Український математичний вісник
Том 11 **(2014)**, № 4, 574 – 585

Интегродифференциальные уравнения Вольтерра второго порядка, неразрешённые относительно старшей производной. Случай полуограниченных операторных коэффициентов

Екатерина В. Сёмкина

(*Представлена Н. Д. Копачевским*)

Аннотация. Доказаны теоремы о существовании и единственности сильного решения для вольтерровых интегро-дифференциальных уравнений второго порядка в гильбертовом пространстве в случае, когда имеет место подкачка энергии системы (оператор диссипации энергии ограничен снизу), а система может быть неустойчива (оператор потенциальной энергии ограничен снизу).

2010 MSC. 39B42, 39B99.

Ключевые слова и фразы. Интегро-дифференциальное уравнение Вольтерра, самосопряжённый оператор.

1. Введение

Рассмотрим в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ задачу Коши для интегро-дифференциального уравнения второго порядка вида

$$A\frac{d^2u}{dt^2} + F\frac{du}{dt} + Bu + \sum_{k=1}^{m}\int_0^t G_k(t,s)C_k u(s)\,ds = f(t), \tag{1.1}$$

$$u(0) = u^0, \quad u'(0) = u^1.$$

Эта задача в случае самосопряжённых положительно определённых операторов F (оператор диссипации) и B (оператор потенциальной энергии) изучена в [1]. В данной работе рассматривается вариант, когда эти операторы лишь ограничены снизу, т.е. в исследуемой

Статья поступила в редакцию 27.11.2013

ISSN 1810 – 3200.

динамической системе возможна подкачка энергии, причём система может быть статически неустойчива. Отметим, что в [2, 3] в случае $A = I$ изучены некоторые классы интегро-дифференциальных уравнений второго порядка с неограниченными операторными коэффициентами, в случае, когда все коэффициенты являются функциями одного из них.

Будем считать, что

$$0 < A = A^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H}), \quad F = F^* \geqslant \gamma_F I, \quad B = B^* \geqslant \gamma_B I, \ \gamma_F, \gamma_B \in \mathbb{R}, \tag{1.2}$$

а ограничения на $G_k(t,s)$ и C_k сформулируем ниже.

Сформулируем, как и в [1], следующее

Замечание 1.1. Будем считать, что оператор A действует не в $\mathcal{H}$, а в шкале пространств $\mathcal{E}^\alpha$, построенной по оператору A^{-1} с первоначальной областью определения $\mathcal{D}(A^{-1}) = \mathcal{R}(A) \subset \mathcal{H}$, тогда

$$\mathcal{H} = \mathcal{E}^0, \quad \mathcal{D}(A^{-1}) = \mathcal{E}^1, \quad \mathcal{D}(A^{-1/2}) = \mathcal{E}^{1/2},$$

причём $A^{-1/2} : \mathcal{E}^{\alpha/2} \to \mathcal{E}^{(\alpha-1)/2}$ — ограниченный оператор.

Замечание 1.2. Далее под $\mathcal{D}(A^{-1/2}B)$ будем понимать множество

$$\mathcal{D}(A^{-1/2}B) = \mathcal{D}(A^{-1/2}B_c) = \mathcal{R}(B_c^{-1}A^{1/2}) \subset \mathcal{H},$$

$$B_c := (B - \gamma_B I) + cI, \quad \forall c > 0, \quad \mathcal{D}(B_c) = \mathcal{D}(B).$$

Аналогично определяется множество

$$\mathcal{D}(A^{-1/2}BA^{-1/2}) := \mathcal{D}(A^{-1/2}B_cA^{-1/2}).$$

С учётом этих замечаний дадим определение сильного решения задачи (1.1) со значениями в пространстве $\mathcal{E}^{1/2} = \mathcal{D}(A^{-1/2})$.

Определение 1.1. *Назовём сильным решением задачи Коши* (1.1) *на отрезке* $[0,T]$ *такую функцию* $u(t)$ *со значениями в пространстве* $\mathcal{E}^{1/2} = \mathcal{D}(A^{-1/2})$, *для которой выполнены следующие условия:*

1°. $u(t) \in C([0,T]; \mathcal{D}(A^{-1/2}B))$;

2°. $u'(t) \in C([0,T]; \mathcal{D}(|B|^{1/2})) \cap C([0,T]; \mathcal{D}(A^{-1/2}F))$, $|B| := (B^2)^{1/2}$;

3°. $Au''(t) \in C([0,T]; \mathcal{D}(A^{-1/2}))$;

4°. *все слагаемые в уравнении* (1.1) *непрерывны по* t *и принадлежат пространству* $C([0,T]; \mathcal{D}(A^{-1/2}))$;

5°. *при любом* $t \in [0,T]$ *выполнено уравнение* (1.1);

6°. *выполнены начальные условия* $u(0) = u^0$, $u'(0) = u^1$.

Необходимыми условиями существования сильного решения задачи (1.1), (1.2) являются, очевидно, условия

$$u^0 \in \mathcal{D}(A^{-1/2}B), \quad u^1 \in \mathcal{D}(|B|^{1/2}) \cap \mathcal{D}(A^{-1/2}F),$$

$$f(t) \in C([0,T];\mathcal{D}(A^{-1/2})).$$

Цель данной работы — выяснить ограничения на операторы F, B, C_k и оператор-функции $G_k(t,s)$, $k = \overline{1,m}$, при которых имеет место утверждение о существовании сильного решения задачи (1.1) со значениями в $\mathcal{D}(A^{-1/2}) = \mathcal{E}^{1/2}$.

2. Предварительные преобразования

Будем считать, что задача (1.1) имеет сильное решение $u(t)$ в смысле определения 1.1, и осуществим, как и в работе [1], переход от этой задачи к задаче Коши для системы двух интегродифференциальных уравнений первого порядка. Осуществляя в (1.1) замену $A^{1/2}u =: v$ и применяя слева оператор $A^{-1/2}$ (это можно сделать для сильного решения), приходим к задаче:

$$\frac{d^2v}{dt^2} + A^{-1/2}FA^{-1/2}\frac{dv}{dt} + A^{-1/2}BA^{-1/2}v + \sum_{k=1}^{m}\int_0^t A^{-1/2}G_k(t,s)C_kA^{-1/2}v(s)\,ds = A^{-1/2}f(t), \quad (2.1)$$

$$v(0) = A^{1/2}u^0, \quad v'(0) = A^{1/2}u^1.$$

Здесь все слагаемые в уравнении являются элементами из $C([0,T];\mathcal{H})$.

Прежде чем перейти к задаче Коши для интегродифференциального уравнения первого порядка, сформулируем ряд вспомогательных утверждений.

Определение 2.1. *Будем говорить, что оператор $F = F^*$ имеет дискретный спектр $\sigma(F) = \sigma_d(F)$, если:*

1) *$\sigma(F)$ состоит из изолированных конечнократных вещественных собственных значений с предельной точкой $+\infty$;*

2) *система соответствующих собственных элементов образует ортогональный базис в $\mathcal{H}$.*

Лемма 2.1. *Пусть* $X \geqslant \gamma I$, $\gamma \in \mathbb{R}$, *самосопряжённый оператор с дискретным спектром, имеющий конечное число* $\varkappa$ (*с учётом кратностей*) *отрицательных собственных значений. Пусть* A *ограниченный положительный оператор. Тогда спектр оператора* $A^{-1/2}XA^{-1/2}$ *имеет ровно* $\varkappa$ *отрицательных собственных значений и минимальное из них*

$$\lambda_{min}(A^{-1/2}XA^{-1/2}) = -1 \Bigg/ \left(\min_{u:(Xu,u)<0} \frac{(Au,u)}{(-Xu,u)} \right). \tag{2.2}$$

Доказательство. По теореме 2.1 из [4, с. 38] положительная часть спектра линейного операторного пучка

$$M(\mu) := -\mu X - A$$

состоит из $\varkappa$ собственных значений $0 < \mu_1 \leqslant \mu_2 \leqslant \dots \leqslant \mu_\varkappa$, причём

$$\mu_1 = \min_{u:(Xu,u)<0} \frac{(Au,u)}{(-Xu,u)} \tag{2.3}$$

Заметив, что задача $M(\mu)v = 0$ равносильна спектральной задаче $A^{-1/2}XA^{-1/2}u = \lambda u$, где $\lambda = -1/\mu$, $A^{1/2}v = u$, получаем, что отрицательная часть спектра оператора $A^{-1/2}XA^{-1/2}$ состоит из $\varkappa$ собственных значений $\lambda_k := -1/\mu_k$, $k = \overline{1,\varkappa}$. Отсюда следует, что $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \dots \leqslant \lambda_\varkappa < 0$, и с учётом (2.3) приходим к формуле (2.2). $\square$

Лемма 2.2. *Пусть оператор* $X = X^* \geqslant \gamma I$, $\gamma \in \mathbb{R}$, *имеет дискретный спектр, а оператор* $A > 0$ *ограничен. Тогда для выполнения условия*

$$X + \alpha A \gg 0, \quad \alpha > 0, \tag{2.4}$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$A^{-1/2}XA^{-1/2} + \alpha I \gg 0. \tag{2.5}$$

Доказательство. Убедимся сперва непосредственной проверкой, что при условии (2.4) условие (2.5) также имеет место:

$$\Big((A^{-1/2}XA^{-1/2} + \alpha I)u, u\Big) = \Big((X + \alpha A)(A^{-1/2}u), (A^{-1/2}u)\Big)$$
$$\geqslant c_1 \|A^{-1/2}u\|^2 \geqslant c_1 c_2 \|u\|^2,$$

$$u \in \mathcal{D}(A^{-1/2}XA^{-1/2}) = \mathcal{R}(A^{1/2}X_c^{-1}A^{1/2}).$$

Здесь $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ — константы положительной определённости операторов $X + \alpha A$ и $A^{-1/2}$ соответственно.

Пусть теперь условие (2.5) выполнено, тогда

$$((X+\alpha A)u,u) := \Big(A^{1/2}(A^{-1/2}XA^{-1/2}+\alpha I)A^{1/2}u,u\Big)$$
$$= \Big((A^{-1/2}XA^{-1/2}+\alpha I)\,(A^{1/2}u),(A^{1/2}u)\Big) \geqslant c_3\|A^{1/2}u\|^2 \geqslant 0,$$

$$c_3>0, \quad u\in\mathcal{D}(A^{-1/2}XA^{-1/2})$$

то есть оператор $X+\alpha A$ неотрицателен. Но если $((X+\alpha A)u,u)=0$, то $\|A^{1/2}u\|=0$, а значит $u=0$, откуда следует, что $X+\alpha A$ по крайней мере положительный оператор.

Покажем, что на самом деле он положительно определён. В самом деле, так как X имеет дискретный спектр, а A — ограничен, то $X+\alpha A$ тоже имеет дискретный спектр. Однако $X+\alpha A$ положителен. Значит он положительно определён. □

Будем далее считать, что операторы F и B в задаче (1.1) имеют дискретные спектры.

Возвращаясь к задаче (2.1), представим оператор B в виде:

$$A^{-1/2}BA^{-1/2} = A^{-1/2}BA^{-1/2}+\beta I-\beta I =: B_\beta-\beta I, \quad \beta\in\mathbb{R}_+, \tag{2.6}$$

и константу β выберем (см. лемму 2.1) из условия

$$\beta > \lambda_{\min}(A^{-1/2}BA^{-1/2}) = 1\Big/\left(\min_{u:(Bu,u)<0}\frac{(Au,u)}{(-Bu,u)}\right), \tag{2.7}$$

и тогда $B_\beta \gg 0$. Заметим, что при этом по лемме 2.2 вместе с B_β положительно определён и оператор $B+\beta A =: \widetilde{B}_\beta$.

При условиях (2.6), (2.7) задача (2.1) перепишется в виде

$$\frac{d^2v}{dt^2}+A^{-1/2}FA^{-1/2}\frac{dv}{dt}+A^{-1/2}\widetilde{B}_\beta A^{-1/2}v$$
$$+\sum_{k=1}^{m}\int\limits_0^t A^{-1/2}G_k(t,s)C_kA^{-1/2}v(s)\,ds = A^{-1/2}f(t)+\beta v(t), \tag{2.8}$$

$$v(0)=A^{1/2}u^0, \quad v'(0)=A^{1/2}u^1,$$

где теперь в правую часть входит искомая функция $v(t)$.

Для сильного решения задачи (2.8) проделаем те же преобразования, что и в работе [1]. Введём новую искомую функцию:

$$-i\widetilde{B}_\beta^{1/2}A^{-1/2}v(t) =: \frac{dw}{dt}, \quad w(0)=0. \tag{2.9}$$

В силу свойства 2° из определения 1.1 получаем, что $d^2w/dt^2 \in$ $\in C([0,T];\mathcal{H})$ и потому

$$\frac{d^2w}{dt^2} + i\widetilde{B}_\beta^{1/2} A^{-1/2} \frac{dv}{dt} = 0, \quad w'(0) = -i\widetilde{B}_\beta^{1/2} A^{-1/2} v(0) = -i\widetilde{B}_\beta^{1/2} u^0. \tag{2.10}$$

Преобразуем ещё интегральные слагаемые в (2.8), воспользовавшись формулами

$$v(s) = \int_0^s v'(\xi) d\xi + v(0)$$

и осуществив замену порядка интегрирования. Будем иметь

$$\int_0^t A^{-1/2} G_k(t,s) C_k A^{-1/2} \left(\int_0^s v'(\xi)\, d\xi + v(0) \right) ds$$
$$= \int_0^t \left(\int_\xi^t A^{-1/2} G_k(t,s) C_k A^{-1/2}\, ds \right) v'(\xi)\, d\xi$$
$$+ \int_0^t A^{-1/2} G_k(t,s) C_k A^{-1/2} v(0)\, ds, \qquad k = \overline{1,m}.$$

Введём здесь обозначения:

$$\begin{aligned} \text{а)} \quad & \hat{G}_k(t,s) := A^{-1/2} G_k(t,s) A^{1/2}, \quad \hat{C}_k := A^{-1/2} C_k A^{-1/2}, \\ & \hat{G}_k(t,s)\hat{C}_k = A^{-1/2} G_k(t,s) C_k A^{-1/2}, \end{aligned} \tag{2.11}$$

$$\begin{aligned} \text{б)} \quad & \check{G}_k(t,s) := A^{-1/2} G_k(t,s), \quad \check{C}_k := C_k A^{-1/2}, \\ & \check{G}_k(t,s)\check{C}_k = A^{-1/2} G_k(t,s) C_k A^{-1/2}, \end{aligned} \tag{2.12}$$

и рассмотрим в дальнейшем два варианта, отвечающих случаям (2.11) и (2.12).

Так, в варианте (2.11) задача (2.8) с учётом (2.9), (2.10) равносильна задаче Коши для интегро-дифференциального уравнения первого порядка следующего вида:

$$\frac{dz}{dt} + \mathcal{F}_0 z + \sum_{k=0}^m \int_0^t \widetilde{V}_k(t,\xi) \widetilde{C}_k z(\xi)\, d\xi = \widetilde{f}_0(t), \tag{2.13}$$

$$z(0) = z^0 := (A^{1/2} u^1; -i\widetilde{B}_\beta^{1/2} u^0)^\tau, \tag{2.14}$$

$$z(t) := (v'(t); w'(t))^\tau \in \widetilde{\mathcal{H}} := \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}, \tag{2.15}$$

$$\widetilde{f}_0(t) := (A^{-1/2} f(t) - \sum_{k=1}^{m} \int_0^t A^{-1/2} G_k(t,s) C_k u^0 \, ds + \beta A^{1/2} u^0; 0)^\tau, \tag{2.16}$$

$$\mathcal{F}_0 := \begin{pmatrix} A^{-1/2} F A^{-1/2} & i A^{-1/2} \widetilde{B}_\beta^{1/2} \\ i \widetilde{B}_\beta^{1/2} A^{-1/2} & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.17}$$

$$\mathcal{D}(\mathcal{F}_0) := (\mathcal{D}(A^{-1/2} F A^{-1/2}) \cap \mathcal{D}(\widetilde{B}_\beta^{1/2} A^{-1/2})) \oplus \mathcal{D}(A^{-1/2} \widetilde{B}_\beta^{1/2}), \tag{2.18}$$

а операторы $\widetilde{V}_k(t,\xi)$ и $\widetilde{C}_k$ заданы формулами

$$\begin{gathered} \widetilde{V}_k(t,\xi) := \operatorname{diag}(\hat{V}_k(t,\xi); 0), \\ \hat{V}_k(t,\xi) := \int_\xi^t \hat{G}_k(t,s)\, ds = \int_\xi^t A^{-1/2} G_k(t,s) A^{1/2} \, ds, \ k = \overline{1,m}, \end{gathered} \tag{2.19}$$

$$\widetilde{C}_k := \operatorname{diag}(\hat{C}_k; 0), \quad \mathcal{D}(\widetilde{C}_k) := \mathcal{D}(\hat{C}_k) \oplus \mathcal{H}, \quad k = \overline{1,m}. \tag{2.20}$$

$$\widetilde{V}_0(t,\xi) \widetilde{C}_0 = \operatorname{diag}(-\beta I; 0). \tag{2.21}$$

в случае (2.11) и формулами

$$\begin{gathered} \widetilde{V}_k(t,\xi) := \operatorname{diag}(\check{V}_k(t,\xi); 0), \\ \check{V}_k(t,\xi) := \int_\xi^t \check{G}_k(t,s)\, ds = \int_\xi^t A^{-1/2} G_k(t,s) \, ds, \end{gathered} \tag{2.22}$$

$$\widetilde{C}_k := \operatorname{diag}(\check{C}_k; 0), \quad \mathcal{D}(\widetilde{C}_k) := \mathcal{D}(\check{C}_k) \oplus \mathcal{H}, \quad k = \overline{1,m}, \tag{2.23}$$

(2.21) в случае (2.12).

Осуществим ещё в (2.13) замену искомой функции

$$z(t) = e^{\alpha t} y(t), \quad \alpha > 0. \tag{2.24}$$

Константу α здесь выберем из условия (см. лемму 2.1)

$$\alpha > \lambda_{\min}(A^{-1/2} F A^{-1/2}) = 1 \Big/ \left(\min_{u:(Fu,u)<0} \frac{(Au,u)}{(-Fu,u)} \right),$$

чтобы $F_\alpha := A^{-1/2} F A^{-1/2} + \alpha I \gg 0$. Заметим, что при этом по лемме 2.2 вместе с F_α положительно определён и оператор $F + \alpha A =: \widetilde{F}_\alpha$.

Тогда для новой искомой функции $y(t)$ получим задачу Коши

$$\frac{dy}{dt} + \mathcal{F}_\alpha y + \sum_{k=0}^{m} \int_0^t \widetilde{W}_k(t,\xi)\widetilde{C}_k y(\xi)\,d\xi = \widetilde{f}_\alpha(t), \tag{2.25}$$

$$y(0) = z(0) = (A^{1/2}u^1; -\widetilde{B}_\beta^{1/2}u^0)^\tau, \tag{2.26}$$

$$\mathcal{F}_\alpha := \mathcal{F}_0 + \alpha\mathcal{I} = \begin{pmatrix} A^{-1/2}\widetilde{F}_\alpha A^{-1/2} & iA^{-1/2}\widetilde{B}_\beta^{1/2} \\ i\widetilde{B}_\beta^{1/2}A^{-1/2} & \alpha I \end{pmatrix}, \tag{2.27}$$
$$\widetilde{F}_\alpha := F + \alpha A \gg 0,$$

$$\mathcal{D}(\mathcal{F}_\alpha) = \mathcal{D}(\mathcal{F}_0), \tag{2.28}$$

$$\widetilde{f}_\alpha(t) := e^{-\alpha t}\widetilde{f}_0(t), \quad \widetilde{W}_k(t,\xi) := e^{-\alpha(t-\xi)}\widetilde{V}_k(t,\xi), \tag{2.29}$$

где функция $\widetilde{f}_0(t)$ задана формулой (2.16), а $\widetilde{V}_k(t,\xi)$ и $\widetilde{C}_k$ — формулами (2.19), (2.20), (2.21) в обозначениях (2.11) и формулами (2.22), (2.23), (2.21) в обозначениях (2.12).

Заметим теперь, что операторные коэффициенты в задаче Коши (2.13) обладают теми же свойствами, что и операторные коэффициенты аналогичной задачи Коши (33), которая возникла в работе [1, с. 61]. Поэтому дальнейшее исследование задачи (2.13) полностью повторяет исследование, проведенное в [1].

А именно, в зависимости от связей областей определения операторов $\widetilde{B}_\beta^{1/2}A^{-1/2}$ и $A^{-1/2}FA^{-1/2}$ необходимо рассмотреть три случая

1°. Малая интенсивность внутренней диссипации:

$$\mathcal{D}(\widetilde{B}_\beta^{1/2}A^{-1/2}) \subset \mathcal{D}(A^{-1/2}FA^{-1/2}). \tag{2.30}$$

2°. Средняя интенсивность внутренней диссипации:

$$\mathcal{D}(A^{-1/2}BA^{-1/2}) \subset \mathcal{D}(A^{-1/2}FA^{-1/2}) \subset \mathcal{D}(\widetilde{B}_\beta^{1/2}A^{-1/2}) \subset \mathcal{D}(\widetilde{F}_\alpha^{1/2}A^{-1/2}). \tag{2.31}$$

3°. Большая интенсивность внутренней диссипации:

$$\mathcal{D}(A^{-1/2}FA^{-1/2}) \subset \mathcal{D}(A^{-1/2}BA^{-1/2}) \subset \mathcal{D}(\widetilde{B}_\beta^{1/2}A^{-1/2}). \tag{2.32}$$

Для каждого из этих вариантов в работе [1] получены теоремы о существовании и единственности сильного решения задачи (1.1) в случае, когда $F \gg 0$ и $B \gg 0$.

В связи с тем, что рассуждения, которые необходимо провести для исследования задачи (2.25), полностью повторяют рассуждения проведенные в [1], сформулируем ниже без доказательства дальнейшие утверждения.

3. Итоговые утверждения

Для случая малой интенсивности диссипации энергии системы справедливы следующие факты.

Теорема 3.1. *Пусть в задаче* (1.1) *операторы* F *и* B *имеют дискретные спектры, и выполнены условия* (2.30), (1.2), *а также условия*

$$\mathcal{D}(\widetilde{B}_\beta^{1/2}A^{-1/2}) \subset \mathcal{D}(A^{-1/2}C_kA^{-1/2}), \quad k=\overline{1,m}. \tag{3.1}$$

$$G_k(t,s),\ \partial G_k(t,s)/\partial t \in C(\Delta_T;\mathcal{L}(\mathcal{D}(A^{-1/2}))), \quad k=\overline{1,m}. \tag{3.2}$$

$$u^0 \in \mathcal{D}(A^{-1/2}B), \quad u^1 \in \mathcal{D}(\widetilde{B}_\beta^{1/2}). \tag{3.3}$$

$$f(t) \in C^1([0,T];\mathcal{D}(A^{-1/2})). \tag{3.4}$$

Тогда эта задача имеет единственное сильное решение $u(t)$ *со значениями в* $\mathcal{D}(A^{-1/2}) = \mathcal{E}^{1/2}$ *на отрезке* $[0,T]$.

Теорема 3.2. *Пусть в задаче* (1.1) *операторы* F *и* B *имеют дискретные спектры, и выполнены условия* (2.30), (1.2), *а также условия*

$$\mathcal{D}(\widetilde{B}_\beta^{1/2}A^{-1/2}) \subset \mathcal{D}(C_kA^{-1/2}), \quad k=\overline{1,m}, \tag{3.5}$$

$$G_k(t,s),\ \partial G_k(t,s)/\partial t \in C(\Delta_T;\mathcal{L}(\mathcal{H},\mathcal{D}(A^{-1/2}))), \quad k=\overline{1,m}, \tag{3.6}$$

(3.3), (3.4). *Тогда эта задача имеет единственное сильное решение* $u(t)$ *со значениями в* $\mathcal{D}(A^{-1/2}) = \mathcal{E}^{1/2}$ *на отрезке* $[0,T]$.

Для случая большой интенсивности диссипации энергии системы справедливы следующие утверждения.

Теорема 3.3. *Пусть в задаче* (1.1) *операторы* F *и* B *имеют дискретные спектры, и выполнены условия* (2.32), (1.2), *и условия*

$$u^0 \in \mathcal{D}(A^{-1/2}F) \subset \mathcal{D}(A^{-1/2}B), \quad u^1 \in \mathcal{D}(A^{-1/2}F), \tag{3.7}$$

$$f(t) \in C^1([0,T];\mathcal{D}(A^{-1/2})), \tag{3.8}$$

$$\mathcal{D}(A^{-1/2}C_kA^{-1/2}) \supset \mathcal{D}(\widetilde{F}_\alpha^{1/2}A^{-1/2}), \quad k=\overline{1,m}, \tag{3.9}$$

$$G_k(t,s), \partial G_k(t,s)/\partial t \in C(\Delta_T;\mathcal{L}(\mathcal{D}(A^{-1/2}))), \quad k=\overline{1,m}. \tag{3.10}$$

Тогда эта задача имеет на отрезке $[0,T]$ *единственное сильное решение* $u(t)$ *со значениями в* $\mathcal{D}(A^{-1/2})$.

Теорема 3.4. *Пусть в задаче* (1.1) *операторы* F *и* B *имеют дискретные спектры, и выполнены условия* (2.32), (1.2), (3.7), (3.8), *а также*

$$\mathcal{D}(C_k A^{-1/2}) \supset \mathcal{D}(\widetilde{F}_\alpha^{1/2} A^{-1/2}), \quad k = \overline{1,m},$$

$$G_k(t,s), \partial G_k(t,s)/\partial t \in C(\Delta_T; \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{D}(A^{-1/2}))), \quad k = \overline{1,m}.$$

Тогда эта задача имеет на отрезке $[0,T]$ *единственное сильное решение* $u(t)$ *со значениями в* $\mathcal{D}(A^{-1/2})$.

Для случая средней интенсивности диссипации энергии системы теоремы о разрешимости удаётся получить лишь для так называемого ассоциированного уравнения. Именно, назовём задачу Коши

$$A\frac{d^2u}{dt^2} + FA^{-1/2}\Big(A^{1/2}\frac{du}{dt} + Q^*\widetilde{B}_\beta^{1/2}u\Big) - \beta Au + \alpha A^{1/2}Q^*\widetilde{B}_\beta^{1/2} + \sum_{k=1}^{m}\int_0^t G_k(t,s)C_k u(s)\,ds = f(t), \quad (3.11)$$

$$u(0) = u^0, \quad u'(0) = u^1,$$

где $Q := \widetilde{B}_\beta^{1/2}\widetilde{F}_\alpha^{-1}A^{1/2}$, задачей, ассоциированной с исходной задачей (1.1) в предположениях (1.2).

Определение 3.1. *Сильным решением ассоциированной задачи* (3.11) *на отрезке* $[0,T]$ *назовём функцию* $u(t)$ *со значениями в* $\mathcal{D}(A^{-1/2}) \subset \mathcal{H}$, *для которой выполнены следующие условия:*

1°. $u(t) \in \mathcal{D}(\widetilde{B}_\beta^{1/2})$ *и* $\widetilde{B}_\beta^{1/2}u(t) \in C([0,T]; \mathcal{H})$;

2°. $A^{1/2}du/dt + Q^*\widetilde{B}_\beta^{1/2}u \in \mathcal{D}(A^{-1/2}FA^{-1/2})$
и $FA^{-1/2}(A^{1/2}(du/dt) + Q^*\widetilde{B}_\beta^{1/2}u(t)) \in C([0,T]; \mathcal{D}(A^{-1/2}))$;

3°. $Au(t) \in C^2([0,T]; \mathcal{D}(A^{-1/2}))$;

4°. *для любого* $t \in [0,T]$ *выполнено уравнение* (3.11), *где все слагаемые являются элементами из* $C([0,T]; \mathcal{D}(A^{-1/2}))$, *и начальные условия.*

Здесь, как и в [1], справедливо следующее утверждение, объясняющее термин “ассоциированное уравнение”.

Лемма 3.1. *Если сильное решение* $u(t)$ *ассоциированной задачи* (3.11) *обладает дополнительными свойствами гладкости*

$$u(t) \in \mathcal{D}(B), \quad Bu(t) \in C([0,T]; \mathcal{D}(A^{-1/2})), \quad (3.12)$$

то оно является сильным решением задачи (1.1), (1.2) *в смысле определения* 1.1, *то есть на отрезке* $[0,T]$ *и со значениями в* $\mathcal{D}(A^{-1/2})$.

Для ассоциированного уравнения справедливы следующие результаты.

Теорема 3.5. *Пусть операторы F и B имеют дискретные спектры, и выполнены условия* (2.31), (1.2), *а также условия*

$$u^0 \in \mathcal{D}(A^{-1/2}B), \quad u^1 \in \mathcal{D}(A^{-1/2}F), \quad f(t) \in C^1([0,T];\mathcal{D}(A^{-1/2})); \tag{3.13}$$

$$\mathcal{D}(A^{-1/2}C_kA^{-1/2}) \supset \mathcal{D}(\widetilde{B}_\beta^{1/2}A^{-1/2}), \quad k=\overline{1,m}; \tag{3.14}$$

$$G_k(t,s),\ \partial G_k(t,s)/\partial t \in C(\Delta_T;\mathcal{L}(\mathcal{D}(A^{-1/2}))), \quad k=\overline{1,m}. \tag{3.15}$$

Тогда ассоциированная задача (3.11) *имеет на отрезке* $[0,T]$ *единственное сильное* (*в смысле определения* 3.1) *решение со значениями в* $\mathcal{D}(A^{-1/2})$.

Теорема 3.6. *Пусть операторы F и B имеют дискретные спектры, и выполнены условия* (2.31), (1.2), (3.13), *а также условия*

$$\mathcal{D}(C_kA^{-1/2}) \supset \mathcal{D}(\widetilde{B}_\beta^{1/2}A^{-1/2}), \quad k=\overline{1,m};$$

$$G_k(t,s), \partial G_k(t,s)/\partial t \in C(\Delta_T;\mathcal{L}(\mathcal{H},\mathcal{D}(A^{-1/2}))), \quad k=\overline{1,m}.$$

Тогда ассоциированная задача (3.11) *имеет на отрезке* $[0,T]$ *единственное сильное* (*в смысле определения* 3.1) *решение* $u(t)$ *со значениями в* $\mathcal{D}(A^{-1/2})$.

Автор благодарит рецензента за ценные замечания, приведшие к существенному улучшению изложения текста статьи.

Благодарности. Автор благодарит Н. Д. Копачевского за постановку задачи, а также за руководство работой.

Литература

[1] Н. Д. Копачевский, Е. В. Сёмкина, *Об интегро-дифференциальных уравнениях Вольтерра второго порядка, неразрешённых относительно старшей производной* // Ученые записки Таврического национального университета им. В. И. Вернадского, Сер. «Физико-математические науки», **26(65)** (2013), No. 1, 52–79.

[2] В. В. Власов, Д. А. Медведев, Н. А. Раутиан, *Функционально-дифференциальные уравнения в пространствах Соболева и их спектральный анализ* // Современные проблемы математики и механики, Математика, **VIII** (2011), No. 1, 8–306.

[3] В. В. Власов, Н. А. Раутиан, А. С. Шамаев, *Исследование операторных моделей, возникающих в задачах наследственной механики* // Труды Шестой Международной конференции по дифференциальным и функционально-дифференциальным уравнениям (Москва, 14–21 августа, 2011). Часть 1, Современная математика. Фундаментальные направления, **45** (2012), 43–61.

[4] T. Ya. Azizov, N. D. Kopachevsky, L. I. Sukhocheva, *On eigenvalues pencils with a parameter* // Proceedings of the 16th Conference on Operator Theory Timisoara (Romania) July 2–10, (1996), 37–50.

Сведения об авторах

Екатерина В. Сёмкина

Факультет математики и информатики,
Таврический национальный университет
им. В. И. Вернадского,
пр. акад. Вернадского 4,
Симферополь, 95007,
Россия
E-Mail: kozirno@gmail.com