Український математичний вісник
Том 12 **(2015)**, № 2, 190 – 209

О задаче Римана–Гильберта для уравнений Бельтрами в квазидисках

Артем С. Ефимушкин, Владимир И. Рязанов

(*Представлена В. Я. Гутлянским*)

Аннотация. Для невырожденных уравнений Бельтрами в квазидисках и, в частности, гладких жордановых областях доказано существование регулярных решений задачи Римана–Гильберта с коэффициентами ограниченной вариации и граничными данными измеримыми относительно абсолютной гармонической меры (логарифмической ёмкости).

2010 MSC. 1A05, 31A20, 31A25, 31B25, 35Q15, 30E25, 31C05, 34M50, 35F45.

Ключевые слова и фразы. Проблема Римана–Гильберта, уравнения Бельтрами, квазидиски, квазиконформные кривые, логарифмическая емкость.

1. Введение

Пусть D — область в комплексной плоскости $\mathbb{C}$ и пусть $\mu : D \to \mathbb{C}$ — измеримая функция с $|\mu(z)| < 1$ п.в. *Уравнением Бельтрами* в D с коэффициентом μ называется уравнение вида

$$f_{\bar{z}} = \mu(z) \cdot f_z, \tag{1.1}$$

где $f_{\bar{z}} = \bar{\partial} f = (f_x + i f_y)/2$, $f_z = \partial f = (f_x - i f_y)/2$, $z = x + iy$, f_x и f_y — частные производные функции $f : D \to \mathbb{C}$ по x и y, соответственно. Уравнение (1.1) называется *невырожденным*, если $\|\mu\|_\infty < 1$.

В последнее время были получены новые теоремы существования, а также изучено граничное поведение гомеоморфных решений и на этой основе изучена задача Дирихле для широкого круга уравнения Бельтрами с вырождением, когда дилатационное отношение $K_\mu(z) = (1+|\mu(z)|)/(1-|\mu(z)|)$ существенно неограничено, см. например, монографии [1, 2] и статьи [3–5]. Однако, при изучении задачи

Статья поступила в редакцию 1.06.2015

Римана–Гильберта мы сталкиваемся с весьма тонкой проблемой Лузина о взаимосвязи граничных данных сопряженных гармонических функций и с проблемой искажения граничных мер при более общих отображениях. Поэтому здесь мы ограничиваемся случаем невырожденных уравнений Бельтрами.

Краевые задачи для аналитических функций f, когда $\mu(z) \equiv 0$, восходят к знаменитой диссертации Римана (1851), а также известным работам Гильберта (1904, 1912, 1924), и Пуанкаре (1910), смотри историю вопроса в монографии [6], где также рассматривался случай обобщенных аналитических функций.

В 1904 году Гильберт поставил следующую проблему, которую теперь принято называть проблемой Гильберта, или *проблемой Римана–Гильберта.* Она состояла в доказательстве существования аналитической функции f в области $D \subset \mathbb{C}$, ограниченной спрямляемой жордановой кривой, с граничным условием

$$\lim_{z\to\zeta} \mathrm{Re}\, \overline{\lambda(\zeta)} \cdot f(z) \ = \ \varphi(\zeta) \qquad\qquad \forall\ \zeta \in \partial D\ , \tag{1.2}$$

где им предполагалось, что функции λ и φ непрерывно дифференцируемы относительно натурального параметра длины на кривой ∂D, и что $|\lambda| \neq 0$ на ∂D. Поэтому без ограничения общности можно считать, что $|\lambda(\zeta)| \equiv 1$.

Первый способ решения этой проблемы, основанный на теории сингулярных интегральных уравнений, был предложен самим Гильбертом в работе [7]. Эта попытка оказалась не совсем удачной, поскольку теория сингулярных интегральных уравнений была еще недостаточно развита в то время. Однако, как раз этот способ стал основным подходом в этом направлении исследований, см., например, монорафии [6, 8, 9]. В частности, на этом пути было доказано существование решений этой задачи для функций λ и φ непрерывных по Гёльдеру, см. [8].

Другой способ решения задачи, основанный на редукции к решению соответствующих двух задач Дирихле, был также предложен Гильбертом, см. [10]. Весьма общее решение задачи Римана-Гильберта этим способом совсем недавно было дано в статье [11] для жордановых областей при произвольных функциях φ и λ, измеримых относительно гармонической меры.

Мы следуем второй из упомянутых схем Гильберта при решении обобщенной задачи Римана–Гильберта для невырожденных уравнений Бельтрами.

Напомним, что гомеоморфные решения с обобщенными производными по Соболеву невырожденных уравнений Бельтрами (1.1) называются *квазиконформными отображениями*, см., например, [12, 13]. *Квазидисками* именуются образы единичного круга $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ при квазиконформных отображениях $\mathbb{C}$ на себя, а их границы — *квазиокружностями* или *квазиконформными кривыми*. Напомним, что *жордановой кривой* называется взаимнооднозначный непрерывный образ окружности в $\mathbb{C}$. Известно, что любая гладкая (или липшицева) жорданова кривая является квазиконформной кривой и, в тоже время, квазиконформные кривые могут быть неспрямляемыми, как показывает известный пример так называемой снежинки Коха, см., например, [13, п. II.8.10].

Заметим, что жордановы кривые вообще говоря не имеют касательных. Поэтому нам нужна замена понятия некасательного предела. В связи с этим, напомним теорему Бейджмила [14], см. также [15, теорема III.1.8], согласно которой для любой функции $\Omega : \mathbb{D} \to \overline{\mathbb{C}}$, за исключением не более чем счетного множества $\zeta \in \partial\mathbb{D}$, для любой пары дуг γ_1 и γ_2 в $\mathbb{D}$, оканчивающихся в $\zeta \in \partial\mathbb{D}$,

$$C(\Omega, \gamma_1) \ \cap \ C(\Omega, \gamma_2) \ \neq \ \varnothing \ , \tag{1.3}$$

где $C(\Omega, \gamma)$ обозначает *предельное множество* Ω *в* ζ *вдоль* γ, т.е.,

$$C(\Omega, \gamma) \ = \ \{w \in \overline{\mathbb{C}} \ : \ \Omega(z_n) \to w, \ z_n \to \zeta, \ z_n \in \gamma\} \ .$$

Непосредственно по теоремам Римана и Каратеодори, см., например, [16, теоремы II.2.1 и II.3.2] и [17, теорема II.C.1], этот результат можно распространить на произвольную жорданову область D в $\mathbb{C}$. Для функции $\Omega : D \to \overline{\mathbb{C}}$ и $\zeta \in \partial D$, обозначим через $P(\Omega, \zeta)$ пересечение всех предельных множеств $C(\Omega, \gamma)$ для дуг γ в D, оканчивающихся в ζ. Далее называем точки множества $P(\Omega, \zeta)$ *главными асимптотическими значениями* Ω в ζ. Отметим, что, если Ω имеет предел хотя бы вдоль одной дуги в D, оканчивающейся в точке $\zeta \in \partial D$ со свойством (1.3), то главное асимптотическое значение единственно.

Напомним также, что отображение $f : D \to \mathbb{C}$ *дискретно*, если прообраз $f^{-1}(y)$ каждой точки $y \in \mathbb{C}$ состоит из изолированных точек, и *открыто*, если образ любого открытого множества $U \subseteq D$ является открытым множеством в $\mathbb{C}$.

Под *регулярным решением* уравнения Бельтрами (1.1) будем понимать непрерывное, дискретное и открытое отображение $f : D \to \mathbb{C}$ с обобщенными производными, которое удовлетворяет уравнению (1.1) п.в. Заметим, что в случае невырожденных уравнения Бельтрами (1.1) регулярное решение f принадлежит классу $W^{1,p}_{\mathrm{loc}}$ при некотором $p > 2$ и, кроме того, его якобиан $J_f(z) \neq 0$ для п.в. $z \in D$, и называется *квазиконформной функцией*, см., например, [13, гл. VI].

Под *регулярным решением задачи Римана–Гильберта* (1.2) для уравнения Бельтрами (1.1) будем понимать регулярное решение (1.1), которое удовлетворяет граничному условию (1.2) в смысле единственного главного асимптотического значения для всех $\zeta \in \partial D$ за исключением быть может некоторого множества логарифмической ёмкости нуль.

2. О логарифмической ёмкости

Наиболее важным для нашего исследования является понятие логарифмической ёмкости, см., например, [15, 18, 19]. Пусть E — произвольное ограниченное борелевское множество плоскости $\mathbb{C}$. *Положительным распределением массы* на множестве E называют произвольную неотрицательную вполне аддитивную функцию множества ν, определенную на борелевских подмножествах множества E, с $\nu(E) = 1$. Функцию

$$U^{\nu}(z) := \int\limits_E \log\left|\frac{1}{z-\zeta}\right| \, d\nu(\zeta) \tag{2.1}$$

называют *логарифмическим потенциалом* распределения ν. Соответственно, *логарифмической ёмкостью* $C(E)$ борелевского множества E называется величина

$$C(E) = e^{-V}, \qquad V = \inf_{\nu} V_{\nu}(E), \qquad V_{\nu}(E) = \sup_{z} U^{\nu}(z). \tag{2.2}$$

Заметим, что здесь супремум достаточно вычислять по множеству E. Если $V = \infty$, то полагают $C(E) = 0$. Известно, что $0 \le C(E) < \infty$, $C(E_1) \le C(E_2)$, если $E_1 \subseteq E_2$, $C(E) = 0$, если $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ с $C(E_n) = 0$, см., например, [18, лемма III.4].

Напомним, что логарифмическая ёмкость совпадает с так называемой абсолютной гармонической мерой, введенной Рольфом Неванлинной, см., например, [19, с. 123]. Поэтому множество E имеет нулевую (хаусдорфову) длину, если $C(E) = 0$, см., например, [19, теорема V.6.2]. Однако, существуют множества нулевой длины, имеющие положительную ёмкость, см., например, [18, теорема IV.5].

Хорошо известна также следующая геометрическая характеризация логарифмической ёмкости, см. [19]:

$$C(E) = \tau(E) := \lim_{n\to\infty} V_n^{\frac{2}{n(n-1)}}, \tag{2.3}$$

где V_n обозначает супремум величины

$$V(z_1, \ldots, z_n) = \prod_{k<l}^{l=1,\ldots,n} |z_k - z_l|, \tag{2.4}$$

когда всвозможные конечные наборы точек $z_1, \ldots, z_n$ пробегают множество E. Следуя Фекете [20], величину $\tau(E)$ называют *трансфинитным диаметром* множества E. Из указанной геометрической интерпретации логарифмической ёмкости через трансфинитный диаметр, сразу же видим, что если $C(E) = 0$, то $C(f(E)) = 0$ для любого отображения f непрерывного по Гёльдеру и, в частности, для конформных и квазиконформных отображений на компактах, см., например, [13, теорема II.4.3].

Чтобы ввести множества, измеримые относительно логарифмической ёмкости, определим, следуя [18], *внутреннюю C_* и внешнюю ёмкости C^**:

$$C_*(E) \ : = \ \sup_{F \subseteq E} \ C(E), \tag{2.5}$$

где супремум берётся по всем компактным множествам $F \subset \mathbb{C}$, и

$$C^*(E) \ : = \ \inf_{E \subseteq O} \ C(O), \tag{2.6}$$

где инфимум берётся по всем открытым множествам $O \subseteq \mathbb{C}$. Далее ограниченное множество $E \subset \mathbb{C}$ называется *измеримым относительно логарифмической ёмкости*, если

$$C^*(E) \ = \ C_*(E), \tag{2.7}$$

и общее значение $C_*(E)$ и $C^*(E)$ по-прежнему обозначается через $C(E)$. Отметим, см. [18, лемма III.5], что внешняя ёмкость полуаддитивна, т.е.

$$C^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \ \le \ \sum_{n=1}^{\infty} C^*(E_n). \tag{2.8}$$

Функцию $\varphi : E \to \mathbb{C}$, заданную на ограниченном множестве $E \subset \mathbb{C}$, будем называть *измеримой относительно логарифмической ёмкости*, если для любых открытых множеств $O \subseteq \mathbb{C}$ измеримы относительно логарифмической ёмкости множества

$$\Omega = \{z \in E : \varphi(z) \in O\}. \tag{2.9}$$

Ясно, что само множество E измеримо относительно логарифмической ёмкости.

Замечание 2.1. Известно, что борелевские множества и, в частности, компактные и открытые множества измеримы относительно логарифмической ёмкости, см. [18, с. 9, 31]. Кроме того, как это следует прямо из определения, любое множество $E \subset \mathbb{C}$ конечной логарифмической ёмкости, представимо в виде объединения сигма-компакта (объединения счётного числа компактов) и множества логарифмической ёмкости нуль. Известно также, что борелевские множества, например, компакты измеримы относительно всех хаусдорфовых мер и, в частности, относительно меры длины, см., например, в [21, теорема II(7.4)]. Поэтому любое множество $E \subset \mathbb{C}$ конечной логарифмической ёмкости измеримо относительно меры длины. Таким образом, на таком множестве любая функция $\varphi : E \to \mathbb{C}$ измеримая относительно логарифмической ёмкости будет также измеримой относительно меры длины на E. Однако, существуют функции измеримые относительно меры длины, которые не являются измеримыми относительно логарифмической ёмкости, см., например, [18, теорема IV.5].

Нас особо будут интересовать функции $\varphi : \partial\mathbb{D} \to \mathbb{C}$, заданные на единичной окружности $\partial\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Однако, ввиду (2.3), нам достаточно будет изучить соответствующие вопросы на отрезках вещественной оси, поскольку любая замкнутая дуга на $\partial\mathbb{D}$ допускает билипшицево (даже бесконечно гладкое, так нзываемое стереографическое) отображение g на такой отрезок, а g и g^{-1} по теореме Кирсбрауна допускают продолжение до липшицевых отображений $\mathbb{C}$ на себя, см., например, [22, теорема 2.10.43].

В связи с этим, напомним, что отображение $g : X \to X'$ между метрическими пространствами (X, d) и (X', d') называется *липшицевым*, если $d'(g(x_1), g(x_2)) \leqslant C \cdot d(x_1, x_2)$ для любых $x_1, x_2 \in X$ и для некоторой конечной постоянной C. Если в дополнение к этому $d(x_1, x_2) \leqslant c \cdot d'(g(x_1), g(x_2))$ для любых $x_1, x_2 \in X$ и для некоторой конечной постоянной c, то отображение g называется *билипшицевым*.

Напомним также, см., например, [21, с. 195], что точка $x_0 \in \mathbb{R}$ называется *точкой плотности* для измеримого (относительно длины, т.е. по Лебегу) множества $E \subset \mathbb{R}$, если $x_0 \in E$ и

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{|\ (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \setminus E\ |}{2\varepsilon} \;=\; 0. \tag{2.10}$$

Аналогично говорим, что точка $x_0 \in \mathbb{R}$ является *точкой плотности относительно логарифмической ёмкости* для измеримого (относительно C) множества $E \subset \mathbb{R}$, если $x_0 \in E$ и

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{C([x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \setminus E)}{C([x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon])} \;=\; 0. \tag{2.11}$$

Напомним, наконец, что функция $\varphi : [a, b] \to \mathbb{C}$ *аппроксимативно непрерывна (относительно логарифмической ёмкости) в точке* $x_0 \in (a, b)$, если она непрерывна на некотором множестве $E \subseteq [a, b]$, для которого x_0 является точкой плотности (относительно логарифмической ёмкости), см., например, [21, с. 199], и [22, с. 176], соответственно.

Для дальнейшего важно, что имеет место следующий аналог теоремы А. Данжуа, см., например, [22, теорема 2.9.13], сравни с [21, теорема IV(10.6)].

Предложение 2.1. *Функция $\varphi : [a, b] \to \mathbb{C}$ измерима относительно логарифмической ёмкости тогда и только тогда, когда она аппроксимативно непрерывна для п.в. $x \in (a, b)$ также относительно логарифмической ёмкости.*

Замечание 2.2. Как известно, $C([a, b]) \simeq 1/(\log \frac{1}{\delta})$ при $\delta = b - a \to 0$, где запись $u \simeq v$ означает, что для достаточно малых δ найдется постоянная $c \in (0, \infty)$, такая, что $v/c \le u \le c \cdot v$, см., например, [23, с. 131]. Кроме того, $C(E) \ge A/\log(1/|E|)$ при малых длинах $|E|$, см., например, [24, лемма 1]. Таким образом, если x_0 является точкой плотности для множества E относительно логарифмической ёмкости, то x_0 — также точка плотности для множества E относительно меры длины. Следовательно, любая точка аппроксимативной непрерывности функции $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ относительно логарифмической ёмкости, является также точкой аппроксимативной непрерывности функции φ относительно меры Лебега на вещественной оси.

Отсюда, в частности, получаем следующую полезную лемму.

Лемма 2.1. *Пусть функция $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ ограничена и измерима относительно логарифмической ёмкости и $\Phi(x) = \int_a^x \varphi(t)\, dt$ — её неопределенный интеграл Лебега. Тогда $\Phi'(x) = \varphi(x)$ п.в. на (a, b) относительно логарифмической ёмкости.*

Доказательство. Действительно, пусть $x_0 \in (a, b)$ — точка аппроксимативной непрерывности для функции φ. Тогда найдется множество $E \subseteq [a, b]$, для которого x_0 является точкой плотности и на котором функция φ непрерывна. Так как $|\varphi(x)| \le C < \infty$ для всех $x \in [a, b]$, получаем, что при малых h

$$\left| \frac{\Phi(x_0 + h) - \Phi(x_0)}{h} - \varphi(x_0) \right| \le \max_{x \in E \cap [x_0, x_0 + h]} |\, \varphi(x) - \varphi(x_0)\, | \; + \; 2C \, \frac{|\, (x_0, x_0 + h) \setminus E\, |}{|h|},$$

т.е. $\Phi'(x_0) = \varphi(x_0)$. Таким образом, заключение леммы следует из предложения 2.1, см. также замечание 2.2. □

3. Об одном аналоге теоремы Лузина

Лузину принадлежит следующая замечательная теорема: для любой измеримой и п.в. конечной (относительно меры Лебега) функции φ на интервале $[a, b]$, существует непрерывная функция Φ, такая, что $\Phi'(x) = \varphi(x)$ п.в. на $[a, b]$, см., например, [21, теорема VII(2.3)]. Это утверждение было хорошо известно до Лузина для суммируемой функции φ относительно ее неопределенного интеграла Φ, см., например, [21, теорема IV(6.3)]. Однако, этот результат весьма нетривиален для несуммируемой φ.

При доказательстве аналога теоремы Лузина в терминах логарифмической ёмкости ключевую роль будет играть следующая лемма о сингулярных функциях канторовского типа.

Лемма 3.1. *Существует непрерывная неубывающая функция* $\Psi : [0, 1] \to [0, 1]$*, такая, что* $\Psi(0) = 0$*,* $\Psi(1) = 1$ *и* $\Psi'(t) = 0$ *п.в. относительно логарифмической ёмкости.*

Доказательство. Для доказательства этого факта воспользуемся конструкцией множеств канторовского типа логарифмической ёмкости нуль, принадлежащей Рольфу Неванлинне. Именно, рассмотрим произволную последовательность чисел $p_k > 1$, $k = 1, 2, \ldots$, и определим соответствующую последовательность множеств $E(p_1, \ldots, p_n)$, $n = 1, 2, \ldots$, по индукции следующим образом. Пусть $E(p_1)$ — множество, состоящее из 2-х равных по длине отреков, которое получается из единичного отрезка $[0, 1]$ выбрасыванием центрального интервала длины $1 - 1/p_1$; $E(p_1, p_2)$ — множество, состоящее из 2^2 равных по длине отреков, которое получается выбрасыванием из каждого отрезка предыдущего множества $E(p_1)$ центрального интервала, который составляет $1 - 1/p_2$ долю от его длины и так далее. Обозначим через $E(p_1, p_2, \ldots)$ пересеченние всех множеств $E(p_1, \ldots, p_n)$, $n = 1, 2, \ldots$. По теореме V.6.3 в [19] множество $E(p_1, p_2, \ldots)$ имеет логарифмическую ёмкость нуль тогда и только тогда, когда ряд $\sum 2^{-k} \log p_k$ расходится. Например, это условие выполняется, если $p_k = e^{2^k}$.

Как известно, все множества канторовского типа гомеоморфны. Более того, найдется гомеоморфизм $h : [0, 1] \to [0, 1]$, $h(0) = 0$ и $h(1) = 1$, при котором $E(p_1, p_2, \ldots)$ перейдёт в классическое канторово множество, см., например, конструкцию 8.23 в [25]. Таким образом, если κ — классическая канторова функция, см., например, конструкцию 8.15 в [25], то $\Psi = \kappa \circ h$ — искомая функция. $\square$

Лемма 3.2. *Пусть функция* $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *ограничена и измерима относительно логарифмической ёмкости. Тогда для любого* $\varepsilon > 0$

найдется непрерывная функция $G : [a,b] \to \mathbb{R}$, такая, что $|G(x)| \le \varepsilon$ для всех $x \in [a,b]$, $G(a) = G(b) = 0$, и $G'(x) = g(x)$ п.в. на $[a,b]$ относительно логарифмической ёмкости.

Доказательство. Пусть $H(x) = \int_a^x g(t)\ dt$ — неопределенный интеграл Лебега функции g. Выберем на $[a,b]$ конечный набор точек $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_n = b$, таких, что колебание H меньше $\varepsilon/2$ на каждом из отрезков $[a_k, a_{k+1}]$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Применяя линейные пребразования независимой и зависимой переменной в функции $\Psi : [0,1] \to [0,1]$ из леммы 3.1, получаем на каждом из отрезков $[a_k, a_{k+1}]$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, функцию F_k, которая имеет нулевую производную п.в. относительно логарифмической ёмкости и совпадает с функцией H в концах отрезка. Пусть F — функция на $[a,b]$, склеенная из функций F_k. Тогда $G = H - F$ даёт нам искомую функцию по леммам 2.1 и 3.1. □

Лемма 3.3. *Пусть функция $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ ограничена и измерима относительно логарифмической ёмкости и пусть P — замкнутое подмножество отрезка $[a,b]$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется непрерывная функция $G : [a,b] \to \mathbb{R}$, такая, что $|G(x+h)| \le \varepsilon|h|$ для всех $x \in P$ и всех h, таких, что $x + h \in [a,b]$, $G(x) = G'(x) = 0$ для всех $x \in P$, и $G'(x) = g(x)$ п.в. на $[a,b] \setminus P$ относительно логарифмической ёмкости.*

Доказательство. Пусть $I = (a,b)$. Тогда множество $I \setminus P$ является открытым и представимо в виде объединения счётного числа попарно непересекающихся интервалов $I_k = (a_k, b_k)$. Выберем в каждом интервале I_k возрастающую последовательность чисел ${}^{(j)}_{k}$, $j = 0, \pm1, \pm2, \ldots$, такую, что $c_k^{(j)} \to a_k$ при $j \to -\infty$ и $c_k^{(j)} \to b_k$ при $j \to \infty$. Обозначим через $\varepsilon_k^{(j)}$ меньшее из 2-х чисел $\varepsilon(c_k^{(j)} - a_k)/(k + |j|)$ и $\varepsilon(b_k - c_k^{(j)})/(k + |j|)$. Тогда по лемме 3.2 в каждом интервале I_k найдется непрерывная функция G_k, такая, что $|G(x)| \le \varepsilon_k^{(j)}$ для всех $x \in [c_k^{(j)}, c_k^{(j+1)}]$, $G(c_k^{(j)}) = 0$ для всех $j = 0, \pm1, \pm2, \ldots$, и $G'(x) = g(x)$ п.в. на I_k относительно логарифмической ёмкости. Таким образом, полагая $G(x) = G_k(x)$ на каждом интервале I_k и $G(x) = 0$ на множестве P, получаем искомую функцию. □

Наконец, докажем следующий аналог упомянутой выше теоремы Лузина.

Теорема 3.1. *Пусть функция $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ измерима относительно логарифмической ёмкости. Тогда найдется непрерывная функция*

$\Phi : [a,b] \to \mathbb{R}$, такая, что $\Phi'(x) = \varphi(x)$ п.в. на (a,b) также относительно логарифмической ёмкости. Более того, функцию Φ можно выбрать так, что $\Phi(a) = \Phi(b) = 0$ и $|\Phi(x)| \leq \varepsilon$ при всех $x \in [a,b]$ для любого заранее предписанного $\varepsilon > 0$.

Доказательство. Определим по индукции последовательность замкнутых множеств $P_n \subseteq [a,b]$, $n = 0, 1, \ldots$ и последовательность непрерывных функций $G_n : [a,b] \to \mathbb{R}$, $n = 0, 1, \ldots$, чьи производные существуют п.в. и измеримы относительно логарифмической ёмкости, такие, что при обозначениях $Q_n = \bigcup_{k=0}^{n} P_k$ и $\Phi_n = \sum_{k=0}^{n} G_k$ выполняются следующие условия:

(a) $\Phi_n'(x) = \varphi(x)$ при $x \in Q_n$,

(b) $G_n(x) = 0$ при $x \in Q_{n-1}$,

(c) $|G_n(x+h)| \leq |h|/2^n$ для всех $x \in Q_{n-1}$ и всех h, таких, что $x + h \in [a,b]$,

(d) $C(I \setminus Q_n) < 1/n$, где $I = [a,b]$.

Итак, пусть $G_0 \equiv 0$ и $P_0 = \varnothing$ и пусть G_n и P_n с указанными свойствами уже построены для всех $n = 1, 2, \ldots, m$. Тогда найдется компакт $E_m \subset I \setminus Q_m$, такой, что

$$C(I \setminus (Q_m \cup E_m)) < 1/(m+1), \tag{3.1}$$

а функции Φ_m' и φ непрерывны на E_m, см., например, [22, теорема 2.3.5].

По лемме 3.3 с множеством $P = Q_m$ и функцией $g : I \to \mathbb{R}$, равной $\varphi(x) - \Phi_m'(x)$ на E_m и нулю на $I \setminus E_m$, найдется непрерывная функция $G_{m+1} : I \to \mathbb{R}$, такая, что

(i) $G_{m+1}'(x) = \varphi(x) - \Phi_m'(x)$ п.в. на $I \setminus Q_m$ относительно логарифмической ёмкости,

(ii) $G_{m+1}(x) = G_{m+1}'(x) = 0$ для всех $x \in Q_m$,

(iii) $|G_{m+1}(x+h)| \leq |h|/2^{m+1}$ для всех $x \in Q_m$ и всех h таких, что $x + h \in I$.

По определению логарифмической ёмкости, условиям (i) и (3.1), найдется компакт $P_{m+1} \subseteq E_m$, такой, что

$$C(I \setminus (Q_m \cup P_{m+1})) < 1/(m+1), \tag{3.2}$$

$$G_{m+1}'(x) = \varphi(x) - \Phi_m'(x) \qquad \forall\, x \in P_{m+1}. \tag{3.3}$$

Как легко видеть из (3.2) и (3.3), а также (ii) и (iii), условия (a), (b), (c) и (d) сохраняются и для $n = m + 1$.

Положим теперь на основе приведённой конструкции последовательностей G_n и P_n:

$$\Phi(x) = \lim_{k\to\infty} \Phi_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} G_k(x), \qquad Q = \lim_{k\to\infty} Q_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k. \quad (3.4)$$

Заметим, что $\Phi_k \to \Phi$ равномерно на отрезке I ввиду условия (c) и, следовательно, функция Φ является непрерывной. По построению, для любого $x_0 \in Q$ имеем, что $x_0 \in Q_n$ при всех достаточно больших n и, т.к.

$$\frac{\Phi(x_0+h)-\Phi(x_0)}{h} = \frac{\Phi_n(x_0+h)-\Phi_n(x_0)}{h} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{G_k(x_0+h)-G_k(x_0)}{h},$$

мы получаем из условий (a), (b) и (c), что

$$\limsup_{h\to 0} \left| \frac{\Phi(x_0+h)-\Phi(x_0)}{h} - \varphi(x_0) \right| < \frac{1}{2^n},$$

т.е. $\Phi'(x_0) = \varphi(x_0)$. Кроме того, по условию (d) видим, что $C(I \setminus Q) = 0$. Таким образом, $\Phi'(x) = \varphi(x)$ п.в. на $[a, b]$ относительно логарифмической ёмкости.

Наконец, применяя конструкцию доказательства леммы 3.2 к найденной нами функции Φ вместо неопределенного интеграла, находим новую функцию Φ_*, такую, что $\Phi_*'(x) = \varphi(x)$ п.в. на $[a, b]$ также относительно логарифмической ёмкости с $\Phi_*(a) = \Phi_*(b) = 0$ и $|\Phi_*(x)| \le \varepsilon$ при всех $x \in [a, b]$ для любого заранее предписанного $\varepsilon > 0$. $\square$

4. О задаче Дирихле для гармонических функций в единичном круге

Герингом был установлен следующий блестящий результат: для любой вещественной с периодом 2π функции, которая измерима (относительно меры Лебега), существует гармоническая в $|z| < 1$ функция, такая, что $u(z) \to \varphi(\vartheta)$ для п.в. ϑ при $z \to e^{i\vartheta}$ вдоль некасательных путей, см. [26].

В дальнейшем будет полезен следующий аналог теоремы Геринга.

Теорема 4.1. *Пусть $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — 2π-периодическая функция, которая измерима относительно логарифмической ёмкости. Тогда существует гармоническая функция $u(z)$, $z \in \mathbb{D}$, такая, что $u(z) \to \varphi(\vartheta)$ при $z \to e^{i\vartheta}$ вдоль некасательных путей для всех $\vartheta \in \mathbb{R}$ за исключением быть может множества ёмкости нуль.*

Доказательство. По теореме 3.1 найдется непрерывная 2π-периодическая функция $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, такая, что $\Phi'(\vartheta) = \varphi(\vartheta)$ для п.в. ϑ относительно логарифмической ёмкости. Пусть

$$U(re^{i\vartheta}) \;=\; \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\vartheta-t)+r^2}\, \Phi(t)\, dt \tag{4.1}$$

для $r < 1$. Далее, по хорошо известному результату, восходящему к Фату, $\frac{\partial}{\partial\vartheta}\, U(z) \to \Phi'(\vartheta)$ при $z \to e^{i\vartheta}$ вдоль любых некасательных путей всюду, где существует $\Phi'(\vartheta)$, см., например, [27, 3.441, с. 53], см. также [16, теорема IX.1.2]. Следовательно, заключение следует для функции $u(z) \;=\; \frac{\partial}{\partial\vartheta}\, U(z)$. □

Известно, что любая гармоническая функция $u(z)$ в $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ имеет сопряженную функцию $v(z)$, такую, что $f(z) = u(z) + iv(z)$ является аналитической функцией в $\mathbb{D}$. Таким образом, получаем:

Следствие 4.1. *При условиях теоремы* 4.1*, существует аналитическая функция f в $\mathbb{D}$, такая, что* $\operatorname{Re} f(z) \to \varphi(\vartheta)$ *при $z \to e^{i\vartheta}$ вдоль любых некасательных путей для п.в. ϑ относительно логарифмической ёмкости.*

Заметим, что граничные значения сопряженной функции v не могут быть произвольно предписаны одновременно с граничными значениями u, поскольку v единственным образом определяется через u с точностью до аддитивной постоянной, см., например, [17, I.A].

Обозначим через h^p, $p \in (0,\infty)$, класс всех гармонических функций u в $\mathbb{D}$ с

$$\sup_{r\in(0,1)} \left\{ \int\limits_0^{2\pi} |u(re^{i\vartheta})|^p \, d\vartheta \right\}^{\frac{1}{p}} \;<\; \infty.$$

Замечание 4.1. Очевидно, что $h^p \subseteq h^{p'}$ для всех $p > p'$ и, в частности, $h^p \subseteq h^1$ для всех $p > 1$. Важно, что каждая функция класса h^1 имеет п.в. некасательные граничные пределы, см., например, [16, следствие IX.2.2].

Известно также, что для того чтобы, функция U, гармоническая в $\mathbb{D}$, была представима интегралом Пуассона (4.1) с некоторой функцией $\Phi \in L^p(-\pi, \pi)$, $p > 1$, необходимо и достаточно, чтобы $U \in h^p$, см., например, [16, теорема IX.2.3]. При этом, $U(z) \to \Phi(\vartheta)$ при $z \to e^{i\vartheta}$ вдоль любых некасательных путей для п.в. ϑ, см., например, [16, следствие IX.1.1]. Более того, $U(z) \to \Phi(\vartheta_0)$ при произвольной сходимости $z \to e^{i\vartheta_0}$ в точках ϑ_0 непрерывности функции Φ, см., например, [16, теорема IX.1.1].

Наконец, напомним, что $v \in h^p$ как только $u \in h^p$ при любом $p > 1$ по теореме М. Риса, см. [28]. Вообще говоря, этот факт весьма нетривиален, но следует непосредственно для $p = 2$ из равенства Парсеваля, см., например, доказательство к теореме IX.2.4 в [16]. Последний факт будет достаточным для наших целей.

5. О взаимосвязи граничных значений сопряженных функций

Известен весьма тонкий факт, восходящий к Лузину, что гармонические функции в единичном круге с непрерывными (даже абсолютно непрерывными!) граничными значениями могут иметь сопряженные гармонические функции, чьи граничные значения не являются непрерывными функциями, более того, не являются даже существенно ограниченными в окрестности любой точки единичной окружности, см. например, [31, с. 557]. Таким образом, взаимосвязь между граничными значениями сопряженных гармонических функций является весьма непростой вещью, см. также [17, I.E].

Мы называем $\lambda : \partial\mathbb{D} \to \mathbb{C}$ *функцией ограниченной вариации*, пишем $\lambda \in \mathcal{BV}(\partial\mathbb{D})$, если

$$V_\lambda(\partial\mathbb{D}) \ := \ \sup \sum_{j=1}^{k} |\lambda(\zeta_{j+1}) - \lambda(\zeta_j)| < \infty, \tag{5.1}$$

где супремум берётся над всеми конечными наборами точек $\zeta_j \in \partial\mathbb{D}$, $j = 1, \ldots, k$, с циклическим порядком, означающим, что ζ_j лежит между ζ_{j+1} и ζ_{j-1} для каждого $j = 1, \ldots, k$. Здесь мы предполагаем, что $\zeta_{k+1} = \zeta_1 = \zeta_0$. Величина $V_\lambda(\partial\mathbb{D})$ называется *вариацией функции* λ.

Замечание 5.1. Как это явствует из неравенства треугольника, если мы добавляем новые промежуточные точки в набор ζ_j, $j=1, \ldots, k$, то сумма в (5.1) не убывает. Таким образом, супремум в (5.1) достигается при $\delta = \max_{j=1,\ldots,k} |\zeta_{j+1} - \zeta_j| \to 0$. Отметим также, что по определению $V_\lambda(\partial\mathbb{D}) = V_{\lambda\circ h}(\partial\mathbb{D})$, т.е. *вариация является инвариантом* при гомеоморфизмах $h : \partial\mathbb{D} \to \partial\mathbb{D}$ и, таким образом, определение может быть распространено естественным образом на произвольную жорданову кривую в $\mathbb{C}$.

Обозначим через $A(\zeta_0, \delta)$ дугу единичной окружности $\partial\mathbb{D}$ с центром в точке $\zeta_0 \in \partial\mathbb{D}$ длины 2δ, где $\delta \in (0, \pi)$. Назовём множество $E \subset \partial\mathbb{D}$ *логарифмически тонким в точке* $\zeta_0 \in \partial\mathbb{D}$, если при $\delta \to 0$

$$C(E \cap A(\zeta_0, \delta)) \;=\; o\left(\left(\log\frac{1}{\delta}\right)^{-1}\right). \tag{5.2}$$

Как известно, $C(A(\zeta_0, \delta)) \simeq 1/(\log\frac{1}{\delta})$ при $\delta \to 0$, где запись $u \simeq v$ означает, что для достаточно малых δ найдется постоянная $c \in (0, \infty)$, такая, что $v/c \le u \le c \cdot v$, см., например, [23, с. 131]. Таким образом, (5.2) означает, что

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{C(E \cap A(\zeta_0, \delta))}{C(A(\zeta_0, \delta))} \;=\; 0, \tag{5.3}$$

т.е. ζ_0 является *точкой разрежения для множества* E относительно логарифмической ёмкости. Условие (5.2) влечёт также, что ζ_0 является точкой разрежения для множества E относительно меры длины на окружности $\partial\mathbb{D}$, как это следует, например, из леммы 1 в [24].

Будем говорить, что функция $\varphi : \partial\mathbb{D} \to \mathbb{R}$ *почти непрерывна* в точке $\zeta_0 \in \partial\mathbb{D}$, если найдется некоторое логарифмически тонкое множество $E \subseteq \partial\mathbb{D}$, такое, что $\varphi(\zeta) \to \varphi(\zeta_0)$ при $\zeta \to \zeta_0$ вдоль множества $\partial\mathbb{D} \setminus E$. Будем также говорить, что φ *почти непрерывна на* $\partial\mathbb{D}$, если она почти непрерывна в каждой точке $\zeta_0 \in \partial\mathbb{D}$ за исключением быть может множества логарифмической ёмкости нуль. Заметим, что почти непрерывные функции являются измеримыми относительно логарифмической ёмкости по предложению 2.1. Заметим также, что логарифмически тонкие множества, а также множества логарифмической ёмкости нуль и, следовательно, почти непрерывные функции инвариантны относительно конформных (дробно-линейных) отображений расширенной комплексной плоскости на себя, переводящих единичную окружность в расширенную вещественную ось и обратно. Таким образом, по теореме 1 в [24] получаем следующее заключение.

Теорема 5.1. *Пусть $\alpha : \partial\mathbb{D} \to \mathbb{R}$ — функция ограниченной вариации и пусть $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ — аналитическая функция, такая, что*

$$\lim_{z\to\zeta} \mathrm{Re}\, f(z) \;=\; \alpha(\zeta) \qquad \textit{для п.в.} \quad \zeta \in \partial\mathbb{D} \tag{5.4}$$

относительно логарифмической ёмкости вдоль любых некасательных путей. Тогда

$$\lim_{z\to\zeta} \operatorname{Im} f(z) \;=\; \beta(\zeta) \qquad \text{для п.в.} \quad \zeta\in\partial\mathbb{D} \tag{5.5}$$

относительно логарифмической ёмкости вдоль любых некасательных путей, где $\beta : \partial\mathbb{D} \to \mathbb{R}$ — некоторая функция измеримая относительно логарифмической ёмкости.

Также докажем следующее предложение, которым мы воспользуемся позже.

Предложение 5.1. *Для любой функции $\lambda : \partial\mathbb{D} \to \partial\mathbb{D}$ класса $\mathcal{BV}(\partial\mathbb{D})$ найдется функция $\alpha_\lambda : \partial\mathbb{D} \to \mathbb{R}$ класса $\mathcal{BV}(\partial\mathbb{D})$, такая, что $\lambda(\zeta) = \exp\{i\alpha_\lambda(\zeta)\}$, $\zeta\in\partial\mathbb{D}$.*

В дальнейшем мы называем функцию α_λ *функцией аргумента* λ.

Доказательство. Рассмотрим функцию $\Lambda(\vartheta) = \lambda(e^{i\vartheta})$, $\vartheta\in[0,2\pi]$. Ясно, что $V_\Lambda = V_\lambda$ и, таким образом, Λ имеет не более чем счетный набор скачков j_n, где ряд $\sum j_n$ является абсолютно сходящимся, $\sum |j_n| \le V_\lambda$, и $\Lambda(\vartheta) = J(\vartheta) + C(\vartheta)$, где $C(\vartheta)$ — непрерывная функция, а $J(\vartheta)$ — функция скачков Λ, которая равна сумме всех ее скачков на отрезке $[0,\vartheta]$, см., например, следствие VIII.3.2 и теорему VIII.3.7 в [29]. Мы имеем, что $V_J \le V_\lambda$ и $V_C \le 2V_\lambda$, см., например, [30, теорема 6.4]. Ассоциируем с комплексной величиной j_n вещественную величину

$$\alpha_n = -2\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{Re} j_n}{\operatorname{Im} j_n} \;\in\; [-\pi,\pi].$$

В силу геометрической интерпретации этих величин ($|j_n|$ равна длине хорды для дуги единичной окружности длины $|\alpha_n|$) и элементарных вычислений, мы имеем, что $|j_n| \le |\alpha_n| \le j_n\cdot\pi/2$.

Теперь, ассоциируем с функцией $J(\vartheta)$ функцию $j(\vartheta)$, которая равна сумме всех α_n соответствующих скачкам Λ на отрезке $[0,\vartheta]$. Заметим, что $V_j \le V_J\cdot\pi/2$. Далее, ассоциируем с комплекснозначной функцией $C(\vartheta)$ вещественнозначную функцию $c(\vartheta)$ следующим образом. Так как $C(\vartheta)$ равномерно непрерывна на отрезке $[0,2\pi]$, последний можно поделить на отрезки $S_k = [\theta_{k-1},\theta_k]$, $\theta_k = 2\pi k/m$, $k = 1,\dots,m$, с достаточно большим $m\in\mathbb{N}$, таким, что $|C(\vartheta) - C(\vartheta')| < 2$ для всех ϑ и $\vartheta'\in S_k$. Положим по индукции

$$c(\vartheta) = c(\theta_{k-1}) - 2\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{Re}[C(\vartheta) - C(\theta_{k-1})]}{\operatorname{Im}[C(\vartheta) - C(\theta_{k-1})]} \qquad \forall\vartheta\in S_k,\ k = 1,\dots,m,$$

где

$$c(0) := \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Re}[C(0)-1]}{\operatorname{Im}[C(0)-1]}\,.$$

Кроме того, пусть $\gamma_\lambda(\vartheta) = j(\vartheta) + c(\vartheta)$, $\vartheta \in [0, 2\pi]$. По построению $\Lambda(\vartheta) = e^{i\gamma_\lambda(\vartheta)}$, $\vartheta \in [0, 2\pi]$, $V_{\gamma_\lambda} \le V_\lambda \cdot 3\pi/2$. Наконец, полагая $\alpha_\lambda(\zeta) = \gamma_\lambda(\vartheta)$, если $\zeta = e^{i\vartheta}$, $\vartheta \in [0, 2\pi)$, получаем искомую функцию α_λ класса $\mathcal{BV}(\partial\mathbb{D})$. □

6. Проблема Римана–Гильберта для аналитических функций

Теорема 6.1. *Пусть $\lambda : \partial\mathbb{D} \to \partial\mathbb{D}$ — функция ограниченной вариации и $\varphi : \partial\mathbb{D} \to \mathbb{R}$ — функция измеримая относительно логарифмической ёмкости. Тогда существуют аналитические функции $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$, такие, что вдоль любых некасательных путей*

$$\lim_{z\to\zeta} \operatorname{Re}\{\overline{\lambda(\zeta)} \cdot f(z)\} \;=\; \varphi(\zeta) \qquad \text{для п.в.} \quad \zeta \in \partial\mathbb{D} \tag{6.1}$$

относительно логарифмической ёмкости.

Доказательство. Заметим, что по предложению 5.1 функция аргумента $\alpha_\lambda \in L^\infty(\partial\mathbb{D})$ поскольку $\lambda \in \mathcal{BV}(\partial\mathbb{D})$. Поэтому

$$g(z) \;=\; \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial\mathbb{D}} \alpha(\zeta)\, \frac{z+\zeta}{z-\zeta}\, \frac{d\zeta}{\zeta}, \qquad z \in \mathbb{D},$$

является аналитической функцией в $\mathbb{D}$ с $u(z) = \mathrm{R}e\ g(z) \to \alpha(\zeta)$ при $z \to \zeta$ вдоль любых некасательных путей в $\mathbb{D}$ для п.в. $\zeta \in \partial\mathbb{D}$, см., например, [16, следствие IX.1.1] и [17, теорема I.E.1]. Отметим, что $\mathcal{A}(z) = \exp\{ig(z)\}$ является аналитической функцией.

По теореме 5.1 существует функция $\beta : \partial\mathbb{D} \to \mathbb{R}$ конечная п.в. и измеримая относительно логарифмической ёмкости, такая, что $v(z) = \operatorname{Im} g(z) \to \beta(\zeta)$ при $z \to \zeta$ для п.в. $\zeta \in \partial\mathbb{D}$ также относительно логарифмической ёмкости вдоль любых некасательных путей. Таким образом, по следствию 4.1 существует аналитическая функция $\mathcal{B} : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$, такая, что $U(z) = \operatorname{Re}\mathcal{B}(z) \to \varphi(\zeta) \cdot \exp\{\beta(\zeta)\}$ при $z \to \zeta$ вдоль любых некасательных путей для п.в. $\zeta \in \partial\mathbb{D}$. Наконец, элементарные вычисления показывают, что искомая функция $f = \mathcal{A} \cdot \mathcal{B}$. □

По теореме Бейджмила, см. введение, мы получаем следующий результат непосредственно из теоремы 6.1, см. рассуждения при доказательстве теоремы 7.1 в более общей ситуации.

Теорема 6.2. *Пусть D — квазидиск в $\mathbb{C}$, $\lambda : \partial D \to \partial\mathbb{D}$ — функция ограниченной вариации и $\varphi : \partial D \to \mathbb{R}$ — функция измеримая относительно логарифмической ёмкости. Тогда существует аналитическая функция $f : D \to \mathbb{C}$, такая, что*

$$\lim_{z\to\zeta} \operatorname{Re}\,\{\overline{\lambda(\zeta)} \cdot f(z)\} \;=\; \varphi(\zeta) \qquad \textit{для п.в.} \quad \zeta \in \partial D \tag{6.2}$$

относительно логарифмической ёмкости в смысле единственного главного асимптотического значения.

В частности, выбирая $\lambda \equiv 1$ в (6.2), мы получаем следующее заключение.

Предложение 6.1. *Пусть D — квазидиск, и $\varphi : \partial D \to \mathbb{R}$ — функция измеримая относительно логарифмической ёмкости. Тогда существует аналитическая функция $f : D \to \mathbb{C}$, такая, что*

$$\lim_{z\to\zeta} \operatorname{Re} f(z) \;=\; \varphi(\zeta) \qquad \textit{для п.в.} \quad \zeta \in \partial D \tag{6.3}$$

относительно логарифмической ёмкости в смысле единственного главного асимптотического значения.

Следствие 6.1. *При условиях предложения* 6.1, *существует гармоническая функция* u *в D, такая, что в том же смысле*

$$\lim_{z\to\zeta} \mathrm{u}(z) \;=\; \varphi(\zeta) \qquad \textit{для п.в.} \quad \zeta \in \partial D. \tag{6.4}$$

Замечание 6.1. Как легко заметить, в данном разделе, по сравнению с работой [11], мы усиливаем как условия, так и заключения приведенных теорем, см. раздел 2. Заметим также, что в случае спрямляемой ∂D, условия (6.2)–(6.4) выполняются вдоль любых некасательных путей п.в. относительно натурального параметра, см. теорему 7.1.

7. Проблема Римана–Гильберта для уравнений Бельтрами

Теорема 7.1. *Пусть D — жорданова область в $\mathbb{C}$, ограниченная квазиконформной кривой, $\mu : D \to \mathbb{C}$ — измеримая (по Лебегу) функция с $\|\mu\|_\infty < 1$, $\lambda : \partial D \to \mathbb{C}$, $|\lambda(\zeta)| \equiv 1$, — функция ограниченной вариации и $\varphi : \partial D \to \mathbb{R}$ — функция, измеримая относительно логарифмической ёмкости. Тогда существует регулярное решение задачи Римана–Гильберта* (1.2) *для уравнения Бельтрами* (1.1). *Если ∂D — спрямляемая квазиконформная кривая, то предел в* (1.2) *имеет место п.в. относительно натурального параметра вдоль любых некасательных путей.*

В частности, последнее заключение в теореме 7.1 имеет место для гладких ∂D.

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что $0 \in D$ и $1 \in \partial D$. Продолжая μ нулем всюду вне D, получаем существование квазиконформного отображения $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ с нормировками $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ и $f(\infty) = \infty$, удовлетворяющего уравнению Бельтрами (1.1) с таким образом продолженным μ, см., например, [12, теорема V.B.3]. Жорданова область $f(D)$ по теоремам Римана и Каратеодори может быть отображена с помощью конформного отображения g на единичный круг $\mathbb{D}$ с нормировками $g(0) = 0$ и $g(1) = 1$. Ясно, что $h := g \circ f$ — квазиконформный гомеоморфизм с нормировками $h(0) = 0$ и $h(1) = 1$, удовлетворяющий тому же самому уравнению Бельтрами (1.1).

По принципу отражения для квазиконформных отображений, привлекая конформное отражение (инверсию) относительно единичной окружности в образе и квазиконформное отражение относительно ∂D в прообразе, мы можем продолжить h до квазиконформного отображения $H : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ с нормировками $H(0) = 0$, $H(1) = 1$ и $H(\infty) = \infty$, см., например, [13, I.8.4, II.8.2, II.8.3]. Отметим, что $\Lambda = \lambda \circ H^{-1}$ является функцией ограниченной вариации, $V_\Lambda(\partial\mathbb{D}) = V_\lambda(\partial D)$.

При отображениях H и H^{-1} множества логарифмической ёмкости нуль на ∂D переходят в множества логарифмической ёмкости нуль на $\partial\mathbb{D}$ и наоборот, поскольку квазиконформные отображения являются непрерывными по Гёльдеру на ∂D и $\partial\mathbb{D}$, соответственно, см., например, [13, теорема II.4.3].

Далее, функция $\Phi = \varphi \circ H^{-1}$ является измеримой относительно логарифмической ёмкости. Действительно, при указанных отображениях любые множества, измеримые относительно логарифмической ёмкости, переходят в множества, измеримые относительно логарифмической ёмкости, поскольку любое такое множество представимо в виде объединения сигма-компакта и множества логарифмической ёмкости нуль, а компакты при непрерывных отображениях переходят в компакты и являются измеримыми множествами относительно логарифмической ёмкости.

Поэтому исходная задача Римана–Гильберта для уравнения Бельтрами (1.1) сводится к задаче Римана–Гильберта для аналитических функций F в единичном круге:

$$\lim_{z\to\zeta} \overline{\Lambda(\zeta)} \cdot F(z) \ = \ \Phi(\zeta), \tag{7.1}$$

а по теореме 6.1 существует аналитическая функция $F : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$, для которой это граничное условие выполняется для п.в. $\zeta \in \partial\mathbb{D}$ относительно логарифмической ёмкости вдоль любых некасательных путей.

Таким образом, ввиду теоремы Бейджмила из введения, искомое регулярное решение исходной задачи Римана–Гильберта (1.2) для уравнения Бельтрами (1.1) существует и представимо в виде $f = F \circ H$.

Наконец, поскольку искажение углов при квазиконформных отображениях ограничено, см., например, [32–34], то в случае спрямляемой ∂D условие (1.2) можно понимать вдоль некасательных путей п.в. относительно натурального параметра. $\square$

Литература

[1] V. Gutlyanskii, V. Ryazanov, U. Srebro, E. Yakubov, *The Beltrami Equation: A Geometric Approach*, Developments in Mathematics, **26**, New York etc.: Springer, 2012.

[2] O. Martio, V. Ryazanov, U. Srebro, E. Yakubov, *Moduli in Modern Mapping Theory*, Springer Monographs in Mathematics, New York etc.: Springer, 2009.

[3] Д. А. Ковтонюк, И. В. Петков, В. И. Рязанов, *О граничном поведении решений уравнений Бельтрами* // Укр. матем. журн., **63** (2011), No. 8, 1078–1091.

[4] Д. А. Ковтонюк, И. В. Петков, В. И. Рязанов, *О задаче Дирихле для уравнений Бельтрами в конечносвязных областях* // Укр. матем. журн., **64** (2012), No. 7, 932–944.

[5] Д. А. Ковтонюк, И. В. Петков, В. И. Рязанов, Р. Р. Салимов, *Граничное поведение и задача Дирихле для уравнений Бельтрами* // Алгебра и анализ, **25** (2013), No. 4, 102–125.

[6] И. Н. Векуа, *Обобщенные аналитические функции*, М.: Физматгиз, 1959.

[7] D. Hilbert,*Über eine Anwendung der Integralgleichungen auf eine Problem der Funktionentheorie*, Verhandl. des III Int. Math. Kongr., Heidelberg, 1904.

[8] Ф. Д. Гахов, *Краевые задачи*, М.: Наука, 1977.

[9] Н. И. Мусхелишвили, *Сингулярные интегральные уравнения*, М.: Наука, 1968.

[10] D. Hilbert, *Grundzüge einer algemeinen Theorie der Integralgleichungen*, Leipzig, Berlin, 1912.

[11] V. I. Ryazanov, *On the Riemann–Hilbert Problem without Index* // Ann. Univ. Bucharest, Ser. Math., **LXIII** (2014), No. 5, 169–178.

[12] Л. Альфорс, *Лекции по квазиконформным отображениям*, М.: Мир, 1969.

[13] O. Lehto, K. J. Virtanen, *Quasiconformal mappings in the plane*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1973.

[14] F. Bagemihl, *Curvilinear cluster sets of arbitrary functions* // Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A, **41** (1955), 379–382.

[15] К. Носиро, *Предельные множества*, М.: ИЛ, 1963.

[16] Г. М. Голузин, *Геометрическая теория функций комплексного переменного*, М.: Наука, 1966.

[17] П. Кусис, *Введение в теорию пространств* H^p, М.: Мир, 1984.

[18] Л. Карлесон, *Избранные проблемы теории исключительных множеств*, М.: Мир, 1971.

[19] Р. Неванлинна, *Однозначные аналитические функции*, ОГИЗ, Москва, 1941.

[20] M. Fékete, *Über die Verteilung der Wurzeln bei gewissen algebraischen Gleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten* // Math. Z., **17** (1923), 228–249.

[21] С. Сакс, *Теория интеграла*, М.: ИЛ, 1949.

[22] Г. Федерер, *Геометрическая теория меры*, М.: Наука, 1987.

[23] D. R. Adams, L. I. Hedberg, *Function spaces and potential theory*, Springer-Verlag, Berlin, 1996.

[24] J. B. Twomey, *The Hilbert transformation and fine continuity* // Irish Math. Soc. Bulletin, **58** (2006) 81–91.

[25] Б. Гелбаум, Дж. Олмстед, *Контрпримеры в анализе*, М.: Мир, 1967.

[26] F. W. Gehring, *On the Dirichlet problem* // Michigan Math. J., **3** (1955–1956), 201.

[27] А. Зигмунд, *Тригонометрические ряды*, М.: НКТП, 1939.

[28] M. Riesz, *Sur les fonctions conjuguees* // Math. Z., **27** (1927), 218–244.

[29] И. П. Натансон, *Теория функций вещественной переменной*, М.: Наука, 1974.

[30] У. Рудин, *Основы математического анализа*, М.: Мир, 1966.

[31] Н. К. Бари, *Тригонометрические ряды*, М.: ФМ, 1961.

[32] S. B. Agard, F. W. Gehring, *Angles and quasiconformal mappings* // Proc. London Math. Soc., **14a** (1965), No. 3, 1–21.

[33] S. Agard, *Angles and quasiconformal mappings in space* // J. Anal. Math., **22** (1969), 177–200.

[34] O. Taari, *Charakterisierung der Quasikonformität mit Hilfe der Winkelverzerrung* // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I., **390** (1966), 1–43.

Сведения об авторах

Артем С. Ефимушкин, Владимир Ильич Рязанов

Институт прикладной математики и механики НАН Украины

E-Mail: art.89@bk.ru, vl_ryazanov@mail.ru