Український математичний вісник
Том 12 **(2015)**, № 1, 1 – 10

УМВ

Неединственность решения многомерной задачи Трикоми для гиперболо-параболического уравнения

Серик А. Алдашев

(*Представлена М. М. Маламудом*)

Аннотация. В работе построены примеры, которые показывают, что однородная задача Трикоми для многомерного гиперболо-параболического уравнения имеет бесчисленное множество решений.

2010 MSC. 35R12.

Ключевые слова и фразы. Задача Трикоми, многомерное уравнение, множество решений, функция Римана, интегральное уравнение.

Введение

Краевые задачи для гиперболо-параболических уравнений на плоскости изучены в [1, гл. 9], где исследованы задача Трикоми и первая краевая задача.

Смешанная задача, характеристическая задача Коши и задача Дарбу для многомерных гиперболо-параболических уравнений рассмотрены в [2, гл. 2].

Проблема задачи Трикоми для гиперболо-параболических уравнений в многомерных областях ставилась в [3, с. 117] и исследовалась другими авторами (см., например [1] и приведенную в ней библиографию).

В работе автора [4] показано неединственность решения задачи Трикоми для модельного многомерного гиперболо-параболического уравнения.

В данной статье построены примеры, которые показывают, что однородная задача Трикоми для многомерного гиперболо-параболического уравнения имеет бесчисленное множество нетривиальных решений.

Статья поступила в редакцию 19.06.2013

1. Постановка задачи и результат

Пусть D_ε — конечная область евклидова пространства E_{m+1} точек $(x_1,\ldots,x_m,t)$, ограниченная в полупространстве $t>0$ конусами K_ε : $|x|=t+\varepsilon$, $K_1 : |x|=1-t$, $0\le t\le \frac{(1-\varepsilon)}{2}$, а при $t<0$ — цилиндрической поверхностью $\Gamma=\{(x,t):|x|=1\}$ и плоскостью $t=t_0=\mathrm{const}$, где $|x|$ — длина вектора $x=(x_1,\ldots,x_m)$, а $0<\varepsilon<1$.

Обозначим через D_ε^+ и D^- — части области D_ε, лежащие соответственно в полупространствах $t>0$ и $t<0$. Части конусов K_ε, K_1, ограничивающие области D_ε^+, обозначим через S^ε и S^1 соответственно. Пусть $S_\varepsilon=\{(x,t):\varepsilon<|x|<1\}$.

В области D_ε рассмотрим модельное гиперболо-параболическое уравнение

$$0=\begin{cases}\Delta_x u-u_{tt}, & t<0,\\ \Delta_x u-u_t, & t>0,\end{cases} \tag{1}$$

где Δ_x — оператор Лапласа по переменным $x_1,\ldots,x_m,\ m\ge 2$.

В дальнейшем нам удобно перейти от декартовых координат $x_1,\ldots,x_m$, t к сферическим $r,\theta_1,\ldots,\theta_{m-1},t$, $r\ge 0$, $0\le\theta_1<2\pi$, $0\le\theta_i\le\pi$, $i=2,3,\ldots,m-1$.

Следуя ([1, с. 232]) в качестве многомерного аналога задачи Трикоми рассмотрим следующую задачу.

Задача Т. Найти решения уравнения (1) в области D_ε при $t\ne 0$ из класса $C(\bar D_\varepsilon)\cap C^1(D_\varepsilon)\cap C^2(D_\varepsilon^+\cup D^-)$, удовлетворяющие краевым условиям

$$u|_{S^\varepsilon}=0,\ \ u|_\Gamma=0. \tag{2}$$

Пусть $\{Y_{n,m}^k(\theta)\}$ — система линейно независимых сферических функций порядка n, $1\le k\le k_n$, $(m-2)!n!k_n=(n+m-3)!(2n+m-2)$, $\theta=(\theta_1,\ldots,\theta_{m-1})$.

Через $\bar\tau_n^k(r)$, $\bar\nu_n^k(r)$ обозначим коэффициенты разложения рядов по сферическим функциям $Y_{n,m}^k(\theta)$, соответственно функций $\tau(r,\theta)=u(r,\theta,0)$, $\nu(r,\theta)=u_t(r,\theta,0)$.

Имеет место

Теорема 1.1. *Задача Т имеет бесчисленное множество нетривиальных решений.*

Доказательство. В сферических координатах уравнения (1) в области D_ε^+ имеет вид

$$u_{rr}+\frac{m-1}{r}u_r-\frac{1}{r^2}\delta u-u_{tt}=0, \tag{3}$$

где

$$\delta \equiv -\sum_{j=1}^{m-1} \frac{1}{g_j \sin^{m-j-1}\theta_j} \frac{\partial}{\partial \theta_j}\left(\sin^{m-j-1}\theta_j \frac{\partial}{\partial \theta_j}\right),$$

$$g_1 = 1, \quad g_j = (\sin\theta_1 \ldots \sin\theta_{j-1})^2, \quad j > 1.$$

Аналогично, записывая уравнения (1) в области D^- в сферических координатах и переходя к пределу при $t \to -0$, получаем на множестве S_0 функциональное соотношение между $\tau(r,\theta)$ и $\nu(r,\theta)$ вида

$$\tau_{rr} + \frac{m-1}{r}\tau_r - \frac{1}{r^2}\delta\tau = \nu(r,\theta), \quad 0 < r < 1. \qquad (4)$$

Известно ([5, с. 239]), что спектр оператора δ состоит из собственных чисел $\lambda_n = n(n+m-2)$, $n = 0, 1, \ldots$, каждому из которых соответствует k_n ортонормированных собственных функций $Y^k_{n,m}(\theta)$.

Искомое решение задачи T в области D^+_ε будем искать в виде

$$u(r,\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n} \bar{u}^k_n(r,t) Y^k_{n,m}(\theta), \qquad (5)$$

где $\bar{u}^k_n(r,t)$– функции, подлежащие определению.

Подставляя функцию (5) в соотношения (3) и (4) и учитывая ортогональность сферических функций $Y^k_{n,m}(\theta)$, ([5, с. 242]) будем иметь

$$\bar{u}^k_{nrr} + \frac{m-1}{r}\bar{u}^k_{nr} - \bar{u}^k_{ntt} - \frac{\lambda_n}{r^2}\bar{u}^k_n = 0, \qquad (6)$$

$$\bar{\tau}^k_{nrr} + \frac{m-1}{r}\bar{\tau}^k_{nr} - \frac{\lambda_n}{r^2}\bar{\tau}^k_n = \bar{\nu}^k_n(r), \quad 0 < r < 1, \qquad (7)$$

при этом первое из краевых условий (2) запишется в виде

$$\bar{u}^k_n(r, r-\varepsilon) = 0, \quad \varepsilon \le r \le \frac{(1+\varepsilon)}{2}, \; k = \overline{1, k_n}, \; n = 0, 1, \ldots. \qquad (8)$$

В (6)–(8), произведя замену $\bar{u}^k_n(r,t) = r^{\frac{(1-m)}{2}} u^k_n(r,t)$ и полагая $\xi = \frac{r+t}{2}$, $\eta = \frac{r-t}{2}$, соответственно получаем

$$u^k_{n\xi\eta} + \frac{\bar{\lambda}_n}{(\xi+\eta)^2} u^k_n = 0, \quad \frac{\varepsilon}{2} < \eta < \xi < \frac{1}{2}, \qquad (9)$$

$$\tau^k_{n\xi\xi} + \frac{\bar{\lambda}_n}{\xi^2}\tau^k_n = \nu^k_n(\xi), \quad \frac{\varepsilon}{2} < \xi < \frac{1}{2}, \qquad (10)$$

$$u^k_n(\xi, \frac{\varepsilon}{2}) = 0, \quad \frac{\varepsilon}{2} \le \xi \le \frac{1}{2}, \qquad (11)$$

$$\tau_n^k(\xi)=(2\xi)^{\frac{(m-1)}{2}}\bar{\tau}_n^k(2\xi),\quad \nu_n^k(\xi)=(2\xi)^{\frac{(m-1)}{2}}\bar{\nu}_n^k(2\xi),$$
$$\bar{\lambda}_n=((m-1)(3-m)-4\lambda_n)/4,\quad k=\overline{1,\,k_n},\ n=0,1,\dots.$$

Обозначим через σ разомкнутую простую дугу Жордана с непрерывно меняющейся нормалью, обладающую тем свойством, что ни в одной точке она не имеет касания с характеристиками уравнения (9).

Предположим, что выходящие из точки $P(\xi,\eta)$ характеристики $\xi_1=\xi,\ \eta_1=\eta$ уравнения (9) пересекаются с дугой σ в точках $Q^{'}$ и Q соответственно.

Пусть G — конечная область, ограниченная участком $QQ^{'}$ дуги σ и характеристиками PQ и $PQ^{'}$.

Общее решение уравнения (9) в [3, с. 34] записано в виде

$$u(P)=\frac{1}{2}u(Q)R(Q,P)+\frac{1}{2}u(Q^{'})R(Q^{'},P)$$
$$+\int\limits_{\sigma}\left\{\frac{\partial u(P^{'})}{\partial N'}R(P,P^{'})-u(P^{'})\frac{\partial R(P,P^{'})}{\partial N}\right\}ds,\quad (12)$$

где $N^{'}$ — нормаль дуги σ в точке $P^{'}(\xi_1,\eta_1)$, направленная вовнутрь области G, а $\frac{\partial}{\partial N'}=\frac{\partial\xi_1}{\partial N}\frac{\partial}{\partial\eta_1}+\frac{\partial\eta_1}{\partial N}\frac{\partial}{\partial\xi_1}$.

Используя представление (12), в [6, с. 9] было показано, что решение задачи Коши для уравнения (9) представимо в следующем виде:

$$u_n^k(\xi,\eta)=\frac{1}{2}\tau_n^k(\eta)R(\eta,\eta,;\xi,\eta)+\frac{1}{2}\tau_n^k(\xi)R(\xi,\xi,;\xi,\eta)$$
$$+\frac{1}{\sqrt{2}}\int\limits_{\eta}^{\xi}\Big[\nu_n^k(\xi_1)R(\xi_1,\xi_1;\xi,\eta)-\tau_n^k(\xi_1)\frac{\partial}{\partial N}R(\xi_1,\eta_1;\xi,\eta)|_{\xi_1=\eta_1}\Big]d\xi_1,\quad (13)$$

где $R(\xi_1,\eta_1;\xi,\eta)=P_\mu\big[\frac{(\xi_1-\eta_1)(\xi-\eta)+2(\xi_1\eta_1+\xi\eta)}{(\xi_1+\eta_1)(\xi+\eta)}\big]$ — функция Римана для уравнения (9) из ([7]), а $P_\mu(z)$ — функция Лежандра, $\mu=n+\frac{(m-3)}{2}$, при этом

$$\frac{\partial}{\partial N}|_{\xi_1=\eta_1}=\left(\frac{\partial\xi_1}{\partial N^{\perp}}\frac{\partial u_n^k}{\partial\eta_1}+\frac{\partial\eta_1}{\partial N^{\perp}}\frac{\partial}{\partial\xi_1}\right)|_{\xi_1=\eta_1},$$

$N^{\perp}$ — нормаль к прямой $\xi=\eta$ в точке (ξ_1,η_1), направленная в сторону полуплоскости $\eta\le\xi$.

Далее из (2), (11) получим

$$\tau_n^k(\frac{\varepsilon}{2})=0,\quad \tau_n^k(\frac{1}{2})=0,\quad k=\overline{1,\,k_n},\ n=0,1,\dots.\quad (14)$$

Решение уравнения (10) записывается в виде ([8, с. 144])

$$\tau_n^k(\xi) = \frac{1}{s_2 - s_1}\int\limits_{\frac{\varepsilon}{2}}^{\xi}(\xi^{s_2}\xi_1^{3-s_2} - \xi^{s_1}\xi_1^{3-s_1})\nu_n^k(\xi_1)d\xi_1 + c_{1n}^k\xi^{s_1} + c_{2n}^k\xi^{s_2}, \quad (15)$$

$\frac{\varepsilon}{2} < \xi < \frac{1}{2}$, $s_1 = n + \frac{(m-1)}{2}$, $s_2 = -n - \frac{(m-3)}{2}$, c_{1n}^k, c_{2n}^k – произвольные независимые постоянные.

Подставляя (14) в (15) для c_{1n}^k, c_{2n}^k получим систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{s_1} c_{1n}^k + \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{s_2} c_{2n}^k = 0 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{s_1} c_{1n}^k + \left(\frac{1}{2}\right)^{s_2} c_{2n}^k = \frac{-1}{s_2 - s_1}\int\limits_{\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{1}{2}}(2^{-s_2}\xi_1^{3-s_2} - 2^{-s_1}\xi_1^{3-s_1})\nu_n^k(\xi_1)d\xi_1, \end{cases}$$

из которой найдем

$$\begin{aligned} &c_{1n}^k = \varepsilon^{s_2}2^{s_1}A_n^k/(\varepsilon^{s_1} - \varepsilon^{s_2}), \quad c_{2n}^k = -\varepsilon^{s_1}2^{s_2}A_n^k/(\varepsilon^{s_1} - \varepsilon^{s_2}), \\ &A_n^k = \mathrm{const} = \frac{1}{s_2 - s_1}\int\limits_{\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{1}{2}}(2^{-s_2}\xi_1^{3-s_2} - 2^{-s_1}\xi_1^{3-s_1})\nu_n^k(\xi_1)\, d\xi_1. \end{aligned} \quad (16)$$

Из (13), (15), учитывая условие (11), будем иметь

$$\begin{aligned} f_n^k(\xi) = &\int\limits_{\frac{\varepsilon}{2}}^{\xi}(\xi^{s_2}\xi_1^{3-s_2} - \xi^{s_1}\xi_1^{1-s_1})\nu_n^k(\xi_1)d\xi_1 \\ &+ \sqrt{2}(s_2 - s_1)\int\limits_{\frac{\varepsilon}{2}}^{\xi}\nu_n^k(\xi_1)P_\mu\left[\frac{\xi_1^2 + \xi\frac{\varepsilon}{2}}{\xi_1(\xi + \frac{\varepsilon}{2})}\right]d\xi_1 \\ &- \frac{(2\xi - \varepsilon)}{(2\xi + \varepsilon)}\int\limits_{\frac{\varepsilon}{2}}^{\xi}\Bigg\{\int\limits_{\xi_2}^{\xi}(\xi_1^{s_2-1}\xi_2^{3-s_2} \\ &- \xi_1^{s_1-1}\xi_2^{3-s_1})P'_\mu\left[\frac{\xi_1^2 + \xi\frac{\varepsilon}{2}}{\xi_1(\xi + \frac{\varepsilon}{2})}\right]d\xi_1\Bigg\}\nu_n^k(\xi_2)d\xi_2, \end{aligned} \quad (17)$$

где

$$f_n^k(\xi) = (s_2 - s_1)\Bigg\{ - c_{1n}^k\xi^{s_1} + c_{2n}^k\xi^{s_2}$$

$$+ c_{1n}^k \frac{(2\xi-\varepsilon)}{(2\xi+\varepsilon)} \int\limits_{\frac{\varepsilon}{2}}^{\xi} \xi_1^{s_1-1} P'_\mu \left[\frac{\xi_1^2+\xi\frac{\varepsilon}{2}}{\xi_1(\xi+\frac{\varepsilon}{2})} \right] d\xi_1$$

$$+ c_{2n}^k \frac{(2\xi-\varepsilon)}{(2\xi+\varepsilon)} \int\limits_{\frac{\varepsilon}{2}}^{\xi} \xi_1^{s_2-1} P'_\mu \left[\frac{\xi_1^2+\xi\frac{\varepsilon}{2}}{\xi_1(\xi+\frac{\varepsilon}{2})} \right] d\xi_1 \Bigg\}.$$

Продифференцировав уравнение (17) по ξ, получим интегральное уравнение Вольтерра второго рода

$$\chi_n^k(\xi) = \nu_n^k(\xi) + \int\limits_{\frac{\varepsilon}{2}}^{\xi} G_n(\xi,\xi_1)\nu_n^k(\xi_1)d\xi_1, \quad \frac{\varepsilon}{2} < \xi < \frac{1}{2},$$

$$\sqrt{2}(s_2-s_1)\chi_n^k(\xi) = \frac{df_n^k}{d\xi},$$

$$\sqrt{2}(s_2-s_1)G_n(\xi,\xi_1) = s_2\xi^{s_2-1}\xi_1^{3-s_2} - s_1\xi^{s_1-1}\xi_1^{3-s_1}$$
$$+ \sqrt{2}(s_2-s_1)\frac{(\varepsilon^2-4\xi_1^2)}{\xi_1(2\xi+\varepsilon)^2} P'_\mu \left[\frac{\xi_1^2+\xi\frac{\varepsilon}{2}}{\xi_1(\xi+\frac{\varepsilon}{2})} \right]$$
$$- \frac{(2\xi-\varepsilon)}{(2\xi+\varepsilon)}(\xi^{s_2-1}\xi_1^{3-s_2} - \xi_1^{s_1-1}\xi_1^{3-s_1})$$
$$- \int\limits_{\xi_1}^{\xi} (\xi_2^{s_2-1}\xi_1^{3-s_2} - \xi_2^{s_1-1}\xi_1^{3-s_2}) \Bigg[\frac{4\varepsilon}{(2\xi+\varepsilon)^2} P'_\mu \left(\frac{\xi_2^2+\xi\frac{\varepsilon}{2}}{\xi_2(\xi+\frac{\varepsilon}{2})} \right)$$
$$+ \frac{(2\xi-\varepsilon)(\varepsilon^2-4\xi_2^2)}{\xi_2(2\xi+\varepsilon)^3} P''_\mu \left(\frac{\xi_2^2+\xi\frac{\varepsilon}{2}}{\xi_2(\xi+\frac{\varepsilon}{2})} \right) \Bigg] d\xi_2,$$

из которого найдем

$$\nu_n^k(\xi) = \chi_n^k(\xi) - \int\limits_{\frac{\varepsilon}{2}}^{\xi} R_n(\xi,\xi_1;-1)\chi_n^k(\xi_1)d\xi_1, \tag{18}$$

где $R_n(\xi,\xi_1;-1)$ — резольвента ядра $G_n(\xi,\xi_1)$.

Далее из (16)–(18) имеем

$$\sqrt{2}(s_2-s_1)A_n^k$$
$$= \int\limits_{\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{1}{2}} (2^{-s_2}\xi_1^{3-s_2} - 2^{-s_1}\xi_1^{3-s_1}) \left[\frac{df_n^k}{d\xi_1} - \int\limits_{\frac{\varepsilon}{2}}^{\xi_1} R_n(\xi_1,\xi_2;-1)\frac{df_n^k}{d\xi_2}d\xi_2 \right] d\xi_1,$$

$$\frac{(\varepsilon^{s_1}-\varepsilon^{s_2})}{(s_2-s_1)}\frac{df_n^k}{d\xi}=\Bigg\{\varepsilon^{s_2}2^{s_1}\Bigg[\frac{4\varepsilon}{(2\xi+\varepsilon)^2}\int\limits_{\frac{\varepsilon}{2}}^{\xi}\xi_1^{s_1-1}P'_\mu\left(\frac{\xi_1^2+\xi\frac{\varepsilon}{2}}{\xi_1(\xi+\frac{\varepsilon}{2})}\right)d\xi_1$$

$$+\left(\frac{2\xi-\varepsilon}{2\xi+\varepsilon}-s_1\right)\xi^{s_1-1}+\frac{(2\xi-\varepsilon)}{(2\xi+\varepsilon)^3}\int\limits_{\frac{\varepsilon}{2}}^{\xi}(\varepsilon^2-4\xi_1^2)\xi_1^{s_1-2}P''_\mu\left(\frac{\xi_1^2+\xi\frac{\varepsilon}{2}}{\xi_1(\xi+\frac{\varepsilon}{2})}\right)d\xi_1\Bigg]$$

$$-\varepsilon^{s_1}2^{s_2}\Bigg[\frac{4\varepsilon}{(2\xi+\varepsilon)^2}\int\limits_{\frac{\varepsilon}{2}}^{\xi}\xi_1^{s_2-1}P'_\mu\left(\frac{\xi_1^2+\xi\frac{\varepsilon}{2}}{\xi_1(\xi+\frac{\varepsilon}{2})}\right)d\xi_1+\left(\frac{2\xi-\varepsilon}{2\xi+\varepsilon}-s_2\right)\xi^{s_2-1}$$

$$+\frac{(2\xi-\varepsilon)}{(2\xi+\varepsilon)}\int\limits_{\frac{\varepsilon}{2}}^{\xi}(\xi^2-4\xi_1^2)\xi_1^{s_2-2}P''_\mu\left(\frac{\xi_1^2+\xi\frac{\varepsilon}{2}}{\xi_1(\xi+\frac{\varepsilon}{2})}\right)d\xi_1\Bigg]\Bigg\}A_n^k$$

$$\equiv L_n(s_1,s_2,\xi)A_n^k. \quad (19)$$

Т.к. $L_n\neq 0$, $\frac{dL_n}{d\xi}\neq 0$, $\forall\,\xi\in[\frac{\varepsilon}{2},\,\frac{1}{2}]$, то из (19) следует, что $A_n^k=0$ и $\frac{df_n^k}{d\xi}\equiv 0$.

Следовательно, из (18), (15) вытекает, что $\tau_n^k(\xi)\equiv 0$.

Теперь задачу Т будем изучать в области D^-. Для этого сначала функцию $\tau_n^k(r)$ продолжим гладким образом на отрезок $[0,1]$ в виде

$$g_n^k(r)=\begin{cases}0, & \varepsilon\leq r\leq 1\\ \tilde{\tau}_0^1(r), & 0\leq r\leq\varepsilon,\\ n^{-l}\tilde{\tau}_n^k(r), & 0\leq r\leq\varepsilon,\ k=\overline{1,\,k_n},\ n=1,2,\ldots,\end{cases} \quad (20)$$

где $\tilde{\tau}_n^k(r)\in C([0,\varepsilon])$, причем $\tilde{\tau}_n^k(\varepsilon)=0,\ \tau_n^k(r)=r^\alpha\hat{\tau}_n^k(r),\ \alpha\geq\frac{(m-1)}{2}$.

В силу оценок [5, с. 237], [9, с. 147]

$$|k_n|\leq Cn^{m-2},\quad \left|\frac{\partial^p}{\partial\theta_j^p}Y_{n,m}^k(\theta)\right|\leq Cn^{\frac{m}{2}-p+1},$$

$$C=\mathrm{const},\quad j=\overline{1,m-1},\quad p=0,1,\ldots,$$

для ряда

$$u(r,\theta,0)=g(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}r^{\frac{(1-m)}{2}}g_n^k(r)Y_{n,m}^k(\theta) \quad (21)$$

имеем

$$|u(r,\theta,o)| = |g(r,\theta)| \le \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n} r^{(1-m)/2}|g_n^k(r)||Y_{n,m}^k(\theta)|$$
$$\le C_1\sum_{n=1}^{\infty}|k_n||Y_{n,m}^k(\theta)| \le C_1\sum_{n=1}^{\infty} n^{-l+\frac{3m}{2}-1}, \quad C_1 = \mathrm{const} > 0.$$

Отсюда следует, что ряд (21) сходится абсолютно и равномерно, если $l > \frac{3m}{2}$. В области D^- рассмотрим первую краевую задачу для уравнения

$$u_{rr} + \frac{m-1}{r}u_r - \frac{1}{r^2}\delta u - u_t = 0$$

с условиями

$$u|_{S_0} = g(r,\theta), \quad u|_{\Gamma} = 0. \tag{22}$$

Решение задачи (21), (22) будем искать в виде (5).

Подставляя (5) в (21) получим уравнение

$$u_{nrr}^k - u_{nt}^k + \frac{\bar{\lambda}_n}{r^2}u_n^k = 0, \quad k = \overline{1, k_n},\ n = 0,1,\ldots, \tag{23}$$

при этом краевое условие (22) имеет вид

$$u_n^k(r,0) = g_n^k(r), \quad u_n^k(1,t) = 0,\ k = \overline{1, k_n},\ n = 0,1,\ldots. \tag{24}$$

Решение задачи (23), (24) рассмотрим в виде

$$u_n^k(r,t) = \sum_{s=1}^{\infty} V_s(r)T_s(t), \tag{25}$$

при этом пусть

$$g_n^k(r) = \sum_{s=1}^{\infty} a_s V_s(r). \tag{26}$$

Подставляя (25) в (23), с учетом (24) получим

$$V_{srr}^k + \frac{\bar{\lambda}_n}{r^2}V_s + \mu V_s = 0, \quad 0 < r < 1, \tag{27}$$

$$V_s(0) = 0, \quad V_s(1) = 0, \tag{28}$$

$$T_{st} + \mu T_s = 0. \tag{29}$$

Ограниченное решение задачи (27), (28) имеет вид ([8, с. 404])

$$V_s(r) = \sqrt{r}J_\nu(\gamma_{s,n}r), \tag{30}$$

$\nu = n + \frac{(m-2)}{2}$, $J_\nu(z)$ — функция Бесселя первого рода, $\gamma_{s,n}$ — ее нули, $\mu = \gamma_{s,n}^2$, а решением уравнения (29) является

$$T_s(t) = \exp(-(\gamma_{s,n}^2 t). \tag{31}$$

Далее, подставляя (30) в (26), будем иметь

$$r^{-\frac{1}{2}} g_n^k(r) = \sum_{s=1}^{\infty} a_{s,n} J_\nu(\gamma_{s,n}, r), \quad 0 < r < 1,$$

которое является рядом Фурье–Бесселя ([10, с. 83]), если

$$a_{s,n} = \frac{2}{[J_{\nu+1}(\gamma_{s,n})]^2} \int\limits_0^1 \sqrt{\xi} g_n^k(\xi) J_\nu(\gamma_{s,n}\xi)\, d\xi, \tag{32}$$

где $\gamma_{s,n}$, $s = 1, 2, \ldots$ — положительные нули функции Бесселя, расположенные в порядке возрастания их величины.

Таким образом из (25), (30), (31) следует, что решением задачи (21), (22) в области D^- является функция

$$u(r,\theta,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \sum_{s=1}^{\infty} a_{s,n} r^{\frac{(2-m)}{2}} J_{n+\frac{(m-2)}{2}}(\gamma_{s,n} r) Y_{n,m}^k(\theta) \exp(-(\gamma_{s,n}^2 t), \tag{33}$$

которая принадлежит классу $C(\bar{D}^-) \cap C^1(D^- \cup S) \cap C^2(D^-)$, где $a_{s,n}$ определяется из (32).

Поскольку для функции $g_n^k(r)$ записанной формулой (20) имеем бесконечное число гладких продолжений, то решение (33) также является бесконечным множеством.

Следовательно, задача T имеет нетривиальные решения вида (33).

Теорема доказана. □

Литература

[1] А. М. Нахушев, *Задачи со смещением для уравнения в частных производных*, М.: Наука, 2006, 287 с.

[2] В. Н. Врагов, *Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики*, Новосибирск: НГУ, 1983, 84 с.

[3] А. В. Бицадзе, *Уравнения смешанного типа*, М.: Изд. АН СССР, 1959, 164 с.

[4] С. А. Алдашев, *Неединственность решения задачи Трикоми для многомерного гиперболо-параболического уравнения* // Дифференц. уравнения, **50** (2014), No. 4, 544–548.

[5] С. Г. Михлин, *Линейные уравнения в частных производных*, М.: Высшая школа, 1977, 431 с.

[6] С. А. Алдашев, *Краевые задаачи для многомерных гиперболических и смешанных уравнений*, Алматы: Гылым, 1994, 170 с.

[7] E. T. Copson, *On the Riemann–Green function* // J. Rath. Mech. and Anal., **1** (1958), 324–348.

[8] Э. Камке, *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям*, М.: Наука, 1965, 703 с.

[9] С. Г. Михлин, *Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения*, М.: Физматгиз, 1962, 254 с.

[10] Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции*, т. 2, М.: Наука, 1974, 295 с.

Сведения об авторах

Серик Аймурзаевич Алдашев

Казахский национальный педагогический университет им. Абая,
Институт математики, физики и информатики
ул. Толе би, 86
Алматы, 050012
Казахстан
E-Mail: aldash51@mail.ru