Український математичний вісник
Том 4 **(2007)**, № 2, 157 – 162

О полноте систем корневых функций некоторых граничных задач для уравнения порядка $2-\varepsilon$

Анна В. Агибалова

(*Представлена М. М. Маламудом*)

Аннотация. Рассматривается дифференциальное уравнение дробного порядка $2-\varepsilon$ с разделенными граничными условиями и доказывается полнота системы собственных и присоединенных функций этой задачи в пространстве $L^1[0,1]$.

2000 MSC. 34L10.

Ключевые слова и фразы. Дифференциальный оператор, граничная задача, собственные и присоединенные функции, полнота.

Известно (см. [5]), что система собственных и присоединённых функций (ССПФ) оператора Штурма–Лиувилля

$$-y'' + q(x)y = \lambda^2 y$$

с разделяющимися граничными условиями

$$y'(0) - h_0 y(0) = y'(1) - h_1 y(1) = 0$$

полна в пространстве $L^2[0,1]$ при любом комплекснозначном потенциале $q \in L^1[0,1]$ и любых $h_0, h_1 \in \mathbb{C}$. Подобный результат также имеет место для произвольных невырожденных граничных условий (см. [5]).

А. А. Шкаликовым (см. [6]) доказана полнота ССПФ задачи с нерегулярными распадающимися граничными условиями для обыкновенных дифференциальных уравнений порядка $n > 2$. На уравнения произвольного дробного порядка $n-\varepsilon$, $n \geqslant 3$, $\varepsilon \in (0,1)$ этот результат был распространён М. М. Маламудом и Л. Л. Оридорогой (см. [4]).

Статья поступила в редакцию 23.03.2007

Полнота ССПФ дифференциального оператора порядка $(2-\varepsilon)$ с разделяющимися граничными условиями получена в [1].

В заметке доказана теорема о полноте ССПФ граничной задачи для оператора порядка $2-\varepsilon$ с граничными условиями специального вида.

Рассмотрим в пространстве $L^1[0,1]$ дифференциальное уравнение порядка $2-\varepsilon, \varepsilon \in (0,1)$

$$y^{(2-\varepsilon)} + q(x)y^{(-\varepsilon)} = \lambda y \tag{1}$$

с краевыми условиями

$$\Gamma_1(y) = hy^{(-\varepsilon)}(0,\lambda) + y^{(1-\varepsilon)}(0,\lambda) = 0, \tag{2}$$

$$\Gamma_2(y) = a_{21}y^{(-\varepsilon)}(0,\lambda) + a_{22}y^{(1-\varepsilon)}(0,\lambda) + a_{23}y^{(-\varepsilon)}(1,\lambda) + a_{24}y^{(1-\varepsilon)}(1,\lambda) = 0. \tag{3}$$

Здесь $y^{(2-\varepsilon)} = D^{2-\varepsilon}y = \frac{d^2}{dx^2}J^\varepsilon y$, а J^ε-оператор дробного интегрирования:

$$J^\varepsilon y(x) = \frac{1}{\Gamma(\varepsilon)}\int\limits_0^x (x-t)^{\varepsilon-1}y(t)\,dt.$$

Обозначим $\sigma(L)$ —спектр задачи (1)–(3). Рассмотрим вначале случай нулевого потенциала $q=0$. Уравнение

$$y^{(2-\varepsilon)} = \lambda y \tag{4}$$

имеет фундаментальную систему решений

$$c(x,\lambda) = x^{-\varepsilon}E_{\frac{1}{2-\varepsilon}}(\lambda x^{2-\varepsilon}, 1-\varepsilon),$$

$$s(x,\lambda) = x^{1-\varepsilon}E_{\frac{1}{2-\varepsilon}}(\lambda x^{2-\varepsilon}, 2-\varepsilon),$$

удовлетворяющую начальным условиям

$$c^{(-\varepsilon)}(0,\lambda) = s^{(1-\varepsilon)}(0,\lambda) = 1,$$

$$c^{(1-\varepsilon)}(0,\lambda) = s^{(-\varepsilon)}(0,\lambda) = 0.$$

Здесь

$$E_\rho(z;\mu) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\mu + k\rho^{-1})},$$

где $\rho > 0$, μ — произвольный комплексный параметр, — функция типа Миттаг–Леффлера. Известно (см. [2]), что $E_\rho(z;\mu)$ — целая функция порядка роста ρ и типа 1.

С помощью асимптотических оценок для функций типа Миттаг–Леффлера (см. [2]) получаем такое асимптотическое поведение функций $c(x,\lambda)$ и $s(x,\lambda)$:

$$c(x,\lambda) = \frac{1}{2-\varepsilon}\lambda^{\frac{\varepsilon}{2-\varepsilon}} e^{x\lambda^{\frac{1}{2-\varepsilon}}} + O\Big(\frac{x^{\varepsilon-4}}{|\lambda|^2}\Big), \tag{5}$$

$$s(x,\lambda) = \frac{1}{2-\varepsilon}\lambda^{\frac{\varepsilon-1}{2-\varepsilon}} e^{x\lambda^{\frac{1}{2-\varepsilon}}} + O\Big(\frac{x^{\varepsilon-3}}{|\lambda|^2}\Big). \tag{6}$$

Оценки (5) и (6), а также доказанное в [4] существование треугольного оператора преобразования для уравнений порядка $n-\varepsilon \quad (n \geqslant 1)$ с аналитическими коэффициентами, существенно используются при доказательстве теоремы о полноте ССПФ задачи (1)–(3).

Теорема. *Пусть q — целая аналитическая функция. Тогда ССПФ задачи* (1)–(3) *полна в пространстве* $L^1[0,1]$.

Доказательство. Пусть $\omega(x,\lambda)$ —решение следующей задачи Коши для уравнения (1)

$$\begin{cases} \omega^{(-\varepsilon)}(0,\lambda) = -1, \\ \omega^{(1-\varepsilon)}(0,\lambda) = h. \end{cases}$$

Так как ω при всех λ удовлетворяет граничному условию (2), то λ_0 будет собственным значением задачи (1)–(3) тогда и только тогда, когда λ_0 —корень характеристического уравнения

$$\chi(\lambda) := (ha_{22} - a_{21}) + a_{24}\big(hs^{(1-\varepsilon)}(1,\lambda) - c^{(1-\varepsilon)}(1,\lambda)\big) \\ + a_{23}\big(hs^{(-\varepsilon)}(1,\lambda) - c^{(-\varepsilon)}(1,\lambda)\big). \tag{7}$$

При этом кратность $p(\lambda_0)$ нуля λ_0 характеристической функции $\chi(\lambda_0)$ совпадает с размерностью корневого подпространства в точке λ_0 задачи (1)–(3).

Пусть $\omega_0(x;\lambda) = -c(x,\lambda) + hs(x,\lambda)$ — решение задачи Коши для уравнения (4) с начальными условиями

$$\begin{cases} \omega_0^{(-\varepsilon)}(0,\lambda) = -1, \\ \omega_0^{(1-\varepsilon)}(0,\lambda) = h. \end{cases}$$

Известно (см. [3]), что решение $\omega(x,\lambda)$ допускает следующее представление:

$$\omega(x;\lambda) = (I+K)\omega_0(x;\lambda) = \omega_0(x;\lambda) + \int\limits_0^x K(x,t)\omega_0(t;\lambda)\,dt \qquad (8)$$

при помощи треугольного оператора преобразования $I+K$, в котором K —вольтерров интегральный оператор, $K(\cdot,\cdot) \in C(\Omega)$, $\Omega = \{0 \leqslant t \leqslant x \leqslant 1\}$. Из (8) вытекает следующая асимптотическая оценка для $\omega(x,\lambda)$ при $\lambda \to \infty$:

$$\omega(x,\lambda) \sim -\frac{1}{2-\varepsilon}\lambda^{\frac{\varepsilon}{2-\varepsilon}} e^{x\lambda^{\frac{1}{2-\varepsilon}}} + o\Big(\lambda^{\frac{\varepsilon}{2-\varepsilon}} e^{x\lambda^{\frac{1}{2-\varepsilon}}}\Big) + o\Big(\frac{1}{\lambda}\Big), \quad |\lambda| > R_0.$$

Допустим противное, т.е. ССПФ не полна в $L^1[0,1]$. Тогда найдётся функция $f \in L^\infty \backslash \{0\}$, для которой

$$\int\limits_0^1 D_\lambda^j \omega(x,\lambda_n) f(x)\,dx = 0, \qquad D_\lambda^j \omega(x,\lambda_n) = \Big[\frac{\partial^j}{\partial\lambda^j}\omega(x,\lambda)\Big]\Big|_{\lambda=\lambda_n},$$

$$j \in \{0,1,\dots p_n - 1\},$$

где $\lambda_n \in \sigma(L)$, p_n — кратность корня λ_n как нуля характеристической функции $\chi(\lambda)$ вида (7). Введём функцию

$$\tilde F(\lambda) = \int\limits_0^1 \omega(x,\lambda) f(x)\,dx.$$

Очевидно, что $\tilde F(\lambda)$ —целая функция. Кроме того, каждое собственное значение λ_0 задачи (1)–(3) кратности p является нулём функции $\tilde F(\lambda)$ порядка не ниже p. Следовательно, функция

$$F(\lambda) = \frac{\tilde F(\lambda)}{\chi(\lambda)} \qquad (9)$$

является целой. Чтобы доказать, что $F(\lambda) \equiv 0$, оценим её рост на мнимой оси. Для этого оценим отдельно рост функций $\tilde F(\lambda)$ и $\chi(\lambda)$.

$$\big|\tilde F(it)\big| \leqslant \frac{C_1 |t|^{\frac{\varepsilon-1}{2-\varepsilon}}}{(2-\varepsilon)\cos\frac{\pi}{4-2\varepsilon}} \Big(e^{|t|^{\frac{1}{2-\varepsilon}}\cos\frac{\pi}{4-2\varepsilon}} - 1\Big), \qquad (10)$$

где C_1 — некоторая константа. С помощью (5) и (6) получаем асимптотическую оценку характеристической функции (7):

$$\chi(\lambda) = (ha_{22} - a_{21}) + \frac{1}{2-\varepsilon}\big(ha_{23}\lambda^{-\frac{1}{2-\varepsilon}} + (ha_{24} - a_{23}) - a_{24}\lambda^{\frac{1}{2-\varepsilon}}\big)e^{\lambda^{\frac{1}{2-\varepsilon}}} - \Big(\frac{ha_{23}}{\Gamma(\varepsilon)} - \frac{ha_{24} - a_{23}}{\Gamma(\varepsilon - 1)}\Big)\frac{1}{\lambda} + O\Big(\frac{1}{|\lambda|^2}\Big).$$

Поскольку $\frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{4-2\varepsilon} < \frac{\pi}{2}$, то $\cos\frac{\pi}{4-2\varepsilon} > 0$. Тогда $Re(\lambda^{\frac{1}{2-\varepsilon}}) > 0$ и

$$\chi(\lambda) \sim \frac{-a_{24}}{2-\varepsilon}\lambda^{\frac{1}{2-\varepsilon}}e^{\lambda^{\frac{1}{2-\varepsilon}}}, \qquad \lambda = iy, \quad y \to \infty. \tag{11}$$

Из (9), (10) и (11) получаем

$$|F(\lambda)| \leqslant \frac{C_1\big(e^{|t|^{\frac{1}{2-\varepsilon}}\cos\frac{\pi}{4-2\varepsilon}} - 1\big)|t|^{-1}}{\cos\frac{\pi}{4-2\varepsilon}(-a_{24})e^{|t|^{\frac{1}{2-\varepsilon}}\cos\frac{\pi}{4-2\varepsilon}}} = \frac{C_2}{|t|} - \frac{C_2}{|t|e^{|t|^{\frac{1}{2-\varepsilon}}\cos\frac{\pi}{4-2\varepsilon}}} \to 0, \quad |t| \to +\infty.$$

Из теоремы Фрагмена–Линделёфа и теоремы Лиувилля следует, что $F(\lambda) \equiv 0$. Следовательно, $\tilde{F}(\lambda) \equiv 0$. Но это означает, что $f(x)$ “ортогональна” $\omega(x,\lambda)$ при всех λ, т. е.

$$\begin{aligned}
0 &= \int_0^1 \omega(x,\lambda)f(x)\,dx = \int_0^1 ((I+K)\omega_0(x,\lambda))\,f(x)\,dx \\
&= \int_0^1 \Bigg(\omega_0(x,\lambda) + \int_0^x K(x,t)\omega_0(t,\lambda)\,dt\Bigg)f(x)\,dx \\
&= \int_0^1 \omega_0(x,\lambda)f(x)\,dx + \int_0^1 f(x)\,dx\int_0^x K(x,t)\omega_0(t,\lambda)\,dt \\
&= \int_0^1 \omega_0(x,\lambda)\Bigg(f(x) + \int_x^1 K(t,x)f(t)\,dt\Bigg)dx \\
&= \int_0^1 \omega_0(x,\lambda)((I+K^*)f(x))\,dx.
\end{aligned} \tag{12}$$

Так как система $\{\omega_0(x,\lambda)\}_{\lambda\in\mathbb{C}}$ полна в $L^1[0,1]$ (см. [2]), то из (12) следует равенство $(I+K^*)f(x) = 0$. Так как оператор K — вольтерров, то K^* — тоже вольтерров и $I+K^*$ обратим. Следовательно, $f(x) = 0$ для п.в. $x \in [0,1]$. Полученное противоречие доказывает полноту ССПФ задачи (1)–(3). □

Замечание. (i) Теорема остается верной и в пространстве $L^p(0,1)$ при условии, что решения $c(x,\lambda)$ и $s(x,\lambda)$ принадлежат $L^p(0,1)$, т. е. при $p < \frac{1}{\varepsilon}$.

(ii) При $h = \infty$ граничное условие (2) принимает вид

$$y^{(1-\varepsilon)}(0,\lambda) = 0.$$

В этом случае оба решения $c(x,\lambda)$ и $s(x,\lambda)$ принадлежат $L^p(0,1)$ при всех $p \in [1,\infty)$. Поэтому теорема (вместе с доказательством) остается верной для всех пространств $L^p(0,1)$, $p \in [1,\infty)$.

Литература

[1] А. В. Агибалова, Л. Л. Оридорога, *О полноте систем собственных и присоединённых функций дифференциальных операторов порядка* $2-\varepsilon$ // Доповіді НАН України, (2004), N 9, 7–12.

[2] М. М. Джарбашян, *Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области.* М.: Наука, 1966, 671 с.

[3] М. М. Маламуд, *Подобие вольтерровых операторов и смежные вопросы теории дифференциальных уравнений дробных порядков* // Труды Мос. Мат. общества, **55** (1994), 73–148.

[4] M. M. Malamud, L. L. Oridoroga, *Analog of the Birkhoff theorem and the completeness results for fractional order differential equations* // Russian Jour. of Math. Physics, **8** (2001), N 3, 287–308.

[5] В. А. Марченко, *Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения.* Киев, “Наукова думка”, 1977, 332 с.

[6] А. А. Шкаликов, *О полноте собственных и присоединённых функций обыкновенного дифференциального оператора с распадающимися краевыми условиями* // Функциональный анализ и его приложения. **10** (1976), N 4, 69–80.

Сведения об авторах

Анна Владимировна Агибалова

Донецкий национальный университет
ул. Университетская 24,
83055, Донецк,
Украина
E-Mail: `AgAnnette@rambler.ru`