Український математичний вісник
Том 12 **(2015)**, № 1, 109 – 146

О существовании ограниченных обобщенных решений задачи Дирихле для одного класса нелинейных эллиптических уравнений высокого порядка

Михаил В. Войтович

(*Представлена А. Е. Шишковым*)

Аннотация. Рассматривается класс нелинейных эллиптических уравнений высокого порядка с главными коэффициентами, удовлетворяющими условию усиленной коэрцитивности, и младшим коэффициентом, допускающим произвольный рост относительно неизвестной функции и рост порядков, совпадающих с показателями соответствующего уравнениям энергетического пространства, относительно производных этой функции. Устанавливается теорема существования ограниченных обобщенных решений задачи Дирихле для уравнений рассматриваемого класса.

2010 MSC. 35B45, 35B65, 35J40, 35J62.

Ключевые слова и фразы. Нелинейные эллиптические уравнения высокого порядка, усиленная коэрцитивность, задача Дирихле, обобщенное решение, L^∞-оценка решения.

1. Введение

Пусть Ω — ограниченное открытое множество в $\mathbb{R}^n$, $n > 1$. При изучении ограниченности и непрерывности обобщенных решений $u \in W^{m,p}(\Omega)$ квазилинейных уравнений дивергентного вида

$$\sum_{|\alpha|\leqslant m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \mathcal{A}_\alpha(x, u, \ldots, D^m u) = 0, \qquad (1.1)$$

где $m > 1$, $p > 1$, $x \in \Omega$, $D^k u = \{D^\alpha u : |\alpha| = k\}$, обычно предполагают, что функции $\mathcal{A}_\alpha(x, \xi)$, где $\xi = \{\xi_\alpha \in \mathbb{R} : |\alpha| \leqslant m\}$, удовлетворяют

Статья поступила в редакцию 8.04.2014

условиям Каратеодори, и с положительными постоянными c_1, c_2, c_3 выполнены неравенства

$$|\mathcal{A}_\alpha(x,\xi)| \leqslant c_1\biggl(1 + \sum_{|\beta|\leqslant m} |\xi_\beta|^{p-1}\biggr), \tag{1.2}$$

$$\sum_{|\alpha|=m} \mathcal{A}_\alpha(x,\xi)\xi_\alpha \geqslant c_2 \sum_{|\alpha|=m} |\xi_\alpha|^p - c_3\biggl(1 + \sum_{|\beta|<m} |\xi_\beta|^p\biggr). \tag{1.3}$$

Известно (см. [1]), что при $m = 1$ условия (1.2) и (1.3) гарантируют ограниченность и непрерывность обобщенных решений уравнения (1.1), а при $m \geqslant 2$ возникает дополнительное условие $n = mp$. Если $n < mp$, то непрерывность решений следует из теоремы вложения С. Л. Соболева [2, гл. I]. При $n = mp$ теорема вложения не обеспечивает ограниченности решения. В этом случае ограниченность произвольного обобщенного решения $u \in \overset{\circ}{W}{}^{m,p}(\Omega)$ уравнения (1.1) с условиями (1.2), (1.3) на коэффициенты доказали Й. Фрезе [3] и К.-О. Видман [4]. И. В. Скрыпником при тех же условиях была получена непрерывность каждого обобщенного решения [5, гл. II, § 3]. Гельдеровость решения изучалась при близких предположениях в работах К.-О. Видмана [6] и В. А. Солонникова [7]. Наконец, в случае $n > mp$ существуют примеры уравнений вида (1.1)–(1.3) с неограниченными решениями (см., например, [5, гл. I, § 1]).

Вместе с тем, в случае $n > mp$ в работе И. В. Скрыпника [8] был выделен класс уравнений вида (1.1), все обобщенные решения которых ограничены и непрерывны по Гельдеру. Выделенный класс уравнений характеризуется тем, что для него условие (1.3) заменяется условием усиленной коэрцитивности, которое в модельном случае имеет вид

$$\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant m} \mathcal{A}_\alpha(x,\xi)\xi_\alpha \geqslant C\biggl(\sum_{|\alpha|=m} |\xi_\alpha|^p + \sum_{|\alpha|=1} |\xi_\alpha|^q\biggr),$$

$C > 0$, $p \geqslant 2$ и $mp < q < n$. Также предполагается выполнение подходящих условий роста на коэффициенты $\mathcal{A}_\alpha$, $|\alpha| \leqslant m$, которые позволяют определить обобщенное решение уравнения (1.1) из пространства $W^{m,p}(\Omega) \cap W^{1,q}(\Omega)$. В частности предполагается, что младший коэффициент $\mathcal{A}_0$ может иметь рост порядка, меньшего $nq/(n-q) - 1$, относительно функции u, порядка, квалифицированно меньшего q, относительно производных $D^\alpha u$ с $|\alpha| = 1$ и порядка, квалифицированно меньшего p, относительно производных $D^\alpha u$ с $|\alpha| = m$.

Отметим, что ограниченность обобщенных решений в [8] была установлена с помощью некоторой модификации метода Ю. Мозера [9]. Основываясь на других идеях, а именно используя аналог метода Г. Стампаккья [10], в работе [11] для нелинейных уравнений четвертого порядка с усиленной коэрцитивностью, установлено более слабое по сравнению с [8] условие относительно интегрируемости данных, обеспечивающее ограниченность обобщенных решений, а также получены результаты, показывающие как повышается суммируемость этих решений в зависимости от изменения показателя интегрируемости данных. Аналогичные результаты для нелинейных эллиптических уравнений высшего порядка с усиленной коэрцитивностью установлены в [12].

В настоящей работе рассматривается класс нелинейных уравнений (1.1) порядка $2m$, $m \geqslant 3$ с набором коэффициентов порядков 1 и m, удовлетворяющим условию усиленной коэрцитивности, некоторому условию монотонности, и младшим коэффициентом, допускающим, в отличие от [8, 11, 12], произвольный рост относительно функции u, рост порядка q относительно производных $D^\alpha u$ с $|\alpha| = 1$ и рост порядка p относительно производных $D^\alpha u$ с $|\alpha| = m$. При этом относительно младшего коэффициента предполагается выполненным "знаковое" условие типа $\mathcal{A}_0(x, u, \dots, D^m u)u \geqslant 0$. Модельным примером уравнения из рассматриваемого класса является следующее уравнение:

$$(-1)^m \mathcal{D}_{m,p} u - \Delta_q u + u|u|^\gamma \biggl(\sum_{|\alpha|=1} |D^\alpha u|^q + \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha u|^p \biggr) = f \quad \text{в} \quad \Omega,$$

где $\gamma > 0$,

$$\Delta_q u = \sum_{|\alpha|=1} D^\alpha \biggl[\biggl(\sum_{|\beta|=1} |D^\beta u|^2 \biggr)^{(q-2)/2} D^\alpha u \biggr],$$

$$\mathcal{D}_{m,p} u = \sum_{|\alpha|=m} D^\alpha \biggl[\biggl(\sum_{|\beta|=m} |D^\beta u|^2 \biggr)^{(p-2)/2} D^\alpha u \biggr].$$

Основной результат статьи — теорема существования ограниченных обобщенных решений задачи Дирихле для изучаемых уравнений.

Аналогичные результаты для уравнений четвертого порядка ($m = 2$) были установлены ранее в работах [13, 14], причем, в [14], в отличие от [13], не допускался произвольный рост младшего члена $\mathcal{A}_0(x, u, Du, D^2 u)$ по u и не предполагалось выполнение "знакового" условия $\mathcal{A}_0(x, u, Du, D^2u)u \geqslant 0$. Вместо этого в левой части уравнений, рассматриваемых в [14], присутствовал абсорбционный член типа $c_0|u|^{q-2}u$, $c_0 > 0$.

В данной работе, по сравнению с [13], возникает ряд новых моментов и трудностей, связанных с рассмотрением уравнений произвольного четного порядка $2m$, $m \geqslant 3$. Так, для получения L^∞-оценки решения следует обобщить и дополнить новыми свойствами конструкцию пробных функций из [11]. В частности, это необходимо для получения подходящих оценок интегралов, возникающих после подстановки пробных функций в соответствующее интегральное тождество и содержащих промежуточные производные $D^\alpha u$, $2 \leqslant |\alpha| \leqslant m-1$, решения u. При этом используются неравенство Ниренберга–Гальярдо (см. ниже (2.4)) и интегрирование по частям, аналогичное изложенному в [8]. Однако, использование этого приема связано с дополнительным ограничением на показатели q_α суммируемости промежуточных производных $D^\alpha u$ в неравенстве Ниренберга–Гальярдо [15]: $q_\alpha > 2$. Последнее неравенство выполнено, если $p \geqslant 2$. Это условие отсутствует при $m = 2$. Просто предполагается, что $p \in (1, n/2)$ и $q \in (2p, n)$. В случае $m \geqslant 3$ ограничение $p \geqslant 2$ в [8] можно несколько ослабить (но не заменить на $p > 1$, см. ниже п. 2.1), если, сохраняя неравенства $mp < q < n$, выбирать параметры n, p и q так, чтобы $\min q_\alpha > 2$, $2 \leqslant |\alpha| \leqslant m - 1$.

Существование и L^∞-оценки ограниченных решений нелинейных эллиптических уравнений второго порядка с младшим коэффициентом, допускающим произвольный рост относительно неизвестной функции и (или) рост порядка, совпадающего с показателем соответствующего энергетического пространства, относительно градиента этой функции, установлены, например, в [16–18].

Наконец, в связи с условием усиленной коэрцитивности отметим, что теория существования и свойств решений нелинейных эллиптических уравнений высоких порядков с коэффициентами, удовлетворяющими такому условию, и L^1-правыми частями развита в работах [19–21].

Структура настоящей работы такова. В разделе 2 дана постановка рассматриваемой задачи и сформулированы главные результаты статьи (теоремы 2.1 и 2.2). В этом же разделе приводится ряд дополнительных замечаний и представлены некоторые вспомогательные результаты. Доказательства теорем 2.1 и 2.2 излагаются в разделах 4 и 3 соответственно. Наконец, в разделе 5 представлен пример уравнения, удовлетворяющего всем условиям теоремы 2.1.

2. Формулировка основных результатов

2.1. Исходные предположения

Пусть $m, n \in \mathbb{N}$, $m \geqslant 3$, $n > 2(m-1)$. Из этих неравенств следует, что $n(m-1)-2>0$ и

$$\frac{2n(m-2)}{n(m-1)-2} < \frac{2(m-1)}{m} < \frac{n}{m}, \qquad 1 < \frac{2n(m-2)}{n(m-1)-2} < 2.$$

Пусть $p \in \mathbb{R}$, причем

$$\frac{2n(m-2)}{n(m-1)-2} < p < \frac{n}{m}. \tag{2.1}$$

Из (2.1) следует, что $p(m-1)-2(m-2)>0$.

Положим

$$\bar{p} = \frac{2p}{p(m-1)-2(m-2)}.$$

В силу (2.1) имеем $\max(\bar{p}, mp) < n$.

Пусть $q \in \mathbb{R}$, причем $\max(\bar{p}, mp) < q < n$.

Если $p < 2(m-1)/m$, то $\bar{p} > mp$; если же $p \geqslant 2(m-1)/m$, то $\bar{p} \leqslant mp$.

Отметим, что сделанные предположения относительно чисел m, n, p и q — такие же, как и в работе [19].

2.2. Функциональные пространства

Пусть Ω — ограниченное открытое множество в $\mathbb{R}^n$. Положим $q^* = nq/(n-q)$. Как известно (см., например, [1, гл. II])

$$\mathring{W}^{1,q}(\Omega) \subset L^{q^*}(\Omega), \tag{2.2}$$

и существует положительная постоянная c, зависящая только от n и q, такая, что для любой функции $u \in \mathring{W}^{1,q}(\Omega)$

$$\left(\int\limits_\Omega |u|^{q^*} dx \right)^{1/q^*} \leqslant c \left(\sum_{|\alpha|=1} \int\limits_\Omega |D^\alpha u|^q dx \right)^{1/q}. \tag{2.3}$$

Через $W^{1,q}_{m,p}(\Omega)$ обозначим множество всех функций $u \in W^{1,q}(\Omega)$, имеющих обобщенные производные порядка m из $L^p(\Omega)$. Множество $W^{1,q}_{m,p}(\Omega)$ есть банахово пространство с нормой

$$\|u\| = \|u\|_{W^{1,q}(\Omega)} + \left(\sum_{|\alpha|=m} \int\limits_\Omega |D^\alpha u|^p dx \right)^{1/p}.$$

Через $\overset{\circ}{W}{}^{1,q}_{m,p}(\Omega)$ обозначим замыкание в $W^{1,q}_{m,p}(\Omega)$ множества $C_0^\infty(\Omega)$.

Пусть Λ_m — множество всех n-мерных мультииндексов α таких, что $1 \leqslant |\alpha| \leqslant m$, а $|\Lambda_m|$ — число элементов множества Λ_m.

Для любого $\alpha \in \Lambda_m$ положим

$$q_\alpha = \left[\frac{|\alpha|-1}{p(m-1)} + \frac{m-|\alpha|}{q(m-1)}\right]^{-1}.$$

Имеет место следующий результат (см., например, [19]).

Лемма 2.1. *Пусть $u \in \overset{\circ}{W}{}^{1,q}_{m,p}(\Omega)$. Тогда для любого $\beta \in \Lambda_m$, $2 \leqslant |\beta| \leqslant m-1$, существует обобщенная производная $D^\beta u \in L^{q_\beta}(\Omega)$, и справедливо следующее неравенство:*

$$\left(\int\limits_\Omega |D^\beta u|^{q_\beta} dx\right)^{1/q_\beta} \leqslant c_{n,m}\left(\sum_{|\alpha|=m}\int\limits_\Omega |D^\alpha u|^p dx\right)^{\frac{|\beta|-1}{p(m-1)}} \times \left(\sum_{|\alpha|=1}\int\limits_\Omega |D^\alpha u|^q dx\right)^{\frac{m-|\beta|}{q(m-1)}}, \tag{2.4}$$

где положительное число $c_{n,m}$ зависит только от m и n.

Неравенство (2.4) есть известное интерполяционное неравенство Ниренберга–Гальярдо [15].

Следующий результат (см. [19]) будет полезен при рассмотрении последовательностей, слабо сходящихся в $\overset{\circ}{W}{}^{1,q}_{m,p}(\Omega)$.

Лемма 2.2. *Пусть $\{u_i\} \subset \overset{\circ}{W}{}^{1,q}_{m,p}(\Omega)$, $u \in \overset{\circ}{W}{}^{1,q}_{m,p}(\Omega)$, и пусть $u_i \to u$ слабо в $\overset{\circ}{W}{}^{1,q}_{m,p}(\Omega)$. Пусть для любого $\beta \in \Lambda_m$, $1 \leqslant |\beta| \leqslant m-1$, $\tilde{q}_\beta \in (1, q_\beta)$. Тогда $D^\beta u_i \to D^\beta u$ сильно в $L^{\tilde{q}_\beta}(\Omega)$.*

2.3. Постановка задачи и существование решений

Будем использовать еще такие обозначения: $\mathbb{R}^{n,m}$ — пространство всех отображений $\xi : \Lambda_m \to \mathbb{R}$; если $u \in W^{m,1}(\Omega)$, то $\nabla_m u : \Omega \to \mathbb{R}^{n,m}$, причем для любых $x \in \Omega$ и $\alpha \in \Lambda_m$ имеем $(\nabla_m u(x))_\alpha = D^\alpha u(x)$. Если $r \in [1, +\infty]$, то $\|\cdot\|_r$ — норма в $L^r(\Omega)$ и $r' = r/(r-1)$, если $r \in (1, +\infty)$. Для любого измеримого по Лебегу множества $E \subset \Omega$ будем обозначать через $\operatorname{meas} E$ его n-мерную меру Лебега.

Пусть c_1, c_2, $c_3 > 0$, g_1, g_2 — неотрицательные суммируемые функции на Ω, а числа p_α определяются следующим образом:

$$\frac{1}{p_\alpha} = \frac{|\alpha| - 1}{p(m-1)} + \frac{m - |\alpha|}{q_1(m-1)}, \quad \text{если} \quad 2 \leqslant |\alpha| \leqslant m, \tag{2.5}$$

$$p_\alpha = q, \quad \text{если} \quad |\alpha| = 1, \tag{2.6}$$

где q_1 — число, удовлетворяющее неравенству

$$\max(\bar{p}, mp) < q_1 < q < n. \tag{2.7}$$

Пусть для любого $\alpha \in \Lambda_m$ $A_\alpha : \Omega \times \mathbb{R}^{n,m} \to \mathbb{R}$ — функция Каратеодори. Будем предполагать, что для почти всех $x \in \Omega$ и любого $\xi \in \mathbb{R}^{n,m}$, справедливы неравенства

$$\sum_{\alpha \in \Lambda_m} |A_\alpha(x, \xi)|^{p_\alpha/(p_\alpha - 1)} \leqslant c_1 \sum_{\alpha \in \Lambda_m} |\xi_\alpha|^{p_\alpha} + g_1(x), \tag{2.8}$$

$$\sum_{|\alpha|=1,m} A_\alpha(x, \xi)\xi_\alpha \geqslant c_2 \Big\{ \sum_{|\alpha|=1} |\xi_\alpha|^q + \sum_{|\alpha|=m} |\xi_\alpha|^p \Big\} - c_3 \sum_{2 \leqslant |\alpha| \leqslant m-1} |\xi_\alpha|^{p_\alpha} - g_2(x). \tag{2.9}$$

Далее, пусть g_3 и g_4 — неотрицательные суммируемые функции на Ω, b — неотрицательная непрерывная функция на $\mathbb{R}_+$ и $B : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n,m} \to \mathbb{R}$ — функция Каратеодори, такая что для почти всех $x \in \Omega$ и любых $s \in \mathbb{R}$ и $\xi \in \mathbb{R}^{n,m}$ справедливы неравенства

$$|B(x, s, \xi)| \leqslant b(|s|) \sum_{\alpha \in \Lambda_m} |\xi_\alpha|^{p_\alpha} + g_3(x), \tag{2.10}$$

$$B(x, s, \xi)s \geqslant -g_4(x). \tag{2.11}$$

Пусть

$$f \in L^{q^*/(q^*-1)}(\Omega). \tag{2.12}$$

Рассмотрим следующую задачу Дирихле:

$$\sum_{\alpha \in \Lambda_m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha A_\alpha(x, \nabla_m u) + B(x, u, \nabla_m u) = f \quad \text{в} \quad \Omega, \tag{2.13}$$

$$D^\alpha u = 0, \quad |\alpha| \leqslant m - 1, \quad \text{на} \quad \partial\Omega. \tag{2.14}$$

Заметим, что в силу (2.4)–(2.8) для любых функций u, $v \in \mathring{W}^{1,q}_{m,p}(\Omega)$ и $\alpha \in \Lambda_m$ функция $A_\alpha(x, \nabla_m u) D^\alpha v$ суммируема на Ω, а в силу (2.4)–(2.7) и (2.10) для любых функций u, $v \in \overset{\circ}{W}{}^{1,q}_{m,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ функция $B(x, u, \nabla_m u)v$ суммируема на Ω. Кроме того, из (2.2) и (2.12) вытекает, что для любой функции $v \in \overset{\circ}{W}{}^{1,q}_{m,p}(\Omega)$ функция fv суммируема на Ω.

Определение 2.1. *Обобщенным решением задачи* (2.13), (2.14) *будем называть функцию* $u \in \overset{\circ}{W}{}^{1,q}_{m,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ *такую, что для любой функции* $v \in \overset{\circ}{W}{}^{1,q}_{m,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$

$$\int\limits_\Omega \Big\{ \sum_{\alpha \in \Lambda_m} A_\alpha(x, \nabla_m u) D^\alpha v + B(x, u, \nabla_m u)v \Big\} dx = \int\limits_\Omega fv dx. \tag{2.15}$$

Наряду с уравнением (2.13) будем ещё рассматривать уравнение

$$\sum_{\alpha \in \Lambda_m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha A_\alpha(x, \nabla_m u) + A_0(x, u, \nabla_m u) = f \quad \text{в} \quad \Omega, \tag{2.16}$$

где $A_0 : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n,m} \to \mathbb{R}$ — функция Каратеодори и существует константа $L > 0$, такая что для почти всех $x \in \Omega$ и любых $s \in \mathbb{R}$ и $\xi \in \mathbb{R}^{n,m}$ справедливо неравенство $|A_0(x, s, \xi)| \leqslant L$.

Определение 2.2. *Обобщенным решением задачи* (2.16), (2.14) *будем называть функцию* $u \in \overset{\circ}{W}{}^{1,q}_{m,p}(\Omega)$ *такую, что для любой функции* $v \in \overset{\circ}{W}{}^{1,q}_{m,p}(\Omega)$

$$\int\limits_\Omega \Big\{ \sum_{\alpha \in \Lambda_m} A_\alpha(x, \nabla_m u) D^\alpha v + A_0(x, u, \nabla_m u)v \Big\} dx = \int\limits_\Omega fv dx. \tag{2.17}$$

Следующая теорема является основным результатом данной статьи.

Теорема 2.1. *Пусть* $r > n/q$, *функции* g_1, g_2, g_4 *и* f *принадлежат* $L^r(\Omega)$ *и* M — *мажоранта для* $\|g_1\|_r$, $\|g_2\|_r$, $\|g_4\|_r$ *и* $\|f\|_r$. *Предположим, что для почти всех* $x \in \Omega$ *и любых* $\xi, \xi' \in \mathbb{R}^{n,m}$, $\xi \neq \xi'$, *справедливо неравенство*

$$\sum_{|\alpha|=1,m} [A_\alpha(x, \xi) - A_\alpha(x, \xi')](\xi_\alpha - \xi'_\alpha)$$
$$> -c_4 \sum_{1 \leqslant |\alpha| \leqslant m-1} (1 + |\xi_\alpha| + |\xi'_\alpha|)^{r_\alpha - \tilde{r}_\alpha} |\xi_\alpha - \xi'_\alpha|^{\tilde{r}_\alpha}, \tag{2.18}$$

где $c_4 > 0$ *и для любого* $\alpha \in \Lambda_m$, $1 \leqslant |\alpha| \leqslant m-1$, r_α *и* $\tilde{r}_\alpha$ *— числа такие, что* $0 < \tilde{r}_\alpha \leqslant r_\alpha < q_\alpha$. *Тогда существует обобщенное решение* u_0 *задачи* (2.13), (2.14) *такое, что* $\|u_0\|_\infty \leqslant C_1$, *где* C_1 *— положительное число, зависящее только от* n, m, p, q, q_1, $\operatorname{meas}\Omega$, c_1, c_2, c_3, r *и* M.

Доказательство теоремы 2.1 будет дано в разделе 4. Оно основано на рассмотрении последовательности аппроксимирующих задач для уравнений с ограниченными младшими коэффициентами, получении равномерной ограниченности их решений и последующем предельном переходе. При этом, разрешимость аппроксимирующих задач устанавливается с помощью результатов [22] о разрешимости уравнений с псевдомонотонными операторами. Предельный переход в интегральных тождествах, соответствующих аппроксимирующим задачам, осуществляется с использованием идей работ [17, 20, 23]. Равномерная ограниченность последовательности решений аппроксимирующих задач устанавливается с помощью следующей теоремы.

Теорема 2.2. *Пусть* $r > n/q$, *функции* g_1, g_2, g_4 *и* f *принадлежат* $L^r(\Omega)$ *и* M *— мажоранта для* $\|g_1\|_r$, $\|g_2\|_r$, $\|g_4\|_r$ *и* $\|f\|_r$. *Предположим, что для почти всех* $x \in \Omega$ *и любых* $s \in \mathbb{R}$ *и* $\xi \in \mathbb{R}^{n,m}$ *справедливо неравенство*

$$A_0(x, s, \xi)s \geqslant -g_4(x). \tag{2.19}$$

Пусть u *— обобщенное решение задачи* (2.16), (2.14). *Тогда* $u \in L^\infty(\Omega)$ *и*

$$\|u\|_\infty \leqslant C_2, \tag{2.20}$$

где C_2 *— положительная константа, зависящая только от* n, m, p, q, q_1, $\operatorname{meas}\Omega$, c_1, c_2, c_3, r *и* M.

Доказательство теоремы 2.2 будет дано в разделе 3. Перед этим сделаем несколько замечаний.

Замечание 2.1. Если $p \geqslant 2$, $r > n/q$, $\kappa > n^2/(nq - n + q)$, g_1, $g_2 \in L^r(\Omega)$ и $f \in L^\kappa(\Omega)$, то ограниченность обобщенных решений задачи (2.16), (2.14) следует из [8]. Поскольку $n^2/(nq - n + q) > n/q$, теорема 2.2 дает более слабое (точное) по сравнению с [8] условие относительно суммируемости правой части уравнения (2.16), при котором все обобщенные решения задачи (2.16), (2.14) ограничены. Это условие ($r > n/q$) совпадает с условием ограниченности обобщенных решений уравнений четвертого порядка с усиленной эллиптичностью [11] и уравнений второго порядка [1].

Замечание 2.2. Доказательство теоремы 2.2 связано с подходом, который применялся в работах [11–14]. Этот подход подобен методу Г. Стампаккья для эллиптических уравнений второго порядка, и использует аналоги его известной леммы (см., например, [10] или [24]). Сформулируем здесь один из этих аналогов, который установлен в [11] и будет использован в данной статье.

Лемма 2.3. *Пусть φ — невозрастающая неотрицательная функция на $[0, +\infty)$. Пусть $C > 0$, $0 \leqslant \tau_1 < \tau_2$, $\gamma > 1$ и $k_0 \geqslant 0$. Пусть для любых k и l таких, что $k_0 < k < l < 2k$, справедливо неравенство*

$$\varphi(l) \leqslant \frac{Ck^{\tau_1}}{(l-k)^{\tau_2}} [\varphi(k)]^{\gamma}. \tag{2.21}$$

Пусть $\vartheta > k_0$ и

$$\vartheta^{\tau_2 - \tau_1} \geqslant 2^{\tau_1 + (2\gamma - 1)\tau_2/(\gamma - 1)} C [\varphi(k_0)]^{\gamma - 1}.$$

Тогда $\varphi(k_0 + \vartheta) = 0$.

Значение леммы 2.3 состоит в следующем. В интегральное тождество (2.17), соответствующее решению u подставляется функция $v = u - h_k(u)$, где $h_k \in C^m(\mathbb{R})$, $k > 0$ — некоторая нечетная "срезающая" функция такая, что $h_k(s) = s$, если $|s| \leqslant k$, и $h'_k(s) = 0$, если $|s| \geqslant 2k$. Затем с использованием структуры уравнения (т. е. условий (2.5)–(2.9), (2.19)), структуры функции h_k (в частности на множестве $k \leqslant |s| \leqslant 2k$) и условий на суммируемость функций g_1, g_2, g_4 и f ($\in L^r(\Omega)$, $r > n/q$) устанавливается соотношение (2.21) с функцией $\varphi(k) = \operatorname{meas}\{|u| \geqslant k\}$, константой $C > 0$, не зависящей от u, и числом $\gamma > 1$, зависящим, в частности, от показателя суммируемости r. Поэтому применение леммы 2.3 в такой ситуации позволяет установить неравенство (2.20).

3. Доказательство теоремы 2.2

Пусть $r > n/q$, функции g_1, g_2, g_4 и f принадлежат $L^r(\Omega)$ и M — мажоранта для $\|g_1\|_r$, $\|g_2\|_r$, $\|g_4\|_r$ и $\|f\|_r$. Пусть u — обобщенное решение задачи (2.16), (2.14), и пусть φ — функция на $[0, +\infty)$ такая, что для любого $s \in [0, +\infty)$

$$\varphi(s) = \operatorname{meas}\{|u| \geqslant s\}.$$

Наша главная цель — установление соотношения вида (2.21) для этой функции.

Через c_i, $i = 5, 6, \dots$, будем обозначать положительные числа, зависящие только от n, m, p, q, q_1, $\operatorname{meas}\Omega$, c_1, c_2, c_3, r и M.

Шаг 1. Введем ряд вспомогательных чисел и функций. В силу предположения относительно числа r имеем $(r-1)/r - 1/q^* > 0$. Положим

$$r_1 = \left(\frac{r-1}{r} - \frac{1}{q^*}\right)^{-1}, \tag{3.1}$$

$$\gamma = q^* \min\left\{\frac{1}{r_1(q-1)}\,,\ \frac{r-1}{rq}\right\}. \tag{3.2}$$

В силу (3.1) имеем

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r} + \frac{1}{q^*} = 1. \tag{3.3}$$

Кроме того, из определения чисел r_1 и γ и неравенства $r > n/q$ вытекает, что

$$\gamma > 1. \tag{3.4}$$

Положим

$$\Phi = \sum_{|\alpha|=1} |D^\alpha u|^q + \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha u|^p$$

и заметим, что

$$\int\limits_\Omega \Big\{\sum_{\alpha\in\Lambda_m} |D^\alpha u|^{p_\alpha}\Big\} dx \leqslant c_5\,. \tag{3.5}$$

Действительно, поскольку u – обобщенное решение задачи (2.16), (2.14), в силу (2.17) имеем

$$\int\limits_\Omega \Big\{\sum_{\alpha\in\Lambda_m} A_\alpha(x, \nabla_m u) D^\alpha u + A_0(x, u, \nabla_m u) u\Big\} dx = \int\limits_\Omega f u dx.$$

Отсюда, используя (2.8), (2.9), (2.19) и неравенство Юнга, получаем

$$\frac{c_2}{2}\int\limits_\Omega \Phi dx \leqslant \int\limits_\Omega f u dx + c_6 \int\limits_\Omega (g_1 + g_2 + g_4) dx$$
$$+ c_7 \int\limits_\Omega \Big\{\sum_{2\leqslant|\alpha|\leqslant m-1} |D^\alpha u|^{p_\alpha}\Big\} dx.$$

Из этого неравенства, оценивая первое слагаемое в его правой части с помощью неравенств Гельдера, Юнга и (2.3), а третье — с помощью неравенств Юнга и (2.4), выводим оценку

$$\int\limits_\Omega \Phi dx \leqslant c_8. \tag{3.6}$$

Теперь из неравенства (2.4) с помощью неравенств Юнга и (3.6) выводим оценку (3.5).

Далее, положим

$$d = (m-1)^2 q_1 p/(q_1 - mp), \quad \theta = (2qd/(q-q_1)) \sum_{i=0}^{m-2} (n/p)^i, \qquad (3.7)$$

$$t = 1 + (m-1)(d+\theta)r\,. \qquad (3.8)$$

В силу (2.3) и (3.5) для любого $k > 0$ имеем $k^{q^*}\varphi(k) \leqslant c^{q^*} c_5^{q^*/q}$. Следовательно, существует положительное число $k_0 \geqslant 1$, зависящее только от n, m, p, q, q_1, $\operatorname{meas}\Omega$, c_1, c_2, c_3, r и M, такое, что

$$\forall\, k \geqslant k_0 \qquad \varphi(k) < (1/2)^{t-1}. \qquad (3.9)$$

Шаг 2. Зафиксируем произвольное число $k \geqslant k_0$. На этом этапе доказательства будет определена "срезающая" функция h_k, о которой шла речь в замечании 2.2 и которая будет использована в дальнейших рассуждениях.

Пусть Ψ_0 — функция на $[0,1]$ такая, что для любого $s \in [0,1]$

$$\Psi_0(s) = \int_0^s \rho^t (1-\rho)^t d\rho.$$

Положим $a = 1/\Psi_0(1)$ и пусть Ψ — функция на $[0,1]$ такая, что для любого $s \in [0,1]$

$$\Psi(s) = s - a \int_0^s \Psi_0(\rho) d\rho\,.$$

Через K_i, $i = 1, 2, \ldots,$ будем обозначать положительные числа, зависящие только от t и m.

Заметим, что справедливы следующие утверждения:

если $\varepsilon \in (0, 1/2)$ и $s \in [0,\varepsilon] \cup [1-\varepsilon, 1]$, то

$$|\Psi^{(i)}(s)| \leqslant K_1 \varepsilon^{t-i+2}, \quad i = 2, 3, \ldots, m; \qquad (3.10)$$

если $\varepsilon \in (0, 1/2)$ и $s \in [\varepsilon, 1-\varepsilon]$, то

$$|\Psi^{(i)}(s)| \leqslant K_2 (1 - \Psi'(s))/\varepsilon^{i-1}, \; i = 2, 3, \ldots, m. \qquad (3.11)$$

Действительно, пусть $\varepsilon \in (0, 1/2)$, $s \in [0,\varepsilon] \cup [1-\varepsilon, 1]$. Тогда

$$|\Psi''(s)| = a\, s^t (1-s)^t \leqslant a\, \varepsilon^t$$

и утверждение (3.10) доказано для $i = 2$. При $i = 3, 4, \dots, m$ для доказательства утверждения (3.10) положим для любого $s \in [0,1]$ $w(s) = s^t$ и $\nu(s) = (1-s)^t$. Зафиксируем целые числа i и j такие, что $3 \leqslant i \leqslant m$, $0 \leqslant j \leqslant i-2$. Для любого $s \in [0,1]$ имеем

$$w^{(j)}(s) = t\,(t-1)\cdots(t-j+1)\,s^{t-j}, \tag{3.12}$$

$$\nu^{(i-2-j)}(s) = (-1)^{i-2-j} t\,(t-1)\cdots(t-i+j+3)\,(1-s)^{t-i+j+2}. \tag{3.13}$$

Если теперь $s \in [0,\varepsilon] \cup [1-\varepsilon, 1]$, то из (3.12) и (3.13) следует, что

$$|w^{(j)}(s)\,\nu^{(i-2-j)}(s)| \leqslant K_3\,\varepsilon^{t-i+2}.$$

Из последнего неравенства и из формулы

$$\Psi^{(i)} = -a \sum_{j=0}^{i-2} C_{i-2}^{j} w^{(j)} \nu^{(i-2-j)} \tag{3.14}$$

вытекает справедливость утверждения (3.10) при $i = 3, 4, \dots, m$.

Докажем утверждение (3.11). Пусть $s \in [\varepsilon, 1]$. С помощью интегрирования по частям получаем

$$(t+1)(1-\Psi'(s)) = (t+1)\,a \int_0^s \rho^t (1-\rho)^t d\rho$$

$$= a\,(1-s)^t s^{t+1} + a\,t \int_0^s \rho^{t+1}(1-\rho)^{t-1} d\rho$$

$$\geqslant a\,(1-s)^t s^{t+1} \geqslant a\,(1-s)^t s^t \cdot \varepsilon = \varepsilon\,|\Psi''(s)|.$$

Следовательно,

$$|\Psi''(s)| \leqslant (t+1)(1-\Psi'(s))/\varepsilon. \tag{3.15}$$

Тем самым утверждение (3.11) доказано для $i = 2$. Пусть теперь $3 \leqslant i \leqslant m$ и $s \in [\varepsilon, 1-\varepsilon]$. Используя (3.12) и (3.13) получаем

$$|w^{(j)}(s)\,\nu^{(i-2-j)}(s)| \leqslant K_3\, s^t (1-s)^t \cdot s^{-j} (1-s)^{-i+j+2} \leqslant K_3\,|\Psi''(s)|/a\,\varepsilon^{i-2}.$$

Отсюда, а также из (3.14) и (3.15) вытекает справедливость утверждения (3.11).

Далее, пусть h_k — функция на $\mathbb{R}$ такая, что

$$h_k(s) = \begin{cases} s, & \text{если } |s| \leqslant k, \\ \left[\Psi\left(\frac{|s|-k}{k}\right) + 1\right] k \operatorname{sign} s, & \text{если } k < |s| < 2k, \\ [\Psi(1) + 1]\, k \operatorname{sign} s, & \text{если } |s| \geqslant 2k. \end{cases}$$

Имеем $h_k \in C^m(\mathbb{R})$,

$$|h_k| < 2k \quad \text{на } \mathbb{R}, \tag{3.16}$$

$$0 \leqslant h_k' \leqslant 1 \quad \text{на } \mathbb{R}, \tag{3.17}$$

$$|h_k^{(i)}| \leqslant K_4/k^{i-1}, \quad i = 2, 3, \ldots, m \quad \text{на } \mathbb{R}. \tag{3.18}$$

Кроме того справедливы следующие утверждения:

если $\varepsilon \in (0, 1/2)$, $s \in \mathbb{R}$ и $|s| \in [k, (1+\varepsilon)k] \cup [(2-\varepsilon)k, 2k]$, то

$$|h_k^{(i)}(s)| \leqslant K_1\, \varepsilon^{t-i+2}/k^{i-1}, \quad i = 2, 3, \ldots, m; \tag{3.19}$$

если $\varepsilon \in (0, 1/2)$, $s \in \mathbb{R}$ и $(1+\varepsilon)k \leqslant |s| \leqslant (2-\varepsilon)k$, то

$$|h_k^{(i)}(s)| \leqslant K_2\, (1 - h_k'(s))/(k\varepsilon)^{i-1}, \quad i = 2, 3, \ldots, m; \tag{3.20}$$

если $k < l \leqslant 2k$, $s \in \mathbb{R}$ и $|s| \geqslant l$, то

$$|s - h_k(s)| \geqslant K_5\, k \left(\frac{l-k}{k}\right)^{t+2}. \tag{3.21}$$

Утверждения (3.19) и (3.20) следуют из определения функции h_k и утверждений (3.10) и (3.11) соответственно. Докажем утверждение (3.21).

Зафиксируем действительные числа l и s такие, что $k < l \leqslant 2k$ и $|s| \geqslant l$. Пусть G — функция на отрезке [0, 1] такая, что

$$G(y) = \begin{cases} y^{-t-2} \int\limits_0^y \Psi_0(\rho)d\rho, & \text{если } 0 < y \leqslant 1, \\ 1/(t+1)(t+2), & \text{если } y = 0. \end{cases}$$

С помощью правила Лопиталя устанавливаем непрерывность функции G на отрезке [0, 1]. Отсюда и из положительности функции G следует существование числа $K_5 > 0$ такого, что для любого $y \in [0, 1]$

$$G(y) \geqslant K_5/a.$$

Из определения функций h_k, Ψ и G, учитывая (3.17) и последнее неравенство выводим

$$\begin{aligned} |s - h_k(s)| \geqslant |l - h_k(l)| = k\left(\frac{l-k}{k} - \Psi\left(\frac{l-k}{k}\right)\right) \\ = a\, k\left(\frac{l-k}{k}\right)^{t+2} G\left(\frac{l-k}{k}\right) \geqslant K_5\, k\left(\frac{l-k}{k}\right)^{t+2}. \end{aligned}$$

Утверждение (3.21) доказано.

Из утверждения (3.21) вытекает, что для любого $l \in (k, 2k]$

$$\varphi(l) \leqslant \frac{k^{(t+1)q^*}}{K_5^{q^*}(l-k)^{(t+2)q^*}} \int\limits_\Omega |u - h_k(u)|^{q^*}\, dx. \tag{3.22}$$

Шаг 3. Для интеграла в правой части неравенства (3.22) получим следующую оценку:

$$\int\limits_\Omega |u - h_k(u)|^{q^*}\, dx \leqslant c_9[\varphi(k)]^\gamma. \tag{3.23}$$

Это даст возможность применить лемму 2.3 и в конечном счете получить утверждение теоремы. Оценка (3.23) будет выведена из интегрального тождества (2.17) после подстановки в него функции $v = u - h_k(u)$.

Перейдем к подробному доказательству (3.23). В силу леммы 3.5 из [19] и свойств (3.16)–(3.18) имеем $h_k(u) \in \overset{\circ}{W}{}^{1,q}_{m,p}(\Omega)$ и справедливы следующие утверждения:

1) для любого n-мерного мультииндекса α, $|\alpha| = 1$,

$$D^\alpha h_k(u) = h_k'(u) D^\alpha u \quad \text{п.в. на } \Omega;$$

2) для любого n-мерного мультииндекса α, $2 \leqslant |\alpha| \leqslant m$,

$$|D^\alpha h_k(u) - h_k'(u) D^\alpha u| \\ \leqslant c'_{n,m} \biggl(\sum_{i=2}^{|\alpha|} |h_k^{(i)}(u)| \biggr) \biggl(\sum_{1 \leqslant |\beta| < |\alpha|} |D^\beta u|^{|\alpha|/|\beta|} \biggr) \quad \text{п.в. на } \Omega,$$

где $c'_{n,m}$ — положительная постоянная, зависящая только от n и m.

Положим

$$I_k = \int\limits_\Omega |f||u - h_k(u)| dx, \quad J_k = \int\limits_\Omega g_4 |u - h_k(u)| dx, \quad H_k = \sum_{i=2}^m |h_k^{(i)}|,$$

$$I_k' = \sum_{2 \leqslant |\alpha| \leqslant m} \sum_{1 \leqslant |\beta| < |\alpha|} \int\limits_\Omega |A_\alpha(x, \nabla_m u)|\, |D^\beta u|^{|\alpha|/|\beta|}\, H_k(u) dx,$$

$$I_\alpha = \int\limits_\Omega |D^\alpha u|^{p_\alpha} (1 - h_k'(u)) dx, \quad \alpha \in \Lambda_m.$$

Поскольку $u - h_k(u) \in \overset{\circ}{W}{}^{1,q}_{m,p}(\Omega)$, в силу (2.17) имеем

$$\int\limits_\Omega \Big\{ \sum_{\alpha\in\Lambda_m} A_\alpha(x,\nabla_m u) D^\alpha(u - h_k(u)) \Big\} dx$$

$$+ \int\limits_\Omega A_0(x,u,\nabla_m u)(u - h_k(u))dx = \int\limits_\Omega f(u - h_k(u))dx. \quad (3.24)$$

С помощью (2.19) и того факта, что на множестве $\{|u| \geqslant k\}$

$$0 \leqslant \frac{u - h_k(u)}{u} \leqslant \frac{|u - h_k(u)|}{k_0},$$

устанавливаем

$$\int\limits_\Omega A_0(x,u,\nabla_m u)(u - h_k(u))\, dx \geqslant -\frac{1}{k_0}\, J_k. \quad (3.25)$$

Из (3.24), (3.25) и утверждений 1) и 2) выводим, что

$$\int\limits_\Omega \Big\{ \sum_{\alpha\in\Lambda_m} A_\alpha(x,\nabla_m u) D^\alpha u \Big\} (1 - h'_k(u))dx \leqslant I_k + \frac{1}{k_0}\, J_k + c'_{n,m} I'_k.$$

Отсюда, используя (2.8), (2.9), неравенство Юнга, (3.17) и то, что $h'_k = 1$ на $(-k,k)$, получаем

$$\frac{c_2}{2} \int\limits_\Omega \Phi(1 - h'_k(u))dx \leqslant c_{10} \int\limits_{\{|u|\geqslant k\}} (g_1 + g_2)dx$$

$$+ I_k + \frac{1}{k_0}\, J_k + c'_{n,m} I'_k + c_{11} \sum_{2\leqslant|\alpha|\leqslant m-1} I_\alpha. \quad (3.26)$$

Установим подходящие оценки для слагаемых в правой части этого неравенства. Ясно, что

$$\int\limits_{\{|u|\geqslant k\}} (g_1 + g_2)dx \leqslant 2M[\varphi(k)]^{(r-1)/r}. \quad (3.27)$$

Оценим I_k. Прежде всего заметим, что в силу (2.3), утверждения 1) и (3.17) справедливо неравенство

$$\bigg(\int\limits_\Omega |u - h_k(u)|^{q^*} dx \bigg)^{1/q^*} \leqslant c \bigg(\int\limits_\Omega \Phi(1 - h'_k(u))dx \bigg)^{1/q}. \quad (3.28)$$

Учитывая, что $h_k(s) = s$ для $s \in (-k, k)$, и используя (3.3), неравенство Гельдера и (3.28), получаем

$$I_k \leqslant c\, M[\varphi(k)]^{1/r_1} \left(\int\limits_\Omega \Phi(1 - h_k'(u))dx \right)^{1/q}.$$

Отсюда и из неравенства Юнга вытекает неравенство

$$I_k \leqslant \frac{c_2}{12} \int\limits_\Omega \Phi(1 - h_k'(u))dx + c_{12}[\varphi(k)]^{q/(q-1)r_1}. \qquad (3.29)$$

Аналогично (3.29) устанавливаем неравенство

$$\frac{1}{k_0}\, J_k \leqslant \frac{c_2}{12} \int\limits_\Omega \Phi(1 - h_k'(u))dx + c_{13}[\varphi(k)]^{q/(q-1)r_1}. \qquad (3.30)$$

Перейдем к оценке интегралов I_k' и I_α, $2 \leqslant |\alpha| \leqslant m-1$. Это является наиболее существенным моментом в доказательстве теоремы.

Шаг 4. Покажем, что для любого $\varepsilon \in (0, 1/2)$ справедливо неравенство

$$\sum_{2 \leqslant |\alpha| \leqslant m-1} I_\alpha \leqslant \varepsilon \int\limits_\Omega \Phi\,(1 - h_k'(u))dx + c_{14}(\varepsilon^{-\theta}\varphi(k) + \varepsilon^t). \qquad (3.31)$$

Действительно, пусть $\varepsilon \in (0, 1/2)$. Положим

$$\tilde{p}_\alpha = p_\alpha, \quad \text{если} \quad 1 < |\alpha| \leqslant m, \qquad (3.32)$$

$$\tilde{p}_\alpha = q_1\,, \quad \text{если} \quad |\alpha| = 1. \qquad (3.33)$$

Пусть α, α', α'' — n-мерные мультииндексы такие, что $2 \leqslant |\alpha| \leqslant m-1$, $\alpha = \alpha'' + \alpha'$, $|\alpha'| = 1$, $|\alpha| = |\alpha''| + 1$. Из (2.5) и (3.7) следует, что

$$\frac{p_\alpha - 2}{p_\alpha} + \frac{1}{p_{\alpha+\alpha'}} + \frac{1}{\tilde{p}_{\alpha''}} = 1, \qquad (3.34)$$

$$\frac{p_\alpha - 1}{p_\alpha} + \frac{1}{\tilde{p}_{\alpha''}} + \frac{1}{\tilde{p}_{\alpha'}} + \frac{1}{d} < 1. \qquad (3.35)$$

Для любого $\beta \in \Lambda_m$, $1 \leqslant |\beta| \leqslant m-1$ положим

$$\tilde{I}_\beta = \int\limits_\Omega |D^\beta u|^{\tilde{p}_\beta}(1 - h_k'(u))dx.$$

С помощью интегрирования по частям получаем

$$I_\alpha = \int\limits_\Omega |D^\alpha u|^{p_\alpha - 2} D^\alpha u \,(1 - h_k'(u)) D^{\alpha'' + \alpha'} u\, dx$$

$$= -\int\limits_\Omega D^{\alpha'} \Big\{ |D^\alpha u|^{p_\alpha - 2} D^\alpha u\,(1 - h_k'(u)) \Big\} D^{\alpha''} u\, dx$$

$$\leqslant (p_\alpha - 1) \int\limits_\Omega |D^\alpha u|^{p_\alpha - 2}\, |D^{\alpha + \alpha'} u|\, |D^{\alpha''} u|\, (1 - h_k'(u))\, dx$$

$$+ \int\limits_\Omega |D^\alpha u|^{p_\alpha - 1}\, |D^{\alpha'} u|\, |D^{\alpha''} u|\, |h_k''(u)|\, dx. \quad (3.36)$$

Используя (3.34), неравенство Юнга и тот факт, что $p \leqslant \tilde{p}_\beta < n$, $1 \leqslant |\beta| \leqslant m$, устанавливаем оценку

$$(p_\alpha - 1) \int\limits_\Omega |D^\alpha u|^{p_\alpha - 2}\, |D^{\alpha + \alpha'} u|\, |D^{\alpha''} u|\, (1 - h_k'(u))\, dx$$

$$\leqslant (1/4)\, I_\alpha + (\varepsilon/2)\, I_{\alpha + \alpha'} + c_{15} \varepsilon^{-n/p}\, \tilde{I}_{\alpha''}. \quad (3.37)$$

С помощью утверждений (3.19) и (3.20) для $i = 2$ имеем

$$\int\limits_\Omega |D^\alpha u|^{p_\alpha - 1}\, |D^{\alpha'} u|\, |D^{\alpha''} u|\, |h_k''(u)|\, dx$$

$$= \int\limits_{\substack{\{k \leqslant |u| \leqslant k(1+\varepsilon)\} \cup \\ \{(2-\varepsilon)k < |u| \leqslant 2k\}}} |D^\alpha u|^{p_\alpha - 1}\, |D^{\alpha'} u|\, |D^{\alpha''} u|\, |h_k''(u)|\, dx$$

$$+ \int\limits_{\{k(1+\varepsilon) < |u| \leqslant (2-\varepsilon)k\}} |D^\alpha u|^{p_\alpha - 1}\, |D^{\alpha'} u|\, |D^{\alpha''} u|\, |h_k''(u)|\, dx$$

$$\leqslant (K_1 \varepsilon^t / k) \int\limits_\Omega |D^\alpha u|^{p_\alpha - 1}\, |D^{\alpha'} u|\, |D^{\alpha''} u|\, dx$$

$$+ (K_2 / k\,\varepsilon) \int\limits_\Omega |D^\alpha u|^{p_\alpha - 1}\, |D^{\alpha'} u|\, |D^{\alpha''} u|\, (1 - h_k'(u))\, dx. \quad (3.38)$$

Используя (3.35), неравенство Юнга и (3.5), получаем

$$\int\limits_\Omega |D^\alpha u|^{p_\alpha-1}\,|D^{\alpha'}u|\,|D^{\alpha''}u|\,dx \leqslant \int\limits_\Omega |D^\alpha u|^{p_\alpha}dx$$

$$+\int\limits_\Omega |D^{\alpha'}u|^{\tilde p_{\alpha'}}dx+\int\limits_\Omega |D^{\alpha''}u|^{\tilde p_{\alpha''}}dx\,+\operatorname{meas}\Omega\leqslant c_{16}. \quad (3.39)$$

Используя (3.35), неравенство Юнга, (3.17) и тот факт, что $h_k'(s)=1$ для $s\in(-k,k)$, получаем

$$\int\limits_\Omega |D^\alpha u|^{p_\alpha-1}\,|D^{\alpha'}u|\,|D^{\alpha''}u|\,(1-h_k'(u))\,dx$$

$$\leqslant \varepsilon\, I_\alpha+\varepsilon\,\tilde I_{\alpha'}+\varepsilon\,\tilde I_{\alpha''}+\varepsilon^{1-d}\varphi(k). \quad (3.40)$$

Теперь из неравенств (3.38)–(3.40), $k\geqslant k_0\geqslant 1$ и предположения $k>4\,K_2$, которое не умаляет общности доказательства, следует

$$\int\limits_\Omega |D^\alpha u|^{p_\alpha-1}\,|D^{\alpha'}u|\,|D^{\alpha''}u|\,|h_k''(u)|\,dx$$

$$\leqslant c_{17}\,\varepsilon^t+\frac14\,(I_\alpha+\tilde I_{\alpha'}+\tilde I_{\alpha''}+\varepsilon^{-d}\,\varphi(k)).$$

Из (3.36), (3.37) и последнего неравенства следует

$$I_\alpha\leqslant \varepsilon\, I_{\alpha+\alpha'}+c_{18}\,\varepsilon^{-n/p}\,\tilde I_{\alpha''}+(1/2)\,\tilde I_{\alpha'}+2c_{17}\,\varepsilon^t+(1/2)\,\varepsilon^{-d}\varphi(k). \quad (3.41)$$

Положим $d_2=d$,

$$d_j=d\left(\frac np\right)^{j-2}+\sum_{i=1}^{j-2}\left(\frac np\right)^i,\quad j=3,\dots,m-1,\quad m\geqslant 4,$$

$$b_j=\sum_{i=1}^{j-1}\left(\frac np\right)^i,\qquad j=2,\dots,m-1.$$

Используя (3.41), докажем, что для любого $\varepsilon\in(0,\,1/2)$ и любого номера $j=2,\dots,m-1$ справедлива оценка

$$\sum_{2\leqslant|\alpha|\leqslant j} I_\alpha\leqslant \varepsilon\sum_{|\alpha|=j+1} I_\alpha+c_{19}\biggl(\varepsilon^{-b_j}\sum_{|\alpha|=1}\tilde I_\alpha+\varepsilon^{-d_j}\varphi(k)+\varepsilon^t\biggr). \quad (3.42)$$

Доказательство проведем индукцией по j. Для $j=2$ и $m\geqslant 3$ оценка (3.42) следует из (3.41). Предположим, что оценка (3.42) справедлива для любого $\varepsilon\in(0,\,1/2)$ и для любого номера $j\leqslant j_0$, $2\leqslant j_0<$

$m-1$, $m \geqslant 4$, и докажем её для номера $j=j_0+1$. Фиксируем опять произвольное $\varepsilon \in (0,1/2)$. Используя последовательно (3.41) и (3.42) с параметрами $\varepsilon_1=\varepsilon/4$ и $\varepsilon_2=\varepsilon_1^{n/p}/2c_{18}$ вместо ε соответственно и учитывая, что $t>n/(n-p)$ и $d_{j_0+1}>d$, после элементарных преобразований получим оценку

$$\sum_{|\alpha|=j_0+1} I_\alpha \leqslant (\varepsilon/2)\sum_{|\alpha|=j_0+2} I_\alpha + c_{20}\biggl(\varepsilon^{-b_{j_0+1}}\sum_{|\alpha|=1}\tilde{I}_\alpha + \varepsilon^{-d_{j_0+1}}\varphi(k)+\varepsilon^t\biggr).$$

Складывая последнее неравенство с неравенством (3.42) для номера $j=j_0$ и учитывая, что $b_{j_0}<b_{j_0+1}$, $d_{j_0}<d_{j_0+1}$ и $\varepsilon\in(0,\,1/2)$, устанавливаем справедливость неравенства (3.42) для номера $j=j_0+1$.

Неравенство (3.42) доказано для любого $j\in\mathbb{N}$ такого, что $2\leqslant j\leqslant m-1$. В частности, при $j=m-1$ имеем неравенство

$$\sum_{2\leqslant|\alpha|\leqslant m-1} I_\alpha \leqslant \varepsilon\sum_{|\alpha|=m} I_\alpha + c_{19}\biggl(\varepsilon^{-b_{m-1}}\sum_{|\alpha|=1}\tilde{I}_\alpha + \varepsilon^{-d_{m-1}}\varphi(k)+\varepsilon^t\biggr). \tag{3.43}$$

Оценивая интеграл $\tilde{I}_\alpha$, $|\alpha|=1$ с помощью неравенства Юнга, получим

$$\begin{aligned} c_{19}\varepsilon^{-b_{m-1}}\tilde{I}_\alpha &= \int_\Omega \varepsilon^{q_1/q}|D^\alpha u|^{q_1}\, c_{19}\varepsilon^{-q_1/q-b_{m-1}}(1-h_k'(u))dx \\ &\leqslant \varepsilon I_\alpha + c_{19}^{\frac{q}{q-q_1}}\varepsilon^{-\frac{q}{q-q_1}(b_{m-1}+\frac{q_1}{q})}\int_\Omega(1-h_k'(u))dx \\ &\leqslant \varepsilon I_\alpha + c_{21}\varepsilon^{-\theta}\varphi(k). \end{aligned}$$

Отсюда и из (3.43) с учетом того, что $d_{m-1}<\theta$, следует неравенство (3.31).

Шаг 5. Покажем, что

$$\begin{aligned} c_{n,m}'I_k' &+ c_{11}\sum_{2\leqslant|\alpha|\leqslant m-1} I_\alpha \\ &\leqslant \frac{c_2}{12}\int_\Omega \Phi(1-h_k'(u))dx + c_{22}[\varphi(k)]^{(r-1)/r}. \end{aligned} \tag{3.44}$$

Это позволит нам завершить доказательство теоремы.

Предположим сначала, что $\varphi(k)>0$. Положим

$$\delta=[\varphi(k)]^{1/(t-1)}, \qquad \varepsilon=\delta^{m-1}. \tag{3.45}$$

Так как $k \geqslant k_0$, то в силу (3.9) имеем $\delta \in (0, 1/2)$ и $\varepsilon \in (0, 1/2)$.

Из (2.5)–(2.7) и (3.7) следует, что если α, $\beta \in \Lambda_m$, $1 \leqslant |\beta| < |\alpha| \leqslant m$, то

$$\frac{p_\alpha - 1}{p_\alpha} + \frac{|\alpha|}{|\beta| p_\beta} + \frac{1}{d} < 1.$$

Используя это неравенство и неравенство Юнга, устанавливаем, что если α, $\beta \in \Lambda_m$, $1 \leqslant |\beta| < |\alpha| \leqslant m$, то

$$\begin{aligned} &|A_\alpha(x, \nabla_m u)|\, |D^\beta u|^{|\alpha|/|\beta|} \\ &\qquad \leqslant \varepsilon\, |A_\alpha(x, \nabla_m u)|^{p_\alpha/(p_\alpha - 1)} + \varepsilon\, |D^\beta u|^{p_\beta} + \varepsilon^{1-d} \quad \text{п.в. на } \ \Omega\,. \end{aligned}$$

Отсюда и из (2.8) выводим, что

$$\begin{aligned} I'_k \leqslant |\Lambda_m|\, (c_1 + 1)\, \varepsilon \int\limits_\Omega \Big\{ \sum_{\alpha \in \Lambda_m} |D^\alpha u|^{p_\alpha} \Big\} H_k(u) dx \\ + |\Lambda_m|\, \varepsilon \int\limits_\Omega g_1 H_k(u) dx + |\Lambda_m|^2 \varepsilon^{1-d} \int\limits_\Omega H_k(u) dx. \quad (3.46) \end{aligned}$$

В силу того, что $H_k = 0$ на $(-k, k)$, а также ввиду равенства $H_k = \sum\limits_{i=2}^m |h_k^{(i)}|$ и неравенств (3.18) и $k \geqslant 1$ имеем

$$\int\limits_\Omega g_1 H_k(u) dx \leqslant (m-1) K_4 M [\varphi(k)]^{(r-1)/r}, \qquad (3.47)$$

$$\int\limits_\Omega H_k(u) dx \leqslant (m-1) K_4 \varphi(k). \qquad (3.48)$$

С помощью (3.5), утверждений (3.19) и (3.20) и неравенства $k \geqslant 1$ выводим, что

$$\begin{aligned} &\int\limits_\Omega \Big\{ \sum_{\alpha \in \Lambda_m} |D^\alpha u|^{p_\alpha} \Big\} H_k(u) dx \\ &\qquad = \int\limits_{\substack{\{k \leqslant |u| \leqslant k(1+\delta)\} \cup \\ \{(2-\delta) k \leqslant |u| \leqslant 2k\}}} \Big\{ \sum_{\alpha \in \Lambda_m} |D^\alpha u|^{p_\alpha} \Big\} H_k(u) dx \\ &\qquad + \int\limits_{\{k(1+\delta) < |u| < (2-\delta) k)\}} \Big\{ \sum_{\alpha \in \Lambda_m} |D^\alpha u|^{p_\alpha} \Big\} H_k(u) dx \end{aligned}$$

$$\leqslant (m-1)K_1 c_5 \delta^{\,t-m+2}$$

$$+\frac{(m-1)K_2}{k\,\delta^{m-1}}\Bigg(\int\limits_{\Omega}\Phi(1-h_k'(u))dx+\sum_{2\leqslant|\alpha|\leqslant m-1} I_\alpha\Bigg). \quad (3.49)$$

Далее, не ограничивая общности доказательства, считаем, что

$$k \geqslant 48|\Lambda_m|(m-1)(c_1+1)K_2 c'_{n,m}/c_2, \quad \varphi(k) < (c_2/24c_{11})^{\frac{t-1}{m-1}}. \quad (3.50)$$

Теперь из (3.31), (3.46)–(3.50), учитывая (3.8) и (3.45), выводим неравенство (3.44). Оно доказано в предположении, что $\varphi(k) > 0$. Однако легко видеть, что это неравенство имеет место и в случае $\varphi(k) = 0$.

Из (3.26), (3.27), (3.29), (3.30) и (3.44) следует, что

$$\frac{c_2}{4}\int\limits_{\Omega}\Phi(1-h_k'(u))dx$$
$$\leqslant (2c_{10}M + c_{22})[\varphi(k)]^{(r-1)/r} + (c_{12}+c_{13})[\varphi(k)]^{q/(q-1)r_1}.$$

Полученный результат, неравенство (3.28) и равенство (3.2) доказывают неравенство (3.23). Из (3.22) и (3.23) выводим, что справедливо следующее предложение:

если $k_0 \leqslant k < l \leqslant 2k$, то

$$\varphi(l) \leqslant \frac{c_{23}k^{(t+1)q^*}}{(l-k)^{(t+2)q^*}}\,[\varphi(k)]^{\gamma}.$$

Используя это предложение, а также (3.4) и лемму 2.3, устанавливаем справедливость оценки (2.20). Теорема доказана.

Замечание 3.1. Определение и свойства функций h_k, использованных в доказательстве теоремы 2.2, аналогичны определению и свойствам гладких срезок, введенных в [20] и [11]. При этом определение “внутренней” функции Ψ является более общим по сравнению с данным в [11].

4. Доказательство теоремы 2.1

Шаг 1. Пусть $r > n/q$, функции g_1, g_2, g_4 и f принадлежат $L^r(\Omega)$ и M — мажоранта для $\|g_1\|_r$, $\|g_2\|_r$, $\|g_4\|_r$ и $\|f\|_r$.

Через c_i, $i = 24, 25, \ldots$, будем обозначать положительные числа, зависящие только от n, m, p, q, q_1, $\operatorname{meas}\Omega$, c_1, c_2, c_3, C_2, $\max_{s\in[0,C_2]} b(s)$, r и M.

Определим для любого $i \in \mathbb{N}$ функцию $B_i : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n,m} \to \mathbb{R}$, полагая

$$B_i(x, s, \xi) = \frac{B(x, s, \xi)}{1 + |B(x, s, \xi)|/i}, \qquad (x, s, \xi) \in \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n,m}.$$

Заметим, что для любых $i \in \mathbb{N}$ и $(x, s, \xi) \in \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n,m}$

$$|B_i(x, s, \xi)| \leqslant i, \tag{4.1}$$

$$B_i(x, s, \xi)s \geqslant -g_4(x), \tag{4.2}$$

$$|B_i(x, s, \xi)| \leqslant b(|s|) \sum_{\alpha \in \Lambda_m} |\xi_\alpha|^{p_\alpha} + g_3(x). \tag{4.3}$$

На основании неравенств (2.3), (2.8), (2.9), (2.18), (4.1), включения (2.12), леммы 2.2 и результатов о разрешимости уравнений с псевдомонотонными операторами (см., например, [22]) устанавливаем: если $i \in \mathbb{N}$, то существует функция $u_i \in \overset{\circ}{W}{}^{1,q}_{m,p}(\Omega)$ такая, что для любой функции $v \in \overset{\circ}{W}{}^{1,q}_{m,p}(\Omega)$

$$\int_\Omega \Big\{ \sum_{\alpha \in \Lambda_m} A_\alpha(x, \nabla_m u_i) D^\alpha v + B_i(x, u_i, \nabla_m u_i) v \Big\} dx = \int_\Omega f v dx. \tag{4.4}$$

Принимая во внимание неравенства (4.1), (4.2) и включения g_1, g_2, g_4, $f \in L^r(\Omega)$, на основании теоремы 2.2 устанавливаем, что для любого $i \in \mathbb{N}$ $u_i \in L^\infty(\Omega)$ и

$$\|u_i\|_\infty \leqslant C_2. \tag{4.5}$$

Для любого $i \in \mathbb{N}$ положим

$$\Phi_i = \sum_{|\alpha|=1} |D^\alpha u_i|^q + \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha u_i|^p \ .$$

Фиксируя произвольное $i \in \mathbb{N}$, подставляя в (4.4) вместо v функцию u_i и используя при этом (4.2), аналогично (3.5) получаем, что для любого $i \in \mathbb{N}$

$$\int_\Omega \Big\{ \sum_{\alpha \in \Lambda_m} |D^\alpha u_i|^{p_\alpha} \Big\} dx \leqslant c_5\,. \tag{4.6}$$

В силу (2.3), (4.6) и компактности вложения $\overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\Omega)$ в $L^\lambda(\Omega)$ при $\lambda < q^*$ существуют возрастающая последовательность $\{i_j\} \subset \mathbb{N}$ и функция $u_0 \in \overset{\circ}{W}{}^{1,q}_{m,p}(\Omega)$ такие, что

$$u_{i_j} \to u_0 \quad \text{слабо в} \quad \overset{\circ}{W}{}^{1,q}_{m,p}(\Omega), \tag{4.7}$$

$$u_{i_j} \to u_0 \quad \text{п.в. на } \ \Omega. \tag{4.8}$$

Теперь из (4.5) и (4.8) выводим оценку

$$\|u_0\|_\infty \leqslant C_2. \tag{4.9}$$

Заметим ещё, что в силу (4.6) и (4.7)

$$\int\limits_\Omega \Big\{ \sum_{\alpha \in \Lambda_m} |D^\alpha u_0|^{p_\alpha} \Big\} dx \leqslant c_5 \,. \tag{4.10}$$

Шаг 2. Положим $\tilde b = \max_{s \in [0, C_2]} b(s)$ и

$$\lambda = m + 8\, C_2 \tilde b / c_2. \tag{4.11}$$

Покажем, что

$$\lim_{j \to \infty} \int\limits_\Omega \Big\{ \sum_{\alpha \in \Lambda_m} |D^\alpha u_{i_j}|^{p_\alpha} \Big\} |u_{i_j} - u_0|^\lambda dx = 0. \tag{4.12}$$

С этой целью зафиксируем $j \in \mathbb{N}$ и положим

$$v_j = |u_{i_j} - u_0|^\lambda (u_{i_j} - u_0).$$

Используя (4.5), (4.9) и то, что $\lambda > m$, устанавливаем, что $v_j \in \mathring{W}^{1,q}_{m,p}(\Omega)$ и справедливы утверждения:

(i) для любого n-мерного мультииндекса $\alpha, |\alpha| = 1$,

$$D^\alpha v_j = (\lambda + 1) |u_{i_j} - u_0|^\lambda D^\alpha (u_{i_j} - u_0) \quad \text{п.в. на } \ \Omega;$$

(ii) для любого n-мерного мультииндекса $\alpha, |\alpha| = 2$,

$$\begin{aligned} &|D^\alpha v_j - (\lambda+1)|u_{i_j} - u_0|^\lambda D^\alpha(u_{i_j} - u_0)| \\ &\qquad \leqslant c'_{n,m} (\lambda + 1)^m \Big(\sum_{l=2}^{|\alpha|} |u_{i_j} - u_0|^{\lambda - l + 1} \Big) \\ &\qquad\qquad \times \sum_{1 \leqslant |\beta| < |\alpha|} |D^\beta (u_{i_j} - u_0)|^{|\alpha|/|\beta|} \quad \text{п.в. на } \ \Omega \,, \end{aligned}$$

где $c'_{n,m}$ — положительная постоянная, зависящая только от n и m.

Далее, положим

$$H_{\alpha,j} = \sum_{l=2}^{|\alpha|} |u_{i_j} - u_0|^{\lambda - l + 2}, \quad \alpha \in \Lambda_m, \quad 2 \leqslant |\alpha| \leqslant m,$$

$$\rho_j = \int\limits_{\Omega} |f|\,|u_{i_j} - u_0|^{\lambda+1} dx,$$

$$\rho'_j = \int\limits_{\Omega} \bigg(\sum_{\alpha \in \Lambda_m} |A_\alpha(x, \nabla_m u_{i_j})|\,|D^\alpha u_0| \bigg) |u_{i_j} - u_0|^{\lambda} dx,$$

$$\rho''_j = \int\limits_{\Omega} |B_{i_j}(x, u_{i_j}, \nabla_m u_{i_j})|\,|u_{i_j} - u_0|^{\lambda} dx,$$

$$\rho'''_j = \sum_{2 \leqslant |\alpha| \leqslant m} \; \sum_{1 \leqslant |\beta| < \alpha} \int\limits_{\Omega} |A_\alpha(x, \nabla_m u_{i_j})|\,|D^\beta(u_{i_j} - u_0)|^{|\alpha|/|\beta|}\, H_{\alpha,j}\, dx,$$

$$\varrho_j = \sum_{2 \leqslant |\alpha| \leqslant m-1} \int\limits_{\Omega} |D^\alpha u_{i_j}|^{p_\alpha} |u_{i_j} - u_0|^{\lambda} dx.$$

Поскольку $v_j \in \overset{\circ}{W}{}^{1,q}_{m,p}(\Omega)$, в силу (4.4) имеем

$$\int\limits_{\Omega} \bigg\{ \sum_{\alpha \in \Lambda_m} A_\alpha(x, \nabla_m u_{i_j}) D^\alpha v_j + B_{i_j}(x, u_{i_j}, \nabla_m u_{i_j}) v_j \bigg\} dx = \int\limits_{\Omega} f v_j dx\,. \tag{4.13}$$

Из этого равенства, утверждений (i) и (ii), (4.5) и (4.9) выводим, что

$$(\lambda+1) \int\limits_{\Omega} \bigg(\sum_{\alpha \in \Lambda_m} A_\alpha(x, \nabla_m u_{i_j}) D^\alpha u_{i_j} \bigg) |u_{i_j} - u_0|^{\lambda} dx$$
$$\leqslant \rho_j + (\lambda+1)\rho'_j + 2C_2 \rho''_j + c'_{n,m} (\lambda+1)^m \rho'''_j\,.$$

Отсюда, используя (2.8), (2.9) и неравенство Юнга, получаем

$$\frac{c_2(\lambda+1)}{2} \int\limits_{\Omega} \Phi_{i_j} |u_{i_j} - u_0|^{\lambda} dx \leqslant c_{24}(\lambda+1) \int\limits_{\Omega} (g_1 + g_2) |u_{i_j} - u_0|^{\lambda} dx$$
$$+ \rho_j + (\lambda+1)\rho'_j + 2C_2 \rho''_j + c'_{n,m}(\lambda+1)^m \rho'''_j + c_{25}(\lambda+1)\varrho_j\,. \tag{4.14}$$

Используя неравенство Юнга и (2.8) находим, что

$$\rho_j' \leqslant \frac{c_2}{4}\int\limits_\Omega \Phi_{i_j}|u_{i_j}-u_0|^\lambda dx$$

$$+ c_{26}\int\limits_\Omega \biggl(g_1 + \sum_{\alpha\in\Lambda_m}|D^\alpha u_0|^{p_\alpha}\biggr)|u_{i_j}-u_0|^\lambda dx + c_{27}\varrho_j\,. \quad (4.15)$$

С помощью (4.3) и (4.5) устанавливаем, что

$$\rho_j'' \leqslant \tilde b\int\limits_\Omega \Phi_{i_j}|u_{i_j}-u_0|^\lambda dx + \int\limits_\Omega g_3|u_{i_j}-u_0|^\lambda dx + \tilde b\varrho_j\,. \quad (4.16)$$

Из (4.14)–(4.16) с учетом (4.5), (4.9) и (4.11) следует

$$c_2\int\limits_\Omega \Phi_{i_j}|u_{i_j}-u_0|^\lambda dx \leqslant c_{28}(\varrho_j + \rho_j''')$$

$$+ c_{29}\int\limits_\Omega \biggl(|f| + \sum_{\kappa=1}^{3} g_\kappa + \sum_{\alpha\in\Lambda_m}|D^\alpha u_0|^{p_\alpha}\biggr)|u_{i_j}-u_0|^\lambda dx. \quad (4.17)$$

Покажем, что

$$\lim_{j\to\infty}\rho_j''' = \lim_{j\to\infty}\varrho_j = 0. \quad (4.18)$$

Пусть α, $\beta\in\Lambda_m$ и $1\leqslant|\beta|<|\alpha|\leqslant m$. В силу (2.5) и (2.6) существует число $p_{\alpha\beta}>1$, такое что

$$\frac{p_\alpha - 1}{p_\alpha} + \frac{|\alpha|}{|\beta|p_\beta} + \frac{1}{p_{\alpha\beta}} = 1.$$

Используя последнее равенство, неравенство Гельдера, (2.8), (4.6) и (4.10), устанавливаем, что

$$\int\limits_\Omega |A_\alpha(x,\nabla_m u_{i_j})|\,|D^\beta(u_{i_j}-u_0)|^{|\alpha|/|\beta|}\,|u_{i_j}-u_0|\,dx$$

$$\leqslant c_{30}\biggl(\int\limits_\Omega |u_{i_j}-u_0|^{p_{\alpha\beta}}dx\biggr)^{1/p_{\alpha\beta}}.$$

Отсюда и из (4.5), (4.8) и определения величины ρ_j''' вытекает равенство нулю первого предела в (4.18).

Далее, с помощью (4.7), (4.8), неравенств

$$1<p_\alpha<q_\alpha, \quad 2\leqslant|\alpha|\leqslant m-1$$

и леммы 2.2 устанавливаем, что для любого $\alpha \in \Lambda_m$, $2 \leqslant |\alpha| \leqslant m-1$

$$|D^\alpha u_{i_j}|^{p_\alpha} |u_{i_j} - u_0|^\lambda \to 0 \;\text{ по мере},$$

а с помощью неравенств (2.4), (4.5), (4.6), (4.9) и $1 < p_\alpha < q_\alpha$, $2 \leqslant |\alpha| \leqslant m-1$ получаем, что для любого $\alpha \in \Lambda_m$, $2 \leqslant |\alpha| \leqslant m-1$ функции последовательности $\{|D^\alpha u_{i_j}|^{p_\alpha} |u_{i_j} - u_0|^\lambda\}$ имеют равностепенно абсолютно непрерывные интегралы. Следовательно, по теореме Д. Витали о сходимости (см., например, [25, гл. VI]) $\lim_{j\to\infty} \varrho_j = 0$. Тем самым (4.18) полностью доказано.

Из (4.5), (4.8), (4.17) и (4.18) следует (4.12).

Теперь фиксируем произвольные $\varepsilon > 0$ и $j \in \mathbb{N}$. С помощью неравенства Юнга получаем

$$\begin{aligned}\int\limits_\Omega \Big\{ \sum_{\alpha\in\Lambda_m} |D^\alpha u_{i_j}|^{p_\alpha} \Big\} |u_{i_j} - u_0| dx &\\ \leqslant \frac{\varepsilon}{2c_5} \int\limits_\Omega \Big\{ \sum_{\alpha\in\Lambda_m} |D^\alpha u_{i_j}|^{p_\alpha} \Big\} dx &\\ + \Big(\frac{2c_5}{\varepsilon}\Big)^{\lambda-1} \int\limits_\Omega \Big\{ \sum_{\alpha\in\Lambda_m} |D^\alpha u_{i_j}|^{p_\alpha} \Big\} |u_{i_j} - u_0|^\lambda dx.&\end{aligned}$$

Отсюда и из (4.6) и (4.12) вытекает

$$\lim_{j\to\infty} \int\limits_\Omega \Big\{ \sum_{\alpha\in\Lambda_m} |D^\alpha u_{i_j}|^{p_\alpha} \Big\} |u_{i_j} - u_0| dx = 0. \tag{4.19}$$

Замечание 4.1. Соображение использовать для доказательства равенства (4.12) подстановку в интегральное тождество (4.4) в качестве пробных элементов функций $|u_{i_j} - u_0|^\lambda (u_{i_j} - u_0)$ подсказано работой [17], где такая же подстановка использовалась для доказательства соотношения, аналогичного (4.12) в случае вырождающихся эллиптических уравнений второго порядка.

Шаг 3. Для любого $i \in \mathbb{N}$ положим

$$Q_i = \sum_{|\alpha|=1,m} \left[A_\alpha(x, \nabla_m u_i) - A_\alpha(x, \nabla_m u_0)\right] (D^\alpha u_i - D^\alpha u_0), \tag{4.20}$$

$$R_i = \sum_{2\leqslant|\alpha|\leqslant m-1} \left[A_\alpha(x, \nabla_m u_i) - A_\alpha(x, \nabla_m u_0)\right] (D^\alpha u_i - D^\alpha u_0),$$

$$S_i = Q_i + R_i\,, \tag{4.21}$$

и покажем, что

$$\lim_{j\to\infty}\int\limits_{\Omega} Q_{i_j}dx = 0. \tag{4.22}$$

Пусть $j \in \mathbb{N}$. Поскольку $u_{i_j} - u_0 \in \overset{\circ}{W}{}^{1,q}_{m,p}(\Omega)$, в силу (4.4) имеем

$$\begin{aligned}\int\limits_{\Omega} S_{i_j}dx = \int\limits_{\Omega} f(u_{i_j}-u_0)dx \\ -\int\limits_{\Omega} B_{i_j}(x,u_{i_j},\nabla_m u_{i_j})(u_{i_j}-u_0)dx \\ -\int\limits_{\Omega}\Big\{\sum_{\alpha\in\Lambda_m} A_\alpha(x,\nabla_m u_0)(D^\alpha u_{i_j} - D^\alpha u_0)\Big\}dx\,.\end{aligned} \tag{4.23}$$

Покажем, что интегралы в правой части равенства (4.23) стремятся к нулю при $j\to\infty$. С помощью (4.3) и (4.5) находим, что

$$\begin{aligned}\Big|\int\limits_{\Omega} B_{i_j}(x,u_{i_j},\nabla_m u_{i_j})(u_{i_j}-u_0)dx\Big| \\ \leqslant \int\limits_{\Omega}|B_{i_j}(x,u_{i_j},\nabla_m u_{i_j})||u_{i_j}-u_0|dx \\ \leqslant \tilde{b}\int\limits_{\Omega}\Big\{\sum_{\alpha\in\Lambda_m}|D^\alpha u_{i_j}|^{p_\alpha}\Big\}|u_{i_j}-u_0|dx + \int\limits_{\Omega} g_3|u_{i_j}-u_0|dx.\end{aligned}$$

Отсюда и из (4.19), (4.8) и (4.5) следует, что

$$\lim_{j\to\infty}\int\limits_{\Omega} B_{i_j}(x,u_{i_j},\nabla_m u_{i_j})(u_{i_j}-u_0)dx = 0 \tag{4.24}$$

В силу (4.8) и (4.5) имеем

$$\lim_{j\to\infty}\int\limits_{\Omega} f(u_{i_j}-u_0)dx = 0. \tag{4.25}$$

Используя (2.4)–(2.8) и (4.7), устанавливаем

$$\lim_{j\to\infty}\int\limits_{\Omega}\Big\{\sum_{\alpha\in\Lambda_m} A_\alpha(x,\nabla_m u_0)(D^\alpha u_{i_j} - D^\alpha u_0)\Big\}dx = 0. \tag{4.26}$$

Теперь из (4.23)–(4.26) следует равенство

$$\lim_{j\to\infty}\int\limits_{\Omega} S_{i_j}\,dx = 0. \tag{4.27}$$

Далее, используя (4.7), лемму 2.2 и неравенства (2.4), (2.8) и $1 < p_\alpha < q_\alpha$, $2 \leqslant |\alpha| \leqslant m-1$, устанавливаем, что

$$\lim_{j\to\infty}\int\limits_{\Omega} R_{i_j}\,dx = 0. \tag{4.28}$$

Наконец из (4.21), (4.27) и (4.28) следует (4.22).

Шаг 4. Покажем, что

$$\text{для любого } \ \alpha\in\Lambda_m \quad D^\alpha u_{i_j}\to D^\alpha u_0 \quad \text{по мере}\,. \tag{4.29}$$

Отметим, что если $\alpha\in\Lambda_m$ и $1\leqslant|\alpha|\leqslant m-1$, то справедливость утверждения (4.29) вытекает из (4.7) и леммы 2.2.

Для доказательства утверждения (4.29) в случае, когда $|\alpha| = m$, введем ряд вспомогательных функций и множеств. Для любого $i\in\mathbb{N}$ положим

$$\Upsilon_i = c_4 \sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant m-1} (1+|D^\alpha u_i| + |D^\alpha u_0|)^{r_\alpha-\tilde r_\alpha}|D^\alpha u_i - D^\alpha u_0|^{\tilde r_\alpha}$$

и заметим, что в силу (4.7), леммы 2.2 и неравенств $0<\tilde r_\alpha\leqslant r_\alpha<q_\alpha$

$$\lim_{i\to\infty}\int\limits_{\Omega} \Upsilon_i\,dx = 0. \tag{4.30}$$

Далее, пусть для любого $x\in\Omega$ A_x — функция на $\mathbb{R}^{n,m}\times\mathbb{R}^{n,m}$ такая, что для любой пары $(\xi,\xi')\in\mathbb{R}^{n,m}\times\mathbb{R}^{n,m}$

$$\begin{aligned} A_x(\xi,\xi') = \sum_{|\alpha|=1,m} &[A_\alpha(x,\xi) - A_\alpha(x,\xi')](\xi_\alpha-\xi'_\alpha) \\ &+ c_4 \sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant m-1} (1+|\xi_\alpha|+|\xi'_\alpha|)^{r_\alpha-\tilde r_\alpha}|\xi_\alpha-\xi'_\alpha|^{\tilde r_\alpha}\,. \end{aligned}$$

Поскольку для любого $\alpha\in\Lambda_m$ A_α — функция Каратеодори и для почти всех $x\in\Omega$ и любых $\xi,\xi'\in\mathbb{R}^{n,m}$, $\xi\neq\xi'$, имеет место неравенство (2.18), существует множество $E\subset\Omega$ меры нуль такое, что:

(iii) для любого $x\in\Omega\setminus E$ функция A_x непрерывна на $\mathbb{R}^{n,m}\times\mathbb{R}^{n,m}$;

(iv) для любых $x \in \Omega \setminus E$ и $\xi, \xi' \in \mathbb{R}^{n,m}$, $\xi \neq \xi'$, справедливо неравенство $A_x(\xi, \xi') > 0$.

Для любых $\sigma > 0$ и $\eta > \sigma$ через $G_{\sigma,\eta}$ обозначим множество

$$\Big\{(\xi,\xi') \in \mathbb{R}^{n,m} \times \mathbb{R}^{n,m} : \sum_{\alpha\in\Lambda_m} |\xi_\alpha - \xi'_\alpha| \geqslant \sigma,\ \sum_{\alpha\in\Lambda_m} |\xi_\alpha| \leqslant \eta,\ \sum_{\alpha\in\Lambda_m} |\xi'_\alpha| \leqslant \eta\Big\}.$$

Очевидно, что для любых $\sigma > 0$ и $\eta > \sigma$ множество $G_{\sigma,\eta}$ непусто, замкнуто и ограничено.

Пусть для произвольных $\sigma > 0$ и $\eta > \sigma$ $\mu_{\sigma,\eta}$ — функция на Ω такая, что

$$\mu_{\sigma,\eta}(x) = \begin{cases} \min\limits_{G_{\sigma,\eta}} A_x, & \text{если } x \in \Omega \setminus E, \\ 0, & \text{если } x \in E\,. \end{cases}$$

Используя предложения (iii), (iv), (2.8) и тот факт, что для любого $\alpha \in \Lambda_m$ A_α — функция Каратеодори, устанавливаем: если $\sigma > 0$ и $\eta > \sigma$, то

$$\mu_{\sigma,\eta} \geqslant 0 \ \text{ на } \ \Omega, \quad \mu_{\sigma,\eta} > 0 \ \text{ п.в. на } \ \Omega, \tag{4.31}$$

$$\mu_{\sigma,\eta} \in L^1(\Omega)\,. \tag{4.32}$$

Перейдем непосредственно к доказательству утверждения (4.29). Фиксируем $\sigma > 0$ и $\varepsilon > 0$. Используя (4.6) устанавливаем, что для любых $\eta > 0$ и $i \in \mathbb{N}$

$$\eta\,\mathrm{meas}\Big\{\sum_{\alpha\in\Lambda_m} |D^\alpha u_i|^{p_\alpha} \geqslant \eta\Big\} \leqslant \int\limits_{\{\sum_{\alpha\in\Lambda_m} |D^\alpha u_i|^{p_\alpha} \geqslant \eta\}} \Big(\sum_{\alpha\in\Lambda_m} |D^\alpha u_i|^{p_\alpha}\Big) dx \leqslant c_5\,.$$

Отсюда следует, что существует $\eta > \max(1, \sigma)$ такое, что

$$\begin{gathered} \sup_{j\in\mathbb{N}} \mathrm{meas}\Big\{\sum_{\alpha\in\Lambda_m} |D^\alpha u_{i_j}| \geqslant \eta\Big\} \leqslant \varepsilon, \\ \mathrm{meas}\Big\{\sum_{\alpha\in\Lambda_m} |D^\alpha u_0| \geqslant \eta\Big\} \leqslant \varepsilon\,. \end{gathered} \tag{4.33}$$

Для любого $j \in \mathbb{N}$ положим

$$E_j = \Big\{\sum_{\alpha\in\Lambda_m} |D^\alpha u_{i_j}| \leqslant \eta,\ \sum_{\alpha\in\Lambda_m} |D^\alpha u_0| \leqslant \eta,\ \sum_{\alpha\in\Lambda_m} |D^\alpha u_{i_j} - D^\alpha u_0| \geqslant \sigma\Big\}.$$

Пусть $j \in \mathbb{N}$ и $x \in E_j \setminus E$. Имеем

$$\sum_{\alpha\in\Lambda_m} |D^\alpha u_{i_j}(x)| \leqslant \eta, \qquad \sum_{\alpha\in\Lambda_m} |D^\alpha u_0(x)| \leqslant \eta,$$

$$\sum_{\alpha\in\Lambda_m} |D^\alpha u_{i_j}(x) - D^\alpha u_0(x)| \geqslant \sigma.$$

Следовательно, $(\nabla_m u_{i_j}(x), \nabla_m u_0(x)) \in G_{\sigma,\eta}$. Тогда в силу определения функций $\mu_{\sigma,\eta}$ и A_x имеем $\mu_{\sigma,\eta}(x) \leqslant Q_{i_j}(x) + \Upsilon_{i_j}(x)$.

Теперь, учитывая (2.18), можно заключить, что для любого $j \in \mathbb{N}$

$$\int\limits_{E_j} \mu_{\sigma,\eta} dx \leqslant \int\limits_{E_j} (Q_{i_j} + \Upsilon_{i_j}) dx \leqslant \int\limits_{\Omega} Q_{i_j} dx + \int\limits_{\Omega} \Upsilon_{i_j} dx\,.$$

Отсюда и из (4.22) и (4.30) вытекает, что

$$\lim_{j\to\infty} \int\limits_{E_j} \mu_{\sigma,\eta} dx = 0\,.$$

В свою очередь, отсюда, учитывая (4.31), (4.32) и применяя лемму 5 из [23], выводим, что

$$\lim_{j\to\infty} \operatorname{meas} E_j = 0\,. \tag{4.34}$$

Ясно, что для любого $j \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \operatorname{meas}\Big\{ \sum_{\alpha\in\Lambda_m} |D^\alpha u_{i_j} - D^\alpha u_0| \geqslant \sigma \Big\} & \\ \leqslant \operatorname{meas}\Big\{ \sum_{\alpha\in\Lambda_m} |D^\alpha u_{i_j}| > \eta \Big\} & \\ + \operatorname{meas}\Big\{ \sum_{\alpha\in\Lambda_m} |D^\alpha u_0| > \eta \Big\} + \operatorname{meas} E_j\,. & \end{aligned}$$

Отсюда и из (4.33) и (4.34) следует (4.29).

Замечание 4.2. При доказательстве утверждения (4.29) использованы некоторые идеи работ [20, 23].

В силу утверждения (4.29) и теоремы Ф. Рисса (см., например, [25, гл. IV]) для любого $\alpha \in \Lambda$ из последовательности $\{D^\alpha u_{i_j}\}$ можно извлечь подпоследовательность, сходящуюся к $D^\alpha u_0$ почти всюду на Ω. Без ограничения общности можно считать, что

$$\forall\ \alpha \in \Lambda_m \quad D^\alpha u_{i_j} \to D^\alpha u_0 \quad \text{п.в.} \quad \text{на} \quad \Omega. \tag{4.35}$$

Шаг 5. Докажем следующее утверждение:

(v) для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для любого измеримого множества $G \subset \Omega$, meas $G < \delta$, имеем

$$\limsup_{j\to\infty} \int\limits_G \Big\{ \sum_{\alpha\in\Lambda_m} |D^\alpha u_{i_j}|^{p_\alpha} \Big\} dx \leqslant \varepsilon. \tag{4.36}$$

Действительно, положим

$$c_{31} = (1 + c_1 c_5 + \|g_1\|_{L^1(\Omega)})^{\frac{q-1}{q}}. \tag{4.37}$$

Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. В силу свойства абсолютной непрерывности интеграла Лебега и неравенств $1 < p_\alpha < q_\alpha$, $2 \leqslant |\alpha| \leqslant m-1$, (2.4) и (4.6) существует $\delta > 0$ такое, что для любого измеримого множества $G \subset \Omega$, meas $G < \delta$, будет

$$\int\limits_G \Big\{ \sum_{2\leqslant|\alpha|\leqslant m-1} |D^\alpha u_{i_j}|^{p_\alpha} \Big\} dx \leqslant \frac{c_2\,\varepsilon}{6(c_2+1)(c_3+1)}, \tag{4.38}$$

$$\int\limits_G g_2 dx \leqslant \frac{c_2\,\varepsilon}{6}, \tag{4.39}$$

$$c_{31} \sum_{\kappa=1,m} \Big(\sum_{|\alpha|=\kappa} \int\limits_G |D^\alpha u_0|^{p_\alpha} dx \Big)^{\frac{1}{p_\alpha}} \leqslant \frac{c_2\,\varepsilon}{6}. \tag{4.40}$$

Зафиксируем произвольное измеримое множество $G \subset \Omega$, meas $G < \delta$. Для любого $j \in \mathbb{N}$ положим

$$\sigma_j = \int\limits_G \Big\{ \sum_{|\alpha|=1,m} A_\alpha(x, \nabla_m u_0)(D^\alpha u_{i_j} - D^\alpha u_0) \Big\} dx,$$

$$\sigma'_j = \int\limits_G \Big\{ \sum_{|\alpha|=1,m} A_\alpha(x, \nabla_m u_{i_j}) D^\alpha u_0 \Big\} dx.$$

Используя (2.8) и (4.7) устанавливаем, что

$$\lim_{j\to\infty} \sigma_j = 0. \tag{4.41}$$

Зафиксируем теперь произвольное $j \in \mathbb{N}$. С помощью (4.20), (2.9) и (2.18) получаем

$$c_2 \int\limits_G \Phi_{i_j} dx \leqslant \int\limits_\Omega (Q_{i_j} + \Upsilon_{i_j}) dx$$

$$+ c_3 \int\limits_G \Big\{ \sum_{2 \leqslant |\alpha| \leqslant m-1} |D^\alpha u_{i_j}|^{p_\alpha} \Big\} dx + \int\limits_G g_2 dx + \sigma_j + \sigma'_j\,. \quad (4.42)$$

Используя числовое и интегральное неравенства Гельдера, (2.8), (4.6), (4.37) и неравенство $p_\alpha \leqslant q$, $\alpha \in \Lambda_m$, получаем

$$\sigma'_j \leqslant \left[1 + \int\limits_G \left(c_1 \sum_{\alpha \in \Lambda_m} |D^\alpha u_{i_j}|^{p_\alpha} + g_1 \right) dx \right]^{\frac{q-1}{q}}$$

$$\times \sum_{\kappa=1,m} \left(\sum_{|\alpha|=\kappa} \int\limits_G |D^\alpha u_0|^{p_\alpha} dx \right)^{\frac{1}{p_\alpha}}$$

$$\leqslant c_{31} \sum_{\kappa=1,m} \left(\sum_{|\alpha|=\kappa} \int\limits_G |D^\alpha u_0|^{p_\alpha} dx \right)^{\frac{1}{p_\alpha}}.$$

Отсюда и из (4.40) следует, что

$$\sigma'_j \leqslant c_2\, \varepsilon/6. \quad (4.43)$$

Теперь из (4.38), (4.39), (4.42) и (4.43) вытекает, что

$$c_2 \int\limits_G \Phi_{i_j} dx \leqslant \int\limits_\Omega (Q_{i_j} + \Upsilon_{i_j}) dx + \sigma_j + c_2\, \varepsilon/2.$$

Отсюда и из (4.22), (4.30), (4.38) и (4.41) следует неравенство (4.36). Тем самым справедливость утверждения (v) установлена.

Шаг 6. Докажем, что справедливы следующие утверждения:

(vi) для любой функции $v \in \overset{\circ}{W}{}^{1,q}_{m,p}(\Omega)$

$$\lim_{j\to\infty} \int\limits_\Omega \Big\{ \sum_{\alpha \in \Lambda_m} A_\alpha(x, \nabla_m u_{i_j}) D^\alpha v \Big\} dx$$

$$= \int\limits_\Omega \Big\{ \sum_{\alpha \in \Lambda_m} A_\alpha(x, \nabla_m u_0) D^\alpha v \Big\} dx\,;$$

(vii) для любой функции $v \in \overset{\circ}{W}{}^{1,q}_{m,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$

$$\lim_{j\to\infty} \int\limits_\Omega B_{i_j}(x, u_{i_j}, \nabla_m u_{i_j}) v dx = \int\limits_\Omega B(x, u_0, \nabla_m u_0) v dx\,.$$

Действительно, пусть $v \in \overset{\circ}{W}{}^{1,q}_{m,p}(\Omega)$. В силу (4.35)

$$\sum_{\alpha\in\Lambda_m} A_\alpha(x,\nabla_m u_{i_j})D^\alpha v \to \sum_{\alpha\in\Lambda_m} A_\alpha(x,\nabla_m u_0)D^\alpha v \quad \text{п.в. на} \quad \Omega\,. \tag{4.44}$$

Далее, пусть задано $\varepsilon > 0$. Рассуждая аналогично доказательству неравенства (4.43), устанавливаем, что существует $\varepsilon_1 > 0$ такое, что для любого измеримого множества $G \subset \Omega$, meas $G \leqslant \varepsilon_1$ и для любого $j \in \mathbb{N}$, имеем

$$\begin{gathered}\int\limits_G \Big|\sum_{\alpha\in\Lambda_m} A_\alpha(x,\nabla_m u_{i_j})D^\alpha v\Big|dx \leqslant \frac{\varepsilon}{4}\,,\\ \int\limits_G \Big|\sum_{\alpha\in\Lambda_m} A_\alpha(x,\nabla_m u_0)D^\alpha v\Big|dx \leqslant \frac{\varepsilon}{4}\,.\end{gathered} \tag{4.45}$$

В силу (4.44) и теоремы Д. Ф. Егорова (см., например, [25, гл. IV]) существует измеримое множество $\Omega_1 \subset \Omega$ такое, что

$$\text{meas}\,(\Omega\setminus\Omega_1) \leqslant \varepsilon_1, \tag{4.46}$$

$$\sum_{\alpha\in\Lambda_m} A_\alpha(x,\nabla_m u_{i_j})D^\alpha v \to \sum_{\alpha\in\Lambda_m} A_\alpha(x,\nabla_m u_0)D^\alpha v \quad \text{равномерно на} \quad \Omega_1.$$

Тогда найдется $j_1 \in \mathbb{N}$ такое, что для любого $j \in \mathbb{N}$, $j \geqslant j_1$,

$$\int\limits_{\Omega_1} \Big|\sum_{\alpha\in\Lambda_m} A_\alpha(x,\nabla_m u_{i_j})D^\alpha v - \sum_{\alpha\in\Lambda_m} A_\alpha(x,\nabla_m u_0)D^\alpha v\Big|dx \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\,. \tag{4.47}$$

Зафиксируем $j \in \mathbb{N}$, $j \geqslant j_1$. Используя (4.45)–(4.47), получаем

$$\begin{aligned}&\Big\|\sum_{\alpha\in\Lambda_m} A_\alpha(x,\nabla_m u_{i_j})D^\alpha v - \sum_{\alpha\in\Lambda_m} A_\alpha(x,\nabla_m u_0)D^\alpha v\Big\|_{L^1(\Omega)}\\ &\qquad\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \int\limits_{\Omega\setminus\Omega_1} \Big|\sum_{\alpha\in\Lambda_m} A_\alpha(x,\nabla_m u_{i_j})D^\alpha v\Big|dx\\ &\qquad\qquad + \int\limits_{\Omega\setminus\Omega_1} \Big|\sum_{\alpha\in\Lambda_m} A_\alpha(x,\nabla_m u_0)D^\alpha v\Big|dx \leqslant \varepsilon\,.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\Big\|\sum_{\alpha\in\Lambda_m} A_\alpha(x,\nabla_m u_{i_j})D^\alpha v - \sum_{\alpha\in\Lambda_m} A_\alpha(x,\nabla_m u_0)D^\alpha v\Big\|_{L^1(\Omega)} \to 0$$

и утверждение (vi) справедливо.

Докажем утверждение (vii). Пусть $v \in \mathring{W}^{1,q}_{m,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. В силу (4.8) и (4.35) имеем

$$B_{i_j}(x, u_{i_j}, \nabla_m u_{i_j})v \to B(x, u_0, \nabla_m u_0)v \quad \text{п.в. на} \quad \Omega\,. \tag{4.48}$$

Пусть опять задано $\varepsilon > 0$. Используя (4.3), (4.5), утверждение (v) и ограниченность функции v, устанавливаем, что существует $\varepsilon_2 > 0$ такое, что для любого измеримого множества $G \subset \Omega$, meas $G \leqslant \varepsilon_2$, справедливы следующие неравенства

$$\limsup_{j\to\infty} \int\limits_G |B_{i_j}(x, u_{i_j}, \nabla_m u_{i_j})\, v| dx \leqslant \frac{\varepsilon}{3}\,, \tag{4.49}$$

$$\int\limits_G |B(x, u_0, \nabla_m u_0)\, v| dx \leqslant \frac{\varepsilon}{3}\,. \tag{4.50}$$

В силу (4.48) существует измеримое множество $\Omega_2 \subset \Omega$ такое, что

$$\text{meas}\ (\Omega \setminus \Omega_2) \leqslant \varepsilon_2 \tag{4.51}$$

и $B_{i_j}(x, u_{i_j}, \nabla_m u_{i_j})v \to B(x, u_0, \nabla_m u_0)v$ равномерно на Ω_2. Тогда найдется $j_2 \in \mathbb{N}$ такое, что для любого $j \in \mathbb{N}$, $j \geqslant j_2$,

$$\int\limits_{\Omega_2} |B_{i_j}(x, u_{i_j}, \nabla_m u_{i_j})v - B(x, u_0, \nabla_m u_0)v| dx \leqslant \frac{\varepsilon}{3}\ . \tag{4.52}$$

Зафиксируем $j \in \mathbb{N}$, $j \geqslant j_2$. Используя неравенства (4.50)–(4.52), получаем

$$\begin{aligned}
&\int\limits_\Omega |B_{i_j}(x, u_{i_j}, \nabla_m u_{i_j})v - B(x, u_0, \nabla_m u_0)v| dx \\
&\quad \leqslant \frac{\varepsilon}{3} + \int\limits_{\Omega\setminus\Omega_2} |B(x, u_0, \nabla_m u_0)v| dx + \int\limits_{\Omega\setminus\Omega_2} |B_{i_j}(x, u_{i_j}, \nabla_m u_{i_j})v| dx \\
&\qquad\qquad \leqslant \frac{2\varepsilon}{3} + \int\limits_{\Omega\setminus\Omega_2} |B_{i_j}(x, u_{i_j}, \nabla_m u_{i_j})v| dx\,.
\end{aligned}$$

Отсюда и из (4.49) и (4.51) следует, что

$$\limsup_{j\to\infty} \int\limits_\Omega |B_{i_j}(x, u_{i_j}, \nabla_m u_{i_j})v - B(x, u_0, \nabla_m u_0)v| dx \leqslant \varepsilon\,.$$

Ввиду произвольности ε из последнего неравенства вытекает справедливость утверждения (vii).

Из (4.4) и утверждений (vi) и (vii) вытекает, что для любой функции $v \in \overset{\circ}{W}{}^{1,q}_{m,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$

$$\int\limits_\Omega \Big\{ \sum_{\alpha\in\Lambda_m} A_\alpha(x, \nabla_m u_0) D^\alpha v + B(x, u_0, \nabla_m u_0) v \Big\} dx = \int\limits_\Omega f v dx.$$

Теперь можно заключить, что u_0 есть обобщенное решение задачи (2.13), (2.14). Теорема доказана.

5. Пример

Рассмотрим пример выполнения условий (2.8)–(2.11) и (2.18) относительно коэффициентов уравнения (2.13).

Пусть n, $m \in \mathbb{N}$ и p, q, $q_1 \in \mathbb{R}$ — числа, такие, что $m \geqslant 3$, $p \geqslant 2$ и $mp < q_1 < q < n$. Пусть Ω — ограниченное открытое множество в $\mathbb{R}^n$. Далее, пусть $\{p_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda_m}$ и $\{\tilde{p}_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda_m}$ — два набора чисел, удовлетворяющих равенствам (2.5), (2.6) и (3.32), (3.33) соответственно. Для любого $\alpha \in \Lambda_m$ определим функцию $A_\alpha : \Omega \times \mathbb{R}^{n,m} \to \mathbb{R}$, полагая

$$A_\alpha(x,\xi) = \Big(\sum_{|\beta|=|\alpha|} \xi_\beta^2 \Big)^{(p_\alpha-2)/2} \xi_\alpha + \sum_{1\leqslant|\beta|\leqslant m-1} |\xi_\beta|^{\tilde{p}_\beta(p_\alpha-1)/p_\alpha}, \quad \text{если} \;\; |\alpha| = 1,\, m,$$

$$A_\alpha(x,\xi) = \sum_{\beta\in\Lambda_m} |\xi_\beta|^{p_\beta(p_\alpha-1)/p_\alpha}, \quad \text{если} \;\; 2 \leqslant |\alpha| \leqslant m-1.$$

Данный набор функций $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda_m}$ удовлетворяет неравенствам (2.8) и (2.9), а также неравенству (2.18) с $c_4 > 0$ и показателями $r_\alpha = \tilde{p}_\alpha$ и $\tilde{r}_\alpha = q/(q-1)$, $1 \leqslant |\alpha| \leqslant m-1$.

Для любых $x \in \Omega$, $s \in \mathbb{R}$ и $\xi \in \mathbb{R}^{n,m}$ положим

$$B(x,s,\xi) = s b_1(|s|) \sum_{\alpha\in\Lambda_m} |\xi_\alpha|^{p_\alpha},$$

где b_1 – произвольная, неотрицательная, непрерывная функция на $\mathbb{R}_+$, например $b_1(t) = t^\lambda$, $\lambda > 0$, или $b_1(t) = e^t$. Функция B удовлетворяет неравенствам (2.10) и (2.11).

Благодарности. Автор благодарит профессора А. А. Ковалевского за целый ряд полезных советов и замечаний.

Литература

[1] О. А. Ладыженская, Н. Н. Уральцева, *Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа*, Москва: Наука, 1973.

[2] С. Л. Соболев, *Некоторые применения функционального анализа в математической физике*, Москва: Наука, 1988.

[3] J. Frehse, *On the boundedness of weak solutions of higher order nonlinear elliptic partial differential equations* // Boll. Un. Mat. Ital., **3** (1970), No. 4, 607–627.

[4] K.-O. Widman, *Local bounds for solutions of higher order nonlinear elliptic partial differential equations* // Math. Z., **121** (1971), No. 1, 81–95.

[5] И. В. Скрыпник, *Нелинейные эллиптические уравнения высшего порядка*, Киев: Наукова думка, 1973.

[6] K.-O. Widman, *Hölder continuity of solutions of elliptic systems* // Manuscripta Math., **5** (1971), No. 4, 299–308.

[7] В. А. Солонников, *О дифференциальных свойствах слабых решений квазилинейных эллиптических уравнений* // Зап. научн. сем. ЛОМИ, **39** (1974), 110–119.

[8] И. В. Скрыпник, *О квазилинейных эллиптических уравнениях высшего порядка с непрерывными обобщенными решениями* // Дифференц. уравнения, **14** (1978), No. 6, 1104–1118.

[9] J. Moser, *A new proof of De Giorgi's theorem concerning the regularity problem for elliptic differential equations* // Comm. Pure Appl. Math., **13** (1960), No. 3, 457–468.

[10] G. Stampacchia, *Regularisation des solutions de problemes aux limites elliptiques a donnees discontinues* // Proc. Internat. Sympos. Linear Spaces (Jerusalem, 1960), Oxford: Pergamon, 1961, 399–408.

[11] А. А. Ковалевский, М. В. Войтович, *О повышении суммируемости обобщенных решений задачи Дирихле для нелинейных уравнений четвертого порядка с усиленной эллиптичностью* // Укр. мат. журнал, **58** (2006), No. 11, 1511–1524.

[12] М. В. Войтович, *О свойствах интегрируемости обобщенных решений задачи Дирихле для нелинейных уравнений высокого порядка с усиленной эллиптичностью* // Труды ИПММ НАН Украины, **15** (2007), 3–14.

[13] M. V. Voitovich, *Existence of bounded solutions for a class of nonlinear fourth-order equations* // Differ. Equ. Appl., **3** (2011), No. 2, 247–266.

[14] M. V. Voitovich, *Existence of bounded solutions for nonlinear fourth-order elliptic equations with strengthened coercivity and lower-order terms with natural growth* // Electron. J. Differ. Equa., **2013** (2013), No. 102, 1–25.

[15] L. Nirenberg, *On elliptic partial differential equations* // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci., **13** (1959), No. 2, 115–162.

[16] L. Boccardo, F. Murat, J.-P. Puel, *L^∞-estimate for some nonlinear elliptic partial differential equations and application to an existence result* // SIAM J. Math. Anal., **23** (1992), No. 2, 326–333.

[17] P. Drabek, F. Nicolosi, *Existence of bounded solutions for some degenerate quasilinear elliptic equations* // Ann. Mat. Pura Appl., **165** (1993), No. 4, 217–238.

[18] A. Dall'aglio, D. Giachetti, J.-P. Puel, *Nonlinear elliptic equations with natural growth in general domains* // Ann. Mat. Pura Appl., **181** (2002), No. 4, 407–426.

[19] A. A. Kovalevsky, *Entropy solutions of Dirichlet problem for a class of nonlinear elliptic high-order equations with L^1-data* // Нелинейные граничные задачи, **12** (2002), 119–127.

[20] А. А. Ковалевский, *Энтропийные решения задачи Дирихле для одного класса нелинейных эллиптических уравнений четвертого порядка с L^1–правыми частями* // Изв. РАН. Сер. матем., **65** (2001), No. 2, 27–80.

[21] A. A. Kovalevsky, *Nonlinear fourth-order equations with a strengthened ellipticity and L^1-data, On the notions of solution to nonlinear elliptic problems: results and developments* // Quad. Mat., Dept. Math., Seconda Univ. Napoli, Caserta, **23** (2008), 283–337.

[22] Ж.-Л. Лионс, *Некоторые методы решения нелинейных краевых задач*, Москва, Мир, 1972.

[23] А. А. Ковалевский, *О сходимости функций из соболевского пространства, удовлетворяющих специальным интегральным оценкам* // Укр. мат. журнал, **58** (2006), No. 2, 168–183.

[24] Д. Киндерлерер, Г. Стампаккья, *Введение в вариационные неравенства и их приложения*, Москва: Мир, 1983.

[25] И. П. Натансон, *Теория функций вещественной переменной*, Москва: Наука, 1974.

Сведения об авторах

Михаил Владимирович Войтович

Отделение прикладных проблем
современного анализа
Института математики НАН Украины
ул. Терещенковская 3,
Киев 01601, Украина;
Мариупольский государственный
университет
пр. Строителей 129а,
Мариуполь 87500, Украина
E-Mail: voytovich@bk.ru