Український математичний вісник
Том 4 **(2007)**, № 1, 57 – 78

Стохастические уравнения с локальным временем и обобщенные диффузионные процессы

Сергей Я. Махно

Аннотация. Рассматриваются решения стохастических уравнений, содержащих локальное время неизвестного процесса и доказывается, что их решения являются обобщенными диффузионными процессами в смысле Портенко. Вычисляются обобщенные диффузионные коэффициенты. Получено вероятностное представление решения задачи сопряжения для линейных параболических уравнений второго порядка как функционалов от решения стохастического уравнения с локальным временем.

2000 MSC. 60H10, 60F17.

Ключевые слова и фразы. Локальное время, обобщенный диффузионный процесс.

1. Введение

В статье рассматриваются одномерные стохастические уравнения вида

$$\xi(t) = x + \beta L^{\xi}(t,0) + \int_0^t b(\xi(s))\,ds + \int_0^t \sigma(\xi(s))\,dw(s), \tag{1.1}$$

где $L^{\xi}(t,0)$ — симметричное локальное время процесса $\xi(t)$ в точке 0, $w(t)$ — стандартный винеровский процесс. Уравнения вида (1.1) рассматривались в работах Walsh [15], Harrison, Shepp [4], Stroock, Yor [14], Le Gall [3], Engelbert, Schmidt [2] (в этой работе имеется детальная библиография). В работе [4] показано, что если $|\beta| > 1$, то уравнение (1.1), вообще говоря, решения не имеет. Мы будем предполагать, что $|\beta| < 1$. Случай $|\beta| = 1$ соответствует наличию отражающего барьера в начале координат и здесь рассматриваться не будет,

Статья поступила в редакцию 6.12.2006

ISSN 1810 – 3200.

т.к. это требует других методов исследования. Решение уравнения (1.1) для коэффициентов $b(x) = 0$, $\sigma(x) = 1$ известно как косое броуновское движение и оно может быть получено как слабый предел решений уравнений Ито

$$x_n(t) = x + n \int_0^t b(nx_n(s))\, ds + w(t),$$

при $n \to \infty$, если предположить, что $b = \int_{-\infty}^{\infty} b(x)\, dx \neq 0$ [11, теоремы 1, 3], [3, следствие 3.3]. В этом случае $\beta = \operatorname{th} b$.

Простые вычисления показывают, что косое броуновское движение не является диффузионным процессом в смысле классического определения Колмогорова. С другой стороны, Н. Портенко, рассматривая класс случайных процессов, которые он назвал обобщенными диффузионными процессами, доказал [9, теорема 3.4], что процесс, предельный для определенных выше процессов $x_n(t)$, принадлежит введенному им классу. Там же было установлено, что такие процессы могут быть описаны как решения стохастических уравнений, содержащих дельта функцию Дирака в коэффициенте сноса [9, следствие теоремы 3.5]. Интуитивно ясно, что такой коэффициент сноса играет туже роль, что и локальное время в косом броуновском движении.

Далее, при сделанных в статье предположениях, решение уравнения (1.1) существует (в слабом смысле), единственно (в слабом смысле) и является непрерывным марковским процессом [2, теорема 4.35 и следствие 4.38]. Таким образом, во-первых, существует связь между решениями уравнений типа (1.1) и обобщенными диффузионными процессами и, во-вторых, свойства решений таких уравнений не могут быть получены из свойств решений уравнений Ито.

В статье доказывается, что решения уравнений (1.1) являются обобщенными диффузионными процессами в смысле Портенко. Подчеркнем, что в [9] для построения обобщенных диффузионных процессов использовались аналитические методы и от коэффициентов уравнения требовалась их гельдеровость. Здесь мы устанавливаем существование обобщенных диффузионных процессов лишь при измеримых коэффициентах. Как следствие получаем, что решения одномерных стохастических уравнений Ито с измеримыми коэффициентами также являются обобщенными диффузионными процессами в смысле Портенко.

Работа построена по следующему плану. В параграфе 2 вводятся обозначения и даются определения. В параграфе 3 устанавливается связь между решениями уравнения (1.1) и решениями уравнения Ито. Предельным теоремам для локального времени процессов Ито посвящен параграф 4. Результаты этого параграфа представляют интерес сами по себе и будут использованы для исследования обобщенных диффузионных процессов. В параграфе 5 доказывается, что решение уравнения (1.1) есть обобщенный диффузионный процесс. С помощью этих результатов в параграфе 6 получено вероятностное представление решения задачи сопряжения для одномерных параболических уравнений с измеримыми коэффициентами.

2. Определения и обозначения

Всюду в этой статье R — действительная прямая, $\mathcal{B}(\mathcal{R})$ σ-алгебра борелевских множеств, $\overline{R} = R \cup \{-\infty\} \cup \{\infty\}$ и

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & \text{для} \quad x > 0, \\ 0, & \text{для} \quad x = 0, \\ -1, & \text{для} \quad x < 0. \end{cases}$$

Мы будем говорить, что пара функций $(f, g) \in \mathcal{L}(\Lambda, \lambda)$, если функции $f(x)$ и $g(x)$ измеримы и существуют постоянные $\Lambda, \lambda > 0$ такие, что

$$|f(x)| + |g(x)| \leq \Lambda, \qquad g^2(x) \geq \lambda.$$

Обозначим $a(x) = \sigma^2(x)$ и введем условие (I) для коэффициентов уравнения (1.1).

Условие (I)**:**

I_1. Функции $(b, \sigma) \in \mathcal{L}(\Lambda, \lambda)$.

I_2. Постоянная $|\beta| < 1$.

I_3. Существует правый $\sigma(0+)$ и левый $\sigma(0-)$ пределы.

Обозначим через $Df(x)$ симметричную производную функции $f(x)$, т.е

$$Df(x) = \lim_{h \downarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}.$$

Если для функции $f(x)$ и произвольной бесконечно дифференцируемой финитной функции $H(x)$ выполняется равенство

$$\int \frac{d^2 H(x)}{dx^2} f(x)\, dx = \int H(x) n_f(dx),$$

где $n_f(dx)$ — мера на $(R, \mathcal{B}(R))$, то $n_f(dx)$ называется второй производной от функции $f(x)$ в смысле распределений. Будем использовать стандартные понятия теории стохастических интегралов [8]. Пусть $X(t)$ — непрерывный семимартингал, имеющий каноническое представление $X(t) = X(0) + M(t) + A(t)$, где M — непрерывный локальный мартингал, A — непрерывный процесс ограниченной вариации. Симметричное локальное время процесса $X(t)$ в точке a определяется формулой Танака

$$L^X(t,a) = |X(t) - a| - |X(0) - a| - \int\limits_0^t \operatorname{sgn}(X(s) - a)\, dX(s). \quad (2.1)$$

Для функции $f(x)$, являющейся разностью двух выпуклых функций, верна обобщенная формула Ито

$$f(X(t)) = f(X(0)) + \int\limits_0^t Df(X(s))\, dX(s) + \frac{1}{2}\int L^X(t,y) n_f(dy). \quad (2.2)$$

Отметим, что для произвольной измеримой функции $g(x)$

$$\int\limits_0^t g(X(s))\, d\langle M\rangle_s = \int g(y) L^X(t,y)\, dy, \quad (2.3)$$

если один из интегралов имеет смысл. Здесь $\langle M\rangle$ непрерывный возрастающий процесс, ассоциированный с локальным мартингалом M. В [16] показано, что существует непрерывная по (t,a) модификация процесса $L^X(t,a)$, если и только если

$$\int\limits_R I_{\{a\}}(X(s))\, dA(s) = 0 \quad \text{п.в.}, \quad (2.4)$$

где $I_{\mathcal{M}}(x)$ — индикатор множества $\mathcal{M}$. Будем использовать следующие обозначения: $B_0(R)$ — пространство измеримых ограниченных функций с компактным носителем на R, $C_0(R)$ — подпространство всех непрерывных функций из $B_0(R)$, $C(\mathcal{G},\mathcal{F})$ — пространство непрерывных функций, определенных на множестве $\mathcal{G}$ и принимающие значения в множестве $\mathcal{F}$. Обозначения L_p, $W_p^{1,2}$ (соболевское пространство) и $W_{p,\mathrm{loc}}^{1,2}$ имеют хорошо известный смысл [7], $\|\cdot\|$ с индексами — норма в соответствующем пространстве. Символ E будет обозначать математическое ожидание случайных величин и процессов. Для марковских процессов используется обычная для этой теории символика (см., например, [2, 5, 9]) $E_{t,x}\xi$, $E_x\xi = E_{0,x}\xi$. Через C будут обозначаться различные постоянные.

3. Стохастические уравнения

Следуя [2], дадим определение слабого решения стохастического уравнения (1.1).

Определение 3.1. *Непрерывный* $(\overline{R}, \mathcal{B}(\overline{\mathcal{R}}))$ *— значный процесс* $\xi(t)$, *определенный на вероятностном пространстве* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P_x)$, $x \in R$ *с потоком* σ*-алгебр* $\mathcal{F}_t$, $t \geq 0$, *называется слабым решением уравнения* (1.1), *если выполнены следующие условия:*

i) $P\{\xi(0) = x\} = 1, x \in R$;

ii) $\xi(t) = \xi(t \wedge \theta)$ *для всех* t, $\theta = \inf\{t \geq 0; \xi(t) \in R\}$;

iii) $(\xi(t), \mathcal{F}_t)$ *— семимартингал до момента времени* θ;

iv) Существует винеровский процесс $(w(t), \mathcal{F}_t)$ *такой, что* (1.1) *справедливо для* $t < \theta$ *п.в.*

Определение 3.2. *Решение уравнения* (1.1) *единственно (в смысле распределений), если для любых двух решений* $(\xi^i(t), \mathcal{F}_t^i)$, $i = 1, 2$, *определенных на вероятностных пространствах* $(\Omega^i, \mathcal{F}^i, \mathcal{F}_t^i, P_x^i)$, $x \in R$, $i = 1, 2$, *соответствующие меры* Q_x^1 *и* Q_x^2 *совпадают на пространстве* $C([0, \infty), \overline{R})$.

По теореме 4.35 [2] при выполнении условий I_1 и I_2 уравнение (1.1) имеет единственное слабое решение и оно является непрерывным строго марковским процессом [2, следствие 4.38]. Установим связь между решением уравнения (1.1) и решением уравнения Ито. Введем следующие функции:

$$\psi(x) = \begin{cases} (1-\beta)x, & \text{если } x \leq 0, \\ (1+\beta)x, & \text{если } x \geq 0. \end{cases}$$

$$\phi(x) = \begin{cases} (1-\beta)^{-1}x, & \text{если } x \leq 0, \\ (1+\beta)^{-1}x, & \text{если } x \geq 0. \end{cases}$$

Положим

$$\tilde{b}(x) = \frac{b(\psi(x))}{1 + \beta \operatorname{sgn} x}, \quad \tilde{\sigma}(x) = \frac{\sigma(\psi(x))}{1 + \beta \operatorname{sgn} x}, \quad \tilde{a}(x) = \tilde{\sigma}^2(x)$$

и рассмотрим стохастическое уравнение

$$\eta(t) = \phi(x) + \int_0^t \tilde{b}(\eta(s))\, ds + \int_0^t \tilde{\sigma}(\eta(s))\, dw(s). \tag{3.1}$$

При условиях I_1, I_2 уравнение (3.1) имеет единственное слабое решение. Это решение есть строго марковский процесс. Это утверждение можно извлечь из упоминавшейся выше теоремы 4.35 и следствия 4.38 [2], если коэффициент при локальном времени равен нулю.

Теорема 3.1. *Пусть условия I_1, I_2 выполнены. Тогда $\psi(\eta(t))$ есть единственное решение уравнения* (1.1).

Доказательство. Обозначим $\xi(t) = \psi(\eta(t))$. Для функции $\psi(x)$ мера $n_\psi(dx) = 2\beta\delta_0(x)\,dx$, где $\delta_0(x)$ — δ-функция Дирака в точке 0 и $D\psi(x) = 1 + \beta \operatorname{sgn} x$. По формуле (2.2) получим

$$\xi(t) = \xi(0) + \beta L^\eta(t,0) + \int_0^t b(\xi(s))\,ds + \int_0^t \sigma(\xi(s))\,dw(s). \tag{3.2}$$

Осталось доказать, что

$$L^\eta(t,0) = L^\xi(t,0). \tag{3.3}$$

Из (2.1) и (3.2):

$$L^\xi(t,0) = |\xi(t)| - |x| - \int_0^t \operatorname{sgn}\xi(s)(1+\beta\operatorname{sgn}\eta(s))\,d\eta(s) \\ - \beta\int_0^t \operatorname{sgn}\xi(s) L^\eta(ds,0). \tag{3.4}$$

Т.к. $\operatorname{sgn}\xi(s) = \operatorname{sgn}\eta(s)$ и $L^\eta(\cdot,0)$ возрастает только на множестве $\{s : \eta(s) = 0\}$, последнее выражение в (3.4) равно 0. Обозначим $\psi_1(x) = |\psi(x)|$. Тогда $D\psi_1(x) = \beta + \operatorname{sgn} x$ и $n_{\psi_1}(dx) = 2\delta_0(x)dx$. Применяя формулу (2.2) к функции $\psi_1(x)$ и процессу $\eta(t)$, получим

$$|\xi(t)| = |x| + L^\eta(t,0) + \int_0^t (\beta + \operatorname{sgn}\eta(s))\,d\eta(s). \tag{3.5}$$

В силу (3.4) и (3.5):

$$L^\xi(t,0) = L^\eta(t,0) + \beta\int_0^t I_{\{0\}}(\eta(s))\,d\eta(s). \tag{3.6}$$

Применим хорошо известный результат [10, с. 217], тогда

$$\int_0^t I_{\{0\}}(\eta(s))\,d\eta(s) = \int_0^t I_{\{0\}}(\eta(s))\tilde{b}(\eta(s))\,ds$$

$$= \int_R I_{\{0\}}(y)\frac{\tilde{b}(y)}{\tilde{a}(y)}L^{\eta}(t,y)\,dy = 0.$$

Поэтому интеграл в (3.6) равен 0. Равенство (3.3) и теорема доказаны.
□

4. Локальные времена решений стохастических уравнений

В этом параграфе рассматриваются свойства локальных времен решений стохастический уравнений Ито. Основной результат параграфа — теорема 4.1.

Пусть $X(t)$ — решение стохастического уравнения Ито

$$X(t) = x + \int_0^t \alpha(X(s))\,ds + \int_0^t \gamma(X(s))\,dw(s). \tag{4.1}$$

Заметим, что при условии $(\alpha,\gamma) \in \mathcal{L}(\Lambda,\lambda)$, существует непрерывная по (t,a) модификация процесса $L^X(t,a)$. Действительно, из (4.1), (2.3) имеем,

$$\int_0^t I_{\{a\}}(X(s))\alpha(X(s))\,ds = \int_R I_{\{a\}}(y)\frac{\alpha(y)}{\gamma^2(y)}L^X(t,y)\,dy = 0,$$

и (2.4) справедливо. Всюду в дальнейшем рассматривается такая модификация. Положим $\gamma_1 = |\gamma(0-)|$, $\gamma_2 = |\gamma(0+)|$, $\sigma_1 = |\sigma(0-)|$ и $\sigma_2 = |\sigma(0+)|$.

Теорема 4.1. *Пусть функции $(\alpha,\gamma) \in \mathcal{L}(\Lambda,\lambda)$ и γ_1,γ_2 существуют. Тогда для любой $\chi(x) \in B_0(R)$, имеющей пределы $\chi(0+)$ and $\chi(0-)$, справедливо равенство*

$$\lim_{t\downarrow 0}\frac{1}{t}\int_R \chi(x)E_xL^X(t,0)\,dx = \frac{\gamma_1\gamma_2}{\gamma_1+\gamma_2}\bigl(\gamma_1\chi(0-)+\gamma_2\chi(0+)\bigr). \tag{4.2}$$

Следствие 4.1. *Пусть условие (I) выполнено и $\xi(t) = \psi(\eta(t))$. Тогда для любой функции $\chi(x) \in B_0(R)$ такой, что $\chi(0+)$ и $\chi(0-)$ существуют, имеем*

$$\lim_{t\downarrow 0}\frac{1}{t}\int\limits_R \chi(x)E_x L^{\xi}(t,0)\,dx$$
$$=\frac{\sigma_1\sigma_2}{(1+\beta)\sigma_1+(1-\beta)\sigma_2}\big(\sigma_1\chi(0-)+\sigma_2\chi(0+)\big). \quad (4.3)$$

Доказательство. В силу теоремы 4.1 при сделанных предположениях

$$\lim_{t\downarrow 0}\frac{1}{t}\int\limits_R \chi(x)E_x L^{\eta}(t,0)\,dx$$
$$=\frac{\sigma_1\sigma_2}{(1+\beta)\sigma_1+(1-\beta)\sigma_2}\Big(\frac{\sigma_1}{1-\beta}\chi(0-)+\frac{\sigma_2}{1+\beta}\chi(0+)\Big). \quad (4.4)$$

Далее, согласно теореме 3.1,

$$\int\limits_R \chi(x)E_x L^{\xi}(t,0)\,dx=\int\limits_R \chi(x)E_{\phi(x)}L^{\eta}(t,0)\,dx=$$
$$=\int\limits_R \chi(\psi(x))(1+\beta\,\mathrm{sgn}\,x)E_x L^{\eta}(t,0)\,dx.$$

Отсюда и (4.4) мы получаем (4.3). Следствие доказано. □

Сначала мы докажем вспомогательные утверждения, необходимые для доказательства теоремы 4.1. Обозначим

$$F(x)=\int\limits_0^x \exp\bigg\{-2\int\limits_0^y \frac{\alpha(z)}{\gamma^2(z)}\,dz\bigg\}\,dy.$$

Определим процесс $Y(t)=F(X(t))$. По формуле Ито

$$Y(t)=Y(0)+\int\limits_0^t \gamma(X(s))DF(X(s))\,dw(s). \quad (4.5)$$

Как видно из определения, $F(x)$ является непрерывной возрастающей функцией, поэтому существует обратная к ней возрастающая непрерывная функция и она будет обозначаться $\Phi(x)$. Далее положим $r(x)=\gamma(\Phi(x))DF(\Phi(x))$, $x\in[F(-\infty),F(+\infty)]$. Тогда, согласно (4.5)

$$Y(t)=Y(0)+\int\limits_0^t r(Y(s))\,dw(s). \quad (4.6)$$

Лемма 4.1. *Для всех* t, y $L^X(t,y) = (DF(y))^{-1}L^Y(t,F(y))$ *п.в.*

Доказательство. Согласно (2.3), для любой функции $g(x)$:

$$\int_R g(y)L^X(t,y)\,dy = \int_0^t g(X(s))\gamma^2(X(s))\,ds$$
$$= \int_0^t g(\Phi(Y(s))(DF(\Phi(Y(s)))^{-2} \times r^2(Y(s))\,ds$$
$$= \int_{F(-\infty)}^{F(+\infty)} g(\Phi(y))(DF(\Phi(y))^{-2}L^Y(t,y)\,dy$$
$$= \int_R g(y)(DF(y))^{-1}L^Y(t,F(y))\,dy.$$

Используя непрерывность локального времени по y, получаем утверждение леммы. Лемма доказана. □

Пусть процесс $Z(t)$ есть решение стохастического уравнения Ито

$$Z(t) = x + \int_0^t \gamma(Z(s))\,dw(s). \tag{4.7}$$

Для этого процесса справедлива оценка [5, следствие 2.5.12],

$$E_x \sup_{t\le T}|Z(t)|^2 \le C(T)(1+|x|^2), \tag{4.8}$$

с некоторой постоянной $C(T)$.

Лемма 4.2. *Пусть функция* $u(t,x) \in W^{1,2}_{2,loc}$ *является единственным решением задачи Коши*

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \frac{1}{2}\gamma^2(x)\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}, \qquad t\in[0,T],\ x\in R, \\ &u(0,x) = |x|. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Тогда существует постоянная $C(T)$ *такая, что* $|u(t,x)| \le C(T)(1+|x|)$.

Доказательство. Пусть $\rho(x)$ положительная бесконечно дифференцируемая функция такая,что $\rho(x) = 1$, если $|x| \le N$ и $\rho(x) = 0$, если $|x| > N+1$. Обозначим $\rho_N(x) = \rho(x)|x|$. Определим функцию $u_N(t,x)$ как решение задачи Коши

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u_N(t,x)}{\partial t} = \frac{1}{2}\gamma^2(x)\frac{\partial^2 u_N(t,x)}{\partial x^2}, \qquad t \in [0,T],\ x \in R, \\ &u_N(0,x) = \rho_N(x). \end{aligned} \tag{4.10}$$

Согласно [7, гл. 4], задача (4.10) имеет единственное решение $u_N(t,x) \in W_2^{1,2}$. Это решение допускает вероятностное представление [5, теорема 2.10.1] $u_N(t,x) = E_x\rho_N(Z(t))$. Используя (4.8), нетрудно показать, что

$$|u_N(t,x)| \le E_x|Z(t)| \le C(T)(1+|x|).$$

Т.к. для $|x| \le N$ $u(t,x) = u_N(t,x)$, отсюда следует утверждение леммы. Лемма доказана. □

Этот результат используется в следующей лемме.

Лемма 4.3. *Функция $u(t,x) = E_x|Z(t)| \in W_{2,loc}^{1,2}$ является единственным решением задачи Коши*

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \frac{1}{2}\gamma^2(x)\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}, \qquad t \in [0,T],\ x \in R, \\ &u(0,x) = |x|. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Доказательство. Т.к. функция $|x| \in W_{2,\mathrm{loc}}^1$, то в силу [1, лемма 2] задача (4.11) имеет единственное решение $u(t,x)$ в $W_{2,\mathrm{loc}}^{1,2}$. Для функций из этого класса справедлива формула Ито [5, теорема 2.10.1]. Положим $v(t,x) = u(T-t,x)$ и $\tau_N = \inf\{t : |Z(t)| = N\}$. По формуле Ито

$$E_{t,x}v(T\wedge\tau_N, Z(T\wedge\tau_N)) = v(t,x). \tag{4.12}$$

Очевидно, что τ_N монотонно возрастают при $N \to \infty$. Далее, из (4.8) имеем с некоторой постоянной k:

$$P\{\tau_N \ge k\} \le P\Big\{\sup_{t\in[0,T]}|Z(t)| \ge k\Big\} \le \frac{\mathrm{const}}{k^2}.$$

Следовательно,

$$\sum_{k=1}^{\infty} P\{\tau_N \ge k\} < \infty$$

и, значит, $P\{\lim_{N\to\infty}\tau_N = \infty\} = 1$. Из оценки леммы 4.2 и (4.8), следует, что случайная величина $v(T\wedge\tau_N, Z(T\wedge\tau_N))$ равномерно интегрируема. Переходя к пределу в (4.12) при $N\to\infty$, получим

$$v(t,x) = E_{t,x}|Z(T)| = E_x|Z(T-t)|.$$

Лемма доказана. $\square$

Положим

$$H(x) = \begin{cases} H_1, & \text{если } x<0,\\ H_2, & \text{если } x\ge 0.\end{cases}$$

для некоторых постоянных H_1 и H_2. Нетрудно вычислить, что

$$\lim_{t\downarrow 0}\frac{1}{t}\int_0^t\int_R \chi(x)\frac{1}{\sqrt{2\pi s}}\exp\Big\{-\frac{(x-y)^2}{2sH^2(x)}\Big\}\,dx\,ds = \frac{1}{2}\big(|H(y-)|\chi(y-)+|H(y+)|\chi(y+)\big) \quad (4.13)$$

для любой измеримой ограниченной функции $\chi(x)$, имеющей указанные пределы. Для функции $\gamma(x)$ из (4.1) определим $\hat\gamma(x)$:

$$\hat\gamma(x) = \begin{cases}\gamma(0-), & \text{если } x<0,\\ \gamma(0+), & \text{если } x\ge 0\end{cases}$$

и рассмотрим случайный процесс $\hat Z(t)$ как решение уравнения

$$\hat Z(t) = x + \int_0^t \hat\gamma(\hat Z(s))\,dw(s). \quad (4.14)$$

Обозначим $q_1 = \gamma_1(\gamma_1+\gamma_2)^{-1}$, $q_2 = \gamma_2(\gamma_1+\gamma_2)^{-1}$ и введем функцию $\hat p(t,x,y)$:

$$\hat p(t,x,y) = \begin{cases} \frac{2q_1}{\sqrt{2\pi t\gamma_2^2}}\exp\big\{-\frac{1}{2t}\big(\frac{y}{\gamma_2}-\frac{x}{\gamma_1}\big)^2\big\}, & x\le 0,\ y>0;\\ \frac{1}{\sqrt{2\pi t\gamma_1^2}}\big[\exp\big\{-\frac{1}{2t}(\frac{y-x}{\gamma_1})^2\big\} \\ \qquad +(q_2-q_1)\exp\big\{-\frac{1}{2t}(\frac{y+x}{\gamma_1})^2\big\}\big], & x\le 0,\ y<0;\\ \frac{1}{\sqrt{2\pi t\gamma_2^2}}\big[\exp\big\{-\frac{1}{2t}(\frac{y-x}{\gamma_2})^2\big\} \\ \qquad +(q_1-q_2)\exp\big\{-\frac{1}{2t}(\frac{y+x}{\gamma_2})^2\big\}\big], & x\ge 0,\ y>0;\\ \frac{2q_2}{\sqrt{2\pi t\gamma_1^2}}\exp\big\{-\frac{1}{2t}\big(\frac{y}{\gamma_1}-\frac{x}{\gamma_2}\big)^2\big\}, & x\ge 0,\ y<0.\end{cases}$$

Заметим, что функция $\hat p(t,x,y)$ есть плотность процесса $\hat Z(t)$ по отношению к лебеговой мере [6].

Лемма 4.4. *Для произвольной функции* $\chi(x) \in B_0(R)$

$$\lim_{t\downarrow 0} \frac{1}{t} \int\limits_R \chi(x)\big[E_x L^Z(t,0) - E_x L^{\hat{Z}}(t,0)\big]\,dx = 0. \tag{4.15}$$

Доказательство. В силу определения локального времени равенство (4.15) эквивалентно следующему

$$\lim_{t\downarrow 0} \frac{1}{t} \int\limits_R \chi(x)\big[E_x|Z(t)| - E_x|\hat{Z}(t)|\big]\,dx = 0. \tag{4.16}$$

Пусть $u(t,x) = E_x|Z(t)|$, $\hat{u}(t,x) = E_x|\hat{Z}(t)|$ и $v(t,x) = u(t,x) - \hat{u}(t,x)$. Согласно лемме 4.3, функция $v(t,x)$ является решением задачи Коши

$$\begin{aligned} &\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{2}\gamma^2(x)\frac{\partial^2 v(t,x)}{\partial x^2} + G(t,x)\\ &v(0,x) = 0. \end{aligned} \tag{4.17}$$

Здесь

$$G(t,x) = \frac{1}{2}(\gamma^2(x) - \hat{\gamma}^2(x))\frac{\partial^2 \hat{u}(t,x)}{\partial x^2}, \qquad t \in [0,T],\ x \in R.$$

Далее,

$$\hat{u}(t,x) = \int\limits_R |y|\,\hat{p}(t,x,y)\,dy.$$

Вычисления дают следующий результат:

$$\frac{\partial^2 \hat{u}(t,x)}{\partial x^2} = \frac{2(q_1\gamma_2 + q_2\gamma_1)}{\hat{\gamma}^2(x)\sqrt{2\pi t}} \exp\Big\{-\frac{x^2}{2t\hat{\gamma}^2(x)}\Big\}.$$

Поэтому функция $G(t,x) \in L_2([0,T]\times R)$ и решение задачи (4.17) допускает вероятностное представление [5, теорема 2.10.1]

$$v(t,x) = E_x \int\limits_0^t G(s, Z(s))\,ds. \tag{4.18}$$

Известно, что процесс $Z(t)$ имеет плотность распределения $p(t,x,y)$ и в силу [12, лемма 2], справедливо следующее неравенство

$$p(t,x,y) < \frac{C}{\sqrt{t}} \exp\Big\{-\frac{(x-y)^2}{Ct}\Big\}. \tag{4.19}$$

Теперь из (4.18) получим

$$\int\limits_R \chi(x)v(t,x)\,dx = \int\limits_0^t \int\limits_R G(s,y) \int\limits_R \big[\chi(x)p(s,x,y)\,dx\big]\,dy\,ds. \tag{4.20}$$

Используя оценку (4.19), мы видим, что выражение в квадратных скобках в (4.20) равномерно ограничено. Отсюда следует неравенство

$$\Big|\int\limits_R \chi(x)v(t,x)\,dx\Big| \le C \int\limits_0^t \int\limits_R \big|G(s,y)\big|\,dy\,ds. \tag{4.21}$$

Из (4.21) и (4.13) получаем (4.16). Лемма доказана. □

Доказательство теоремы 4.1. Т.к. $\Phi(x)$ непрерывная монотонно возрастающая функция и $\Phi(0)=0$, а по условию теоремы $\gamma(0-)$ и $\gamma(0+)$ существуют, то $r(0-)=\gamma(0-)$ и $\gamma(0+)=\gamma(0+)$. Из лемм 4.1 и 4.4, заключаем

$$\lim_{t\downarrow 0} \frac{1}{t} \int\limits_R \chi(x)\big[E_x L^X(t,0) - E_x L^{\hat Z}(t,0)\big]\,dx = 0. \tag{4.22}$$

В силу (2.3), имеем для некоторой функции $g_h(y)$

$$\int\limits_R g_h(y) E_x L^{\hat Z}(t,y)\,dy = E_x \int\limits_0^t g_h(\hat Z(s))\hat\gamma^2(\hat Z(s))\,ds$$

$$= \int\limits_0^t \int\limits_R g_h(y)\hat\gamma^2(y)\hat p(s,x,y)\,dy\,ds. \tag{4.23}$$

Положим в (4.23)

$$g_h(y) = \frac{1}{h}\int\limits_0^h \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} \exp\Big\{-\frac{y^2}{2s}\Big\}\,ds.$$

Переходя к пределу в (4.23) при $h \downarrow 0$ и используя (4.13),получаем

$$E_x L^{\hat Z}(t,0) = \frac{1}{2}\int\limits_0^t [\hat p(s,x,0-)\gamma_1^2 + \hat p(s,x,0+)\gamma_2^2]\,ds$$

$$= \frac{2\gamma_1\gamma_2}{\gamma_1+\gamma_2} \int\limits_0^t \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} \exp\Big\{-\frac{x^2}{2s\hat\gamma(x)^2}\Big\}\,ds.$$

Отсюда, (4.22) и (4.13) следует (4.2). Теорема доказана. □

5. Обобщенные диффузионные процессы

Сформулируем определения, данные Н. Портенко [9]. Для однородного марковского процесса с переходной функцией $P(t,x,A)$, $t>0,\ x\in R,\ A\in\mathcal{B}$ определим

$$C_\delta(t,x)=\frac{1}{t}\int\limits_{|y-x|\geq\delta}P(t,x,dy),$$

$$B_\delta(t,x)=\frac{1}{t}\int\limits_{|y-x|\leq\delta}(y-x)P(t,x,dy),$$

$$A_\delta(t,x)=\frac{1}{t}\int\limits_{|y-x|\leq\delta}(y-x)^2P(t,x,dy).$$

Определение 5.1. *Марковский процесс на пространстве R с переходной функцией $P(t,x,A)$ называется обобщенным диффузионным процессом, если для любой функции $\chi(x)\in C_0(R)$ выполнены следующие соотношения:*

1) *для произвольного $\delta>0$*

$$\lim_{t\downarrow 0}\int\limits_R\chi(x)C_\delta(t,x)\,dx=0;$$

2) *для некоторого $\delta>0$ существуют линейные функционалы $B(\chi)$ и $A(\chi)$ такие, что*

$$\lim_{t\downarrow 0}\int\limits_R\chi(x)B_\delta(t,x)\,dx=B(\chi);$$

$$\lim_{t\downarrow 0}\int\limits_R\chi(x)A_\delta(t,x)\,dx=A(\chi).$$

Как и в классическом случае, доказывается, что указанные пределы не зависят от δ, а функционалы $B(\chi),A(\chi)$ называются коэффициентами сноса и диффузии, соответственно. Легко проверяется, что марковский процесс с переходной функцией $P(t,x,A)$ будет обобщенным диффузионным процессом с коэффициентами $B(\chi)$, $A(\chi)$, если для некоторого $r>0$ и для любой функции $\chi(x)\in C_0(R)$ выполняются следующие соотношения:

$$\lim_{t\downarrow 0}\int\limits_R\left[\frac{1}{t}\int\limits_R|y-x|^{2+r}P(t,x,dy)\right]\chi(x)\,dx=0,\tag{5.1}$$

$$\lim_{t\downarrow 0}\int\limits_R\left[\frac{1}{t}\int\limits_R (y-x)P(t,x,dy)\right]\chi(x)\,dx = B(\chi) \tag{5.2}$$

$$\lim_{t\downarrow t}\int\limits_R\left[\frac{1}{t}\int\limits_R (y-x)^2 P(t,x,dy)\right]\chi(x)\,dx = A(\chi). \tag{5.3}$$

Теорема 5.1. *Пусть выполнено условие* (I). *Тогда решение уравнения* (1.1) *есть обобщенный диффузионный процесс и его коэффициенты равны*

$$B(\chi) = \beta\frac{\sigma_1\sigma_2(\sigma_1+\sigma_2)}{(1+\beta)\sigma_1+(1-\beta)\sigma_2}\chi(0) + \int\limits_R \chi(x)b(x)\,dx, \tag{5.4}$$

$$A(\chi) = \int\limits_R \chi(x)a(x)\,dx. \tag{5.5}$$

Доказательству теоремы предпошлем несколько вспомогательных лемм. Ключевой из них является лемма 5.3. Чтобы доказать ее, начнем со следующего утверждения.

Лемма 5.1. *Для процессов* $X(t)$, $Z(t)$ *и произвольной измеримой ограниченной функции* $g(x)$

$$\lim_{t\downarrow 0}\frac{1}{t}\int\limits_0^t \left[E_x g(X(s)) - E_x g(Z(s))\right] ds = 0.$$

Доказательство. Пусть меры μ_X и μ_Z соответствуют процессам $X(t)$ и $Z(t)$ на пространстве $C([0,\infty),R)$. Согласно теореме Гирсанова [8], эти меры эквивалентны. Обозначим через $\lambda(t)$ сужение их плотности на $\mathcal{C}_t$-борелевскую σ-алгебру подмножеств пространства $C([0,\infty),R)$. Функция $\lambda(t)$ удовлетворяет стохастическому уравнению

$$\lambda(t) = 1 + \int\limits_0^t \lambda(s)\frac{\alpha(Z(s))}{\gamma(Z(s))}\,dw(s).$$

Поэтому

$$E_x g(X(t)) = E_x g(Z(t)) + E_x g(Z(t))\int\limits_0^t \lambda(s)\frac{\alpha(Z(s))}{\gamma(Z(s))}\,dw(s)$$

и

$$\left|\frac{1}{t}\int\limits_0^t E_x\big[g(X(s))-g(Z(s))\big]\,ds\right|$$

$$=\left|\frac{1}{t}\int\limits_0^t E_x g(Z(s))\int\limits_0^s \lambda(u)\frac{\alpha(Z(u))}{\gamma(Z(u))}\,dw(u)\,ds\right|$$

$$\le C\frac{1}{t}\int\limits_0^t\left[\int\limits_0^s E_x\lambda^2(u)\frac{\alpha^2(Z(u))}{\gamma^2(Z(u))}\,du\right]^{\frac{1}{2}}ds.$$

Утверждение леммы вытекает из последнего неравенства, т.к. выражение в квадратных скобках есть непрерывная функция аргумента s. Лемма доказана. □

Лемма 5.2. *Пусть процессы* $Z(t)$ *и* $\hat{Z}(t)$ *определяются уравнениями* (4.7) *и* (4.14). *Тогда, если* $\chi(x)\in B_0$, *то*

$$\lim_{t\downarrow 0}\int\limits_R \chi(x)\frac{1}{t}\int\limits_0^t\big[E_x g(Z(s))-E_x g(\hat{Z}(s))\big]\,ds\,dx=0$$

для любой измеримой ограниченной функции $g(x)$.

Доказательство. Обозначим через $l(A)$ лебегову меру множества A из R, $S_N=\{x:|x|\le N\}$, $\overline{S_N}=\{x:|x|>N\}$. Рассмотрим сужение функции $g(x)$ на множество S_N. По теореме Лузина [13] существует последовательность непрерывных функций $g_n(x)$ такая,что $l(x:g_n(x)\ne g(x))\le\frac{1}{n}$ и $|g_n(x)|\le C$. Продолжим функции $g_n(x)$ на все R по непрерывности и эти новые функции вновь обозначим через $g_n(x)$. Легко видеть, что

$$\frac{1}{t}E_x\int\limits_0^t\big[g(Z(s))-g(\hat{Z}(s))\big]\,ds$$

$$=\frac{1}{t}E_x\int\limits_0^t\big[g_n(Z(s))-g_n(\hat{Z}(s))\big]\,ds$$

$$+\frac{1}{t}E_x\int\limits_0^t\big[g(Z(s))-g_n(Z(s))\big]I_{S_N}(Z(s))\,ds$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{1}{t}E_x\int_0^t \big[g_n(\hat Z(s))-g(\hat Z(s))\big]I_{S_N}(\hat Z(s))\,ds\\
&+\frac{1}{t}E_x\int_0^t \big[g(Z(s))-g_n(Z(s))\big]I_{\overline{S}_N}(Z(s))\,ds\\
&+\frac{1}{t}E_x\int_0^t \big[g_n(\hat Z(s))-g(\hat Z(s))\big]I_{\overline{S}_N}(\hat Z(s))\,ds\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad=\sum_{i=1}^5 J_n^i(t,x). \qquad (5.6)
\end{aligned}
$$

Учитывая, что для непрерывной ограниченной функции $f(x)$ и для стохастически непрерывного марковского процесса $\kappa(t)$ функция $E_xf(\kappa(s))$ непрерывна справа по s, имеем

$$
\lim_{t\downarrow 0}\int_R \chi(x)J_n^1(t,x)\,dx=0. \qquad (5.7)
$$

Далее, используя (4.8), получаем

$$
\big|E_x\big[g(Z(s))-g_n(Z(s))\big]I_{\overline{S}_N}(Z(s))\big|\le CP\{|Z(s)|>N\}\le\frac{C(1+|x|^2)}{N^2}.
$$

Последнее означает,что

$$
|J_n^4(t,x)|\le\frac{C(1+|x|^2)}{N^2}. \qquad (5.8)
$$

Совершенно аналогично,

$$
|J_n^5(t,x)|\le\frac{C(1+|x|^2)}{N^2}. \qquad (5.9)
$$

Чтобы оценить J_n^2 и J_n^3, заметим вначале, что для произвольной интегрируемой функции $v(x)$

$$
\lim_{t\downarrow 0}\int_R v(x)\frac{1}{t}\int_0^t\int_A\frac{1}{\sqrt{2\pi\hat\gamma^2(y)s}}\exp\Big\{-\frac{(x-y)^2}{2s\hat\gamma^2(y)}\Big\}\,dy\,ds\,dx=\int_A v(x)\,dx. \qquad (5.10)
$$

Это следует из (4.13). Обозначим $A_n=\{x\in S_N: g(x)\ne g_n(x)\}$ и применим оценку (4.19):

$$\left|\int\limits_R \chi(x) J_n^2(t,x)\,dx\right| = \left|\int\limits_R \chi(x)\frac{1}{t}\int\limits_0^t\int\limits_{A_n}[g(y)-g_n(y)]p(s,x,y)\,dy\,ds\,dx\right|$$

$$\leq 2C\int\limits_R |\chi(x)|\frac{1}{t}\int\limits_0^t\int\limits_{A_n}\frac{1}{\sqrt{C\pi t}}\exp\Big\{-\frac{(x-y)^2}{2Ct}\Big\}\,dy\,ds\,dx.$$

Отсюда и (5.10) следует:

$$\overline{\lim_{t\downarrow 0}}\ \left|\int\limits_R \chi(x) J_n^2(t,x)\,dx\right| \ \leq C\int\limits_{A_n}|\chi(x)|\,dx \leq Cl(A_n). \tag{5.11}$$

Аналогично,

$$\overline{\lim_{t\downarrow 0}}\ \left|\int\limits_R \chi(x) J_n^3(t,x)\,dx\right| \ \leq Cl(A_n). \tag{5.12}$$

Объединяя полученные оценки (5.7)–(5.12), из (5.6) получим неравенство для $\chi(x)\in C_0$

$$\overline{\lim_{t\downarrow 0}}\ \left|\int\limits_R \chi(x)\frac{1}{t}E_x\int\limits_0^t\big[g(Z(s))-g(\hat{Z}(s))\big]\,ds\,dx\right| \leq \frac{C}{N^2}+\frac{C}{n}.$$

Переходя к пределу по $N\to\infty$ и $n\to\infty$ в последнем неравенстве, получим утверждение леммы. Лемма доказана. □

Лемма 5.3. *Для произвольной измеримой ограниченной функции $g(x)$ и для любой $\chi(x)\in C_0(R)$*

$$\lim_{t\downarrow 0}\int\limits_R \chi(x)\frac{1}{t}\int\limits_0^t E_x g(X(s))\,ds\,dx = \int\limits_R \chi(x)g(x)\,dx.$$

Доказательство. Из лемм 5.1 и 5.2 получим

$$\lim_{t\downarrow 0}\int\limits_R \chi(x)\frac{1}{t}\int\limits_0^t E_x g(X(s))\,ds\,dx$$

$$= \lim_{t\downarrow 0}\int\limits_R \chi(x)\frac{1}{t}\int\limits_0^t E_x g(\hat{Z}(s))\,ds\,dx$$

$$= \lim_{t\downarrow 0}\int\limits_R g(y)\frac{1}{t}\int\limits_0^t\int\limits_R \chi(x)\hat{p}(s,x,y)\,dx\,ds\,dy.$$

Осталось использовать свойство (4.13). Лемма доказана. □

Доказательство теоремы 5.1. Пусть, как и выше, $\xi(t) = \psi(\eta(t))$. Проверим условие (5.1) для $r = 2$. Для этого рассмотрим функцию $f(y) = [\psi(y) - x]^4,\ x \in R$. Для нее $Df(y) = 4[\psi(y) - x]^3(1 + \beta \operatorname{sgn} y)$ и

$$n_f(dy) = 12[\psi(y) - x]^2(1 + \beta \operatorname{sgn} y)^2 dy - 8x^3\beta\delta_0(y)dy.$$

Из (3.1) и (2.2) получим:

$$\begin{aligned} E_x[\xi(t) - x]^4 &= E_{\phi(x)}[\psi(\eta(t)) - x]^4 \\ &= E_{\phi(x)} \int_0^t \left\{4[\psi(\eta(s)) - x]^3(1 + \beta \operatorname{sgn} \eta(s))\tilde{b}(\eta(s)) \right. \\ &\left. + 6[\psi(\eta(s)) - x]^2(1 + \beta \operatorname{sgn} \eta(s))^2 \tilde{a}(\eta(s))\right\} ds - 4x^3\beta E_{\phi(x)} L^\eta(t,0). \end{aligned} \tag{5.13}$$

Из (4.4) следует, что для функции $g(x) \in B_0(R)$ такой, что $g(0-) = g(0+) = 0$,

$$\lim_{t\downarrow 0} \frac{1}{t} \int_R g(x) E_{\phi(x)} L^\eta(t,0)\, dx = 0. \tag{5.14}$$

Свойство (5.1) следует из (5.13), (5.14), примененного к функции $g(x) = \chi(x)x^3$, $\chi(x) \in C_0(R)$, и леммы 5.3. Для доказательства (5.2), (5.4), заметим, что из (3.2), (3.3) следует

$$\begin{aligned} \frac{1}{t}\int_R \chi(x)E_x(\xi(t) - x)\, dx = \beta\frac{1}{t}\int_R \chi(x) E_x L^\xi(t,0)\, dx + \\ + \frac{1}{t}\int_R \chi(x) E_{\phi(x)} \int_0^t b(\psi(\xi(s)))\, ds\, dx. \end{aligned} \tag{5.15}$$

Для первого слагаемого правой части в (5.15) используем следствие теоремы 4.1. Для второго слагаемого правой части в (5.15) используем лемму 5.3:

$$\begin{aligned} &\lim_{t\downarrow 0}\frac{1}{t}\int_R \chi(x)E_{\phi(x)}\int_0^t b(\psi(\xi(s))\, ds\, dx \\ &= \lim_{t\downarrow 0}\frac{1}{t}\int_R \chi(\psi(x))(1 + \beta \operatorname{sgn} x) E_x \int_0^t b(\psi(\xi(s)))\, ds\, dx \\ &= \int_R \chi(x) b(x)\, dx. \end{aligned}$$

Равенства (5.3), (5.5) доказываются тем же путем, что и (5.1), (5.2), (5.4). Имеем,

$$\begin{aligned} E_x[\xi(t)-x]^2 &= E_{\phi(x)}[\psi(\eta(t))-x]^2 \\ &= E_{\phi(x)}\int_0^t \big\{2[\psi(\eta(s))-x]b(\psi(\eta(s))) \\ &\qquad + a(\psi(\eta(s)))\big\}\,ds - 2x\beta E_{\phi(x)}L^\eta(t,0). \end{aligned} \tag{5.16}$$

Теперь (5.5) следует из (5.16), (5.14). Теорема доказана. □

6. Параболические уравнения

В этом параграфе устанавливается связь между решением уравнения (1.1) и решением граничной задачи для параболического уравнения. Для стохастических уравнений Ито ($\beta = 0$ в (1.1)) эта связь хорошо известна. Функционалы от решений уравнений Ито являются решениями задачи Коши, первой граничной задачи. Функционал от решения уравнения (1.1) будет решением задачи сопряжения (третьей граничной задачи) для параболического уравнения с измеримыми коэффициентами. Рассмотрим следующую граничную задачу

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \frac{1}{2}a(x)\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} + b(x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial x} + c(t,x)u(t,x) + f(t,x), \\ &\hspace{20em} t\in[0,T],\ x\neq 0 \\ &u(0,x) = g(x), \\ &u(t,0+) = u(t,0-), \\ &(1+\beta)\frac{\partial u}{\partial x}(t,0+) = (1-\beta)\frac{\partial u}{\partial x}(t,0-). \end{aligned} \tag{6.1}$$

Теорема 6.1. *Пусть выполнены условия I_1 и I_2, функция $c(t,x)$ измерима и ограничена, функции $f(t,x)\in L_2([0,T]\times R)$ и $g(x)\in W_2^1(R)$. Тогда граничная задача* (6.1) *имеет единственное решение в классе $W_2^{1,2}([0,T]\times R)$. Для него справедлива оценка*

$$\|u\|_{W_2^{1,2}} \le C(\|f\|_{L_2} + \|g\|_{W_2^1}). \tag{6.2}$$

Это решение допускает вероятностное представление

$$u(t,x) = E_x g(\xi(t)) + E_x\int_0^t f(s,\xi(s))\exp\left\{\int_0^s c(z,\xi(z))\,dz\right\}ds, \tag{6.3}$$

где $\xi(t)$ — решение уравнения (1.1).

Доказательство. Рассмотрим задачу Коши:

$$\begin{aligned}\frac{\partial v(t,x)}{\partial t} &= \frac{1}{2}\tilde{a}(x)\frac{\partial^2 v(t,x)}{\partial x^2} + \tilde{b}(x)\frac{\partial v(t,x)}{\partial x}\\ &\qquad + c(t,\psi(x))v(t,x) + f(t,\psi(x)), \qquad t\in[0,T],\ x\in R,\\ v(0,x) &= g(\psi(x)).\end{aligned} \tag{6.4}$$

Т.к $f(t,\psi(x)) \in L_2([0,T]\times R)$ и $g(\psi(x)) \in W_2^1(R)$, задача (6.4) имеет единственное решение в классе $W_2^{1,2}$ [1, лемма 2] и имеет место оценка

$$\|v\|_{W_2^{1,2}} \le C(\|f\|_{L_2} + \|g\|_{W_2^1}). \tag{6.5}$$

Кроме того,

$$v(t,x) = E_x g(\psi(\eta(t))) + E_x \int_0^t f(s,\psi(\eta(s))) \exp\left\{\int_0^s c(z,\psi(\eta(s)))\,dz\right\} ds. \tag{6.6}$$

В силу теоремы вложения существуют непрерывные на $[0,T]\times R$ модификации функций $v(t,x)$ и $\frac{\partial v}{\partial x}(t,x)$ и мы рассматриваем их. Положим $u(t,x) = v(t,\phi(x))$. Легко проверяется, что функция $u(t,x)$ удовлетворяет уравнению (6.1), $u(t,x) \in W_2^{1,2}([0,T]\times R)$ и $u(0,x) = g(x)$. Оценка (6.2) следует из (6.5). Кроме того,

$$u(t,0+) = u(t,0-), \qquad (1+\beta)\frac{\partial u}{\partial x}(t,0+) = (1-\beta)\frac{\partial u}{\partial x}(t,0-).$$

Определим $\xi(t) = \psi(\eta(t))$. Согласно теореме 3.1 процесс $\xi(t)$ есть решением уравнения (1.1), а (6.3) следует из (6.6). Если мы учтем взаимно однозначное соответствие между решениями задач (6.1) и (6.4), единственность решения для (6.1) следует из единственности решения для (6.4). Теорема доказана. □

Литература

[1] А. Ю. Веретенников, *О сильных решениях стохастических уравнений* // Теория вероятностей и ее применения **24** (1979), 348–360.

[2] H. J. Engelbert, W. Schmidt, *Strong Markov continuous local martingales and solutions of one-dimensional stochastic differential equations. I, II, III* // Math. Nachr.**143, 144, 151** (1989, 1989, 1991), 167–184, 241–281, 149–197.

[3] J. F. Le Gall, *One-dimensional stochastic equations involving local times of the unknown processes* // Lecture Notes in Mathematics **1095** (1983), 51–82.

[4] J. M. Harrison, L. A. Shepp, *On skew Brownian motion* // Ann. Probab. **9** (1987), 309–313.

[5] Н. В.Крылов, *Управляемые диффузионные процессы.* Наука, Москва, 1977, 400 с.

[6] Г. Л. Кулинич, *Предельные распределения решений стохастических диффузионных уравнений* // Теория вероятностей и ее применения **3** (1968), 502–506.

[7] О. А. Ладыженская, В. А. Солонников, Н. Н. Уральцева, *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа.* Наука, Москва, 1967, 736 с.

[8] Р. Ш. Липцер, А. Н. Ширяев, *Теория мартингалов.* Наука, Москва, 1989, 512 с.

[9] Н. И. Портенко, *Обобщенные диффузионные процессы.* Наукова Думка, Киев, 1982, 208 с.

[10] Revuz D., Yor M *Continuous martingales and Brownian motion*// Springer, Berlin–Heidelberg–New York (1990), 590

[11] W. Rosenkrants, *Limit theorems for solutions to a class of stochastic differential equations* // Indiana University Mathematical Journal, **24** (1975), 613–624.

[12] A. Rozkosz, *On convergence of transition probability densities of one-dimensional diffusions* // Stochastics and Stochastics Reports, **40** (1992), 195–202.

[13] Л. Шварц, *Анализ.* Мир, Москва, 1972, 824 с.

[14] D. W. Strook, M. Yor, *Some remarkable martingales* // Lecture Notes in Mathematics **850** (1981), 590–6??.

[15] L. B. Walsh, *A diffusion with a discontinuous local time* // Asterisque **52,53** (1978), 37–45.

[16] M. Yor, *Sur is continuite des temps locaux associes a certaines semimartingales* // Asterisque, **52,53** (1978), 23–35.

Сведения об авторах

Сергей Яковлевич Махно

Институт прикладной математики
и механики НАН Украины,
ул. Р. Люксембург, 74,
83114 Донецк,
Украина
E-Mail: `makhno@iamm.ac.donetsk.ua`