesley, Reading, MA, 1980.

[15] W. B. Jones and W. J. Thron, *Survey of continued fraction methods of solving moment problems and related topics*, Analytic Theory of Continued Fractions (Loen, 1981), Lecture Notes in Math., vol. 932, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1982, pp. 4–37.

[16] W. B. Jones, W. J. Thron, and O. Njåstad, *Orthogonal Laurent polynomials and the strong Hamburger moment problem*, J. Math. Anal. Appl. **98** (1984), no. 2, 528–554.

[17] W. B. Jones, W. J. Thron, and H. Waadeland, *A strong Stieltjes moment problem*, Trans. Amer. Math. Soc. **261** (1980), 503–528.

[18] I. S. Kats and A. A. Nudelman, *Strong Stieltjes moment problem*, St. Peterburg Math. J. **8** (1997), no. 6, 931–950.

[19] И. В. Ковалишина, *Аналитическая теория одного класса интерполяционных задач*, Изв. РАН. Сер. матем. **47** (1983), N 3, 455–497.

[20] М. Г. Крейн, *Основные положения теории представления эрмитовых операторов с индексом дефекта* (m, m), Укр. мат. журнал АН УССР **1** (1949), N 2, 3–66.

[21] М. Г. Крейн, Г. К. Лангер, *О дефектных подпространствах и обобщенных резольвентах эрмитова оператора в пространстве* $\Pi_\varkappa$, Функц. анализ и его прил. **5** (1971), N 2–3, 59–71, 54–69.

[22] М. Г. Крейн, А. А. Нудельман, *Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи*, Наука, Москва, 1973.

[23] O. Njåstad, *Solutions of the strong Hamburger moment problem*, J. of Math. Analysis and Appl. **197** (1996), 227–248.

[24] K. K. Simonov, *Orthogonal matrix Laurent polynomials*, Mathematical Notes **79** (2006), N 1–2, 292–296.

[25] K. K. Simonov, *Strong matrix moment problem of Hamburger*, Methods of Functional Analysis and Topology **12** (2006), N 2, 183–196.

[26] K. K. Simonov, *Strong truncated matrix moment problem of Hamburger*, Sarajevo Journal of Mathematics **2** (2006), N 2, 181–204.

[27] К. К. Симонов, *Ортогональные матричные полиномы Лорана на вещественной оси*, Украинский Математический Вестник **3** (2006), N 2, 275–299.

Сведения об авторах

Кирилл К. Симонов

Донецкий национальный университет
ул. Университетская 24,
83055, Донецк,
Украина
E-Mail: `xi@gamma.dn.ua`