Український математичний вісник
Том 11 **(2014)**, № 4, 524 – 542

УМВ

Існування та єдиність розв'язку задачі з вільною межею в теорії фільтраційної консолідації грунтів з урахуванням впливу техногеннних факторів

Петро М. Мартинюк

(*Представлена С. Д. Івасишеним*)

Анотація. Досліджено математичну модель процесу фільтраційної консолідації грунтів в умовах впливу техногенних факторів, яка описується крайовою задачею з вільною межею для системи квазілінійних параболічних рівнянь. Доведено існування та єдиність локального в часі розв'язку одновимірної крайової задачі в просторах Гельдера.

2010 MSC. 35A01, 35K51, 35K59.

Ключові слова та фрази. Квазілінійні рівняння параболічного типу, система, вільна межа, існування та єдиність розв'язку.

Вступ

В роботі [18] розвинута теорія фільтраційної консолідації грунтів з урахуванням впливу солепереносу (див. також наведену там бібліографію). В роботах [19, 20] дана теорія доповнена і вдосконалена. Зокрема, додатково враховано вплив теплопереносу та явище просідання скелету грунту в процесі консолідації. Урахування останнього фактору призводить до необхідності дослідження крайової задачі для системи квазілінійних параболічних рівнянь в областях з рухомими межами. Досліджень якісної теорії сформульованих крайових задач в цих роботах проведено не було. Ці дослідження в одновимірному випадку і становлять предмет даної статті.

Огляд робіт з досліджень подібних крайових задач можна розділити на два напрямки. По перше, це задачі для лінійних та квазілінійних рівнянь та систем рівнянь параболічного типу. По друге, це

Стаття надійшла в редакцію 15.04.2014

ISSN 1810 – 3200.

крайові задачі з першого напрямку, які розглядаються в областях з вільними рухомими межами.

З першого напрямку потрібно виділити класичну роботу [32]. Також сюди можна віднести [1, 17, 22, 25, 26, 30, 31, 44]. В роботі [33] (див. також наведену там бібліографію) досліджено питання існування та єдиності розв'язку крайової задачі для квазілінійної системи параболічних рівнянь, якою описується математична модель одновимірної задачі фільтраційної консолідації грунтів в умовах впливу солепереносу. Однак, крайову задачу досліджено в областях з фіксованими межами.

Більш детальніше зупинимось на роботах другого напрямку. Класичною роботою вказаного напрямку є [23]. Предметом фундаментальної роботи [53] є доведення локальної розвязності однофазної багатовимірної (≥ 2) задачі Стефана. Для цього використано теорему Неша про неявні функції. В роботі [27] розглянуто задачу з вільною межею для одновимірного напівлінійного рівняння дифузії в якій замість умови Стефана задано інтегральну умову. В роботі [40] досліджена розв'язність однофазної задачі Стефана в просторах Соболєва для лінійних параболічних рівнянь. В [42] розглянута одновимірна однофазна задача Стефана для квазілінійного параболічного рівняння в якій задано нелокальна гранична умова на фіксованій границі. В роботі [24] розглянуто задачу з вільною межею для квазілінійного параболічного рівняння другого роду з розривними коефіцієнтами та правою частиною. Вільною межею є саме геометричний інтерфейс розриву. Розрив відбувається за певного фіксованого значення невідомої функції. В класичній роботі [34] досліджена однофазна задача Стефана в багатовимірному випадку (≥ 2) для квазілінійного рівняння параболічного типу. В роботі [54] досліджена лінійна одновимірна однофазна задача Стефана, коли в початковий момент часу рідка фаза відсутня. В роботах [56, 57] розглянута одновимірна однофазна задача з вільною межею для лінійного параболічного рівняння, коли кінематична гранична умова є інтегро-диференціальною. Для доведення існування та єдиності глобального класичного розвязку використано зведення крайової задачі до еквівалентної системи нелінійних інтегральних рівнянь. В [49] розглянута однофазна одновимірна задача з вільною межею для нелінійного параболічного рівняння з нелінійною граничною умовою на вільній межі. В [45] досліджена одновимірна задача з вільною межею для системи еліптико-параболічних рівнянь у вагових просторах Гельдера. В роботі [41] розглянута однофазна задача Стефана з малим параметром біля похідної в часі в рівнянні параболічного типу. В роботі [28], подібно до роботи [3], розглянута одновимірна однофазна задача в припущенні, що рідина є стискуваною. В [58] досліджена стійкість розв'язків одновимірної однофазної задачі Стефана для рівняння $u_t - u_{xx} = u^p,\ p > 1$. В [47] доведено існування та єдиність локального розв'язку одновимірної однофазної задачі Стефана для некласичного рівняння теплопровідності. В роботі [4] доведена розв'язність модифікованої задачі Стефана в якій на вільній межі задано кінетичну умову $u^+ = u^- = \epsilon k(y,\tau) - \epsilon v$, де $k(y,\tau)$ — півсума головних кривизн вільної межі, v — швидкість її переміщення у напрямку нормалі. В [15] доведено існування класичного розв'язку в однофазній задачі Стефана на будь-якому скінченному проміжку часу. Також встановлена гладкість вільної межі. В роботі [36] розглянуті двофазні задачі з вільними межами. Досліджені питання єдиності, монотонності, просторової локалізації та існування розв'язків. Проведено огляд розроблених конструктивних методів розв'язання конкретних задач та математичного прогнозування у відповідних областях природознавства. В роботі [37] отримано умови існування класичного розв'язку у випадку, коли початкова швидкість руху вільної межі на многовиді контакту дорівнює нулю. В роботі [10] розглянуто двохфазні задчі з вільними межами в одновимірному випадку у вагових просторах Гельдера в малому по часі. Доведено існування та єдиність локального розв'язку.

Також виділимо дослідження крайових задач з вільними межами, якими описуються математичні моделі фізичних, хімічних, біологічних, механічних задач та процесів. В роботі [60] розглянута задача з вільною межею, якою описується математична модель розвитку пухлини головного мозку. Складовою задачі є система лінійних еліптико-параболічних рівнянь. Розглянуто питання існування та єдиності слабкого розв'язку. В роботі [59] вивчена двофазна задача з вільною межею у випадку двох просторових змінних для системи лінійних рівнянь, яка містить одне параболічне та два еліптичні рівняння. Задача моделює розвиток самопідтримуючих клітин. Досліджено локальний класичний розиток. В [21] розглянуто двофазні задачі Стефана та Флоріна. Вивчено спектральні властивості задачі спряження, яка виникає після лінеаризації вищевказаних задач на малому проміжку часу. В роботі [46] в просторах Гельдера доведено існування та єдиність розвязку багатовимірної (≥ 2) двофазної задачі Флоріна. В роботі [50] розглянуто проблеми побудови математичних моделей процесів в пористих середовищах. Авторами відмічена важливість дослідження питань існування та єдиності розв'язків відповідних крайових задач з вільними межами. В роботі [29] доведена теорема існування розв'язку одновимірної задачі Веригіна в просторах Гельдера. В роботі [16] доведено існування глобального класичного розв'язку багатовимірної двохфазної задачі Стефана для квазілінійного рівняння. В роботі [9] доведено (для малого часового проміжку) існування та єдиність розв'язків багатовимірних двофазних задач Стефана та Флоріна для лінійних та квазілінійних параболічних рівнянь другого порядку в обмежених зіркових областях. В роботі [35] досліджена двовимірна задача Флоріна в просторах Гельдера. В [3] в просторах Гельдера досліджена задача з вільною межею для системи рівнянь, які включають рівняння Нав'є–Стокса та рівняння теплопереносу в області рідкої фази. В [14] вивчена локальна в часі розвязність двох класичних задач з вільними межами для параболічних рівнянь: двофазних задач Стефана і Маскета–Веригіна при розмірності $n \geq 2$. В роботі [11] знайдено точні розв'язки одновимірних двофазних задач з вільною межею для лінійних параболічних рівнянь — задач Стефана, Флоріна та Веригіна.

В окрему групу виділимо крайові задачі з вільними межами для вироджених параболічних рівнянь. В роботі [48] розглянута однофазна задача для виродженої системи двох параболічних рівнянь. Досліджено слабкий розв'язок щодо його існування та єдиності, обмеженості та неперервності. В роботі [5] доведена розвязність в цілому по часу одновимірної двофазної задачі Стефана для виродженого параболічного рівняння. В роботі [7] досліджено існування та єдиність розв'язку для нелінійного рівняння $u_t = \Delta(u^m)$, $m > 1$ в багатовимірному випадку. Швидкість вільної межі описується законом Дарсі.

В деяких роботах дослідження задач з вільними межами зведено до дослідження обернених крайових задач [2, 27].

Окремий блок становлять роботи щодо дослідження крайових задач з похідними по часу в граничних умовах [12, 39, 51, 55]. В роботах [39, 55] показано, що до дослідження таких задач зводяться деякі крайові задачі з вільними межами. Також в роботі [13] показано, що двофазна задача Стефана та задача Веригіна зводяться до крайової задачі з похідними по часу в граничних умовах для параболічних рівнянь.

Проведений короткий огляд засвідчує наявність значного доробку з якісної теорії крайових задач з вільними межами. Однак, також є ще не вирішені проблеми. Виникають вони, як результат побудови нових, як правило нелінійних, математичних моделей процесів різної природи. Одній із таких задач і присвячена дана стаття.

1. Модель процесу фільтраційної консолідації грунтів в умовах впливу техногенних факторів

Математичну модель одновимірної задачі фільтраційної консолідації ґрунтового масиву з урахуванням впливу переносу солей в неізотермічному режимі, враховуючи результати робіт [19,20], можна описати наступною крайовою задачею:

$$\frac{1+\bar{e}}{\gamma a}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(k(h,c,T)\frac{\partial h}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\nu(c,T)\frac{\partial c}{\partial x}\right)\right.$$
$$\left.-\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu(c,T)\frac{\partial T}{\partial x}\right)\right)=\frac{\partial h}{\partial t},\quad x\in(0;l(t)),\ t>0,\quad (1.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(D(c,T)\frac{\partial c}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(D_T\frac{\partial T}{\partial x}\right)-u\frac{\partial c}{\partial x}-\gamma_m\left(c-C_m\right)=n\frac{\partial c}{\partial t},$$
$$x\in(0;l(t)),\ t>0,\quad (1.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda(c,T)\frac{\partial T}{\partial x}\right)-\rho c_\rho u\frac{\partial T}{\partial x}=c_T\frac{\partial T}{\partial t},\quad x\in(0;l(t)),\ t>0,\quad (1.3)$$

$$u=-k(h,c,T)\frac{\partial h}{\partial x}+\nu(c,T)\frac{\partial c}{\partial x}+\mu(c,T)\frac{\partial T}{\partial x},\quad x\in[0;l(t)],\ t\geq 0,\quad (1.4)$$

$$h(0,t)=h(l(t),t)=0,\quad t\geq 0,\quad (1.5)$$

$$c(0,t)=C_m,\quad c(l(t),t)=C_1(t),\quad t\geq 0,\quad (1.6)$$

$$T(0,t)=T_1(t),\quad T(l(t),t)=T_2(t),\quad t\geq 0,\quad (1.7)$$

$$h(x,0)=h_0(x),\quad c(x,0)=c_0(x),\quad T(x,0)=T_0(x),\quad x\in[0;l_0],\quad (1.8)$$

$$\frac{dl(t)}{dt}=\frac{\gamma a}{1+\bar{e}}\int\limits_0^{l(t)}\frac{\partial h}{\partial t}\,dx,\quad t>0,\quad (1.9)$$

$$l(t)|_{t=0}=l_0>0,\quad (1.10)$$

де $C_1(t)$, $T_1(t)$, $T_2(t)$, $h_0(x)$, $c_0(x)$, $T_0(x)$ — задані функції; l_0 — задана додатна стала, яка означає товщину неконсолідованого масиву грунту в початковий момент часу. Тут використані наступні позначення: $h(x,t)=p/\gamma$ — надлишковий напір; p — надлишковий тиск в порвому розчині; γ — питома вага порової рідини; $c(x,t)$ — концентрація порового сольового розчину; $T(x,t)$ — температура; k, D, D_T, λ, ν, μ — коефіцієнти фільтрації, дифузії, термодифузії, ефективної теплопровідності вологого грунту, хімічного осмосу, термічного осмосу; ρ — густина порового розчину; c_ρ — питома теплоємність порового розчину; c_T — об'ємна теплоємність грунту при сталому об'ємі; u — швидкість фільтрації; t — час; e, $\bar{e}$ — коефіцієнт пористості та його середнє значення; n — пористість грунту; γ_m — констананата швидкості масообміну; C_m — концентрація граничного насичення. Закон

(1.4) є узагальненим законом Дарсі–Герсеванова на випадок руху сольових розчинів в неізотермічних умовах [19]. В ньому враховується вплив на швидкість фільтрації осмотичних явищ, які мають місце в нерівномірно засолених ґрунтах та у випадку наявності градієнта температури, а також залежність параметрів фільтрації від сольового та теплового режимів пористого середовища. В лівій частині закону (1.4) знехтувано членом “$\bar{e}v$” в силу малості величини v (швидкість руху твердих частинок грунту).

Вважається, що верхня та нижня межі масиву ґрунту дреновані. Концентрація порового сольового розчину, як і температура, на обох межах є відомою. Причому, верхня межа змочена концентрованим сольовим розчином.

Класична теорія фільтраційної консолідації грунтів розвинута, наприклад, в роботі [43]. Обгрунтування важливості розгляду та дослідження крайової задачі (1.1)–(1.10) наведено в роботах [18–20]. Числові розв’язки цієї нелінійної крайової задачі знайдено методами скінченних різниць, скінченних елементів та методом радіальних базисних функцій [18–20]. Однак питань існування та єдиності її (крайової задачі) розв’язків досліджено не було. Лише в роботі [33] досліджено подібну задачу, але в області з фіксованими межами.

Перед основними викладками перетворимо кінематичну граничну умову (1.9), згідно якої описується зміна положення верхньої рухомої межі масиву грунту в результаті ущільнення. При цьому верхня рухома межа описується рівнянням $x = l(t)$. Умова (1.9) виведена із співвідношення [19, с. 72]

$$\frac{dl(t)}{dt} = \int\limits_0^{l(t)} \frac{1}{1+e}\frac{\partial e}{\partial t}\, dx. \tag{1.11}$$

З іншого боку, рівняння (1.1) виводиться із рівняння нерозривності [19, с. 54]

$$\frac{\partial e}{\partial t} = -(1+e)\,\mathrm{div}\, u,$$

яке у випадку однієї просторової змінної набуває вигляду

$$\frac{\partial e}{\partial t} = -(1+e)\frac{\partial u}{\partial x}. \tag{1.12}$$

Підставляючи (1.12) в (1.11), отримуємо

$$\frac{dl(t)}{dt} = \int\limits_0^{l(t)} \frac{1}{1+e}\frac{\partial e}{\partial t}\, dx = -\int\limits_0^{l(t)} \frac{1}{1+e}(1+e)\frac{\partial u}{\partial x}\, dx = -u\big|_0^{l(t)}$$

$$= \left(k(h,c,T)\frac{\partial h}{\partial x} - \nu(c,T)\frac{\partial c}{\partial x} - \mu(c,T)\frac{\partial T}{\partial x} \right)\bigg|_{x=l(t)} - \left(k(h,c,T)\frac{\partial h}{\partial x} - \nu(c,T)\frac{\partial c}{\partial x} - \mu(c,T)\frac{\partial T}{\partial x} \right)\bigg|_{x=0}. \quad (1.13)$$

Також накладемо наступне обмеження:

$$l_{\min} \le l(t) \le l_{\max}, \quad t \ge 0. \quad (1.14)$$

2. Постановка загальної задачі

Нехай в циліндрі $Q_T = \Omega(t) \times (0;T]$, де $\Omega = (0; l(t))$, задана наступна крайова задача:

$$\mathbf{u}_t - \frac{d}{dx}\left[\mathbf{A}\left(x,t,\mathbf{u},\mathbf{u}_x\right)\cdot \mathbf{u}_x\right] + \mathbf{F}\left(x,t,\mathbf{u},\mathbf{u}_x\right) = 0, \quad (x,t) \in Q_T, \quad (2.1)$$

$$\mathbf{u}(x,t)|_{t=0} = \mathbf{U}_0(x), x \in \Omega_0 = (0; l_0) = \Omega(t)|_{t=0}, \quad (2.2)$$

$$\mathbf{u}(x,t)|_{x=0} = \mathbf{u}(x,t)|_{x=l(t)} = \mathbf{0}, \quad t \in [0;T], \quad (2.3)$$

$$\frac{dl(t)}{dt} = \lambda \left(\mathbf{a}_N\left(x,t,\mathbf{u},\mathbf{u}_x\right)\cdot \mathbf{u}_x|_{x=l(t)} - \mathbf{a}_N\left(x,t,\mathbf{u},\mathbf{u}_x\right)\cdot \mathbf{u}_x|_{x=0} \right), \quad t > 0, \quad (2.4)$$

$$l(t)|_{t=0} = l_0 > 0. \quad (2.5)$$

Тут: $\mathbf{u}(x,t) = (u_1(x,t), u_2(x,t), \ldots, u_N(x,t))^T$ — невідома векторфункція, де індекс 'T' зверху означає транспонування; N — кількість рівнянь в системі (2.1); $\mathbf{A}\left(x,t,\mathbf{u},\mathbf{u}_x\right) = \{a_{ij}\}_{i,j}^{N,N}$ — матриця з коефіцієнтами залежними від x, t, $\mathbf{u}$, $\mathbf{u}_x$, і яка має трикутний вигляд, тобто $a_{ij} = 0$ при $i < j$; $\mathbf{F}\left(x,t,\mathbf{u},\mathbf{u}_x\right) = (f_1, f_2, \ldots, f_N)^T$; $\mathbf{F}\left(x,t,\mathbf{u},\mathbf{u}_x\right) = \mathbf{B}\left(x,t,\mathbf{u},\mathbf{u}_x\right)\cdot\mathbf{u}_x + \mathbf{G}\left(x,t\right)\cdot\mathbf{u} + \mathbf{R}\left(x,t\right)$, де $\mathbf{B}, \mathbf{G}$ — матриці розмірності $N \times N$, які мають діагональний вигляд, а $\mathbf{R} = (r_1, r_2, \ldots, r_N)^T$; $\lambda > 0$ — деяка відома константа; $\mathbf{a}_N\left(x,t,\mathbf{u},\mathbf{u}_x\right) = (a_{N1}, a_{N2}, \ldots, a_{NN})$ — N-й рядок матриці $\mathbf{A}\left(x,t,\mathbf{u},\mathbf{u}_x\right)$.

Позначення всіх функціональних просторів та норм, що використано в подальших викладках, аналогічні, як в [32].

Зробимо наступні припущення щодо матриці $\mathbf{A}\left(x,t,\mathbf{u},\mathbf{u}_x\right)$:

1. Коефіцієнти a_{ij} i-го рядка при $i \ne j$ не залежать від u_x^i;

2. Коефіцієнти a_{ij} i-го рядка можуть залежати лише від u_x^s, $s \le i$, при врахуванні припущення 1.

Тоді систему (2.1) можна подати у вигляді

$$\mathbf{u}_t - \mathbf{A}^1(x,t,\mathbf{u},\mathbf{u}_x)\cdot\mathbf{u}_{xx} + \mathbf{F}^1(x,t,\mathbf{u},\mathbf{u}_x) = 0, (x,t)\in Q_T, \qquad (2.6)$$

де матриця $\mathbf{A}^1(x,t,\mathbf{u},\mathbf{u}_x) = \{a^1_{ij}\}^{N,N}_{i,j}$ має трикутний вигляд, причому коефіцієнти i-го рядка визначаються рівностями $a^1_{ii} = \frac{\partial(a_{ii}\cdot u^i_x)}{\partial u^i_x}$ та $a^1_{ij} = \sum_{s=1}^{i}\frac{\partial(a_{is}\cdot u^s_x)}{\partial u^j_x}$ при $i\neq j$; $\mathbf{F}^1(x,t,\mathbf{u},\mathbf{u}_x) = \mathbf{B}^1(x,t,\mathbf{u},\mathbf{u}_x)\cdot\mathbf{u}_x +$ $+\mathbf{G}(x,t)\cdot\mathbf{u} + \mathbf{R}(x,t)$, де коефіцієнти матриці $\mathbf{B}^1(x,t,\mathbf{u},\mathbf{u}_x)$ визначаються рівностями $b^1_{ij} = b_{ij} + \sum_{s=i}^{N}\frac{\partial(a_{is}\cdot u^s_x)}{\partial u^j}$.

Нехай виконуються наступні умови [33]:

a) $$0 < a^i_0(|\mathbf{u}|) \le a_{ii}(x,t,\mathbf{u},\mathbf{q}) \le A^i_0(|\mathbf{u}|), \quad i=\overline{1,N};$$

b) $$0 < a^i_0(|\mathbf{u}|) \le \frac{\partial\left[a_{ii}(x,t,\mathbf{u},\mathbf{q})\cdot q^i\right]}{\partial q^i} \le A^i_0(|\mathbf{u}|), \quad i=\overline{1,N};$$

c) $$|f_i(x,t,\mathbf{u},\mathbf{q})| \le A^i_0(|\mathbf{u}|)\cdot\left|q^i\right|^2 + \varphi(x,t),$$
$$\left|f^1_i(x,t,\mathbf{u},\mathbf{q})\right| \le A^i_0(|\mathbf{u}|)\cdot\left|q^i\right|^2 + \varphi_1(x,t), \quad i=\overline{1,N};$$

d) $$\left|\frac{\partial a_{ii}(x,t,\mathbf{u},\mathbf{q})}{\partial u^i}\right| \le A^i_0(|\mathbf{u}|),$$
$$\left|\frac{\partial\left[a_{ii}(x,t,\mathbf{u},\mathbf{q})\cdot q^i\right]}{\partial x}\right| \le A^i_0(|\mathbf{u}|)\cdot\left|q^i\right|^2 + \varphi_2(x,t), \quad i=\overline{1,N};$$

e) $$\left|\frac{\partial\left[a_{ij}(x,t,\mathbf{u},\mathbf{q})\cdot q^j\right]}{\partial u^s}\right| \le \varphi_3(x,t);$$
$$\left|\frac{a_{ij}(x,t+\tau,\mathbf{u},\mathbf{q})\cdot q^j - a_{ij}(x,t,\mathbf{u},\mathbf{q})\cdot q^j}{\tau}\right| \le \varphi_3(x,t);$$
$$\left|\frac{f_i(x,t+\tau,\mathbf{u},\mathbf{q}) - f_i(x,t,\mathbf{u},\mathbf{q})}{\tau}\right| \le \varphi_3(x,t);$$
$$\left|\frac{\partial f_i(x,t,\mathbf{u},\mathbf{q})}{\partial q^s}\right| \le \varphi_3(x,t); \quad \left|\frac{\partial f_i(x,t,\mathbf{u},\mathbf{q})}{\partial u^s}\right| \le \varphi_3(x,t);$$
$$i=\overline{1,N}, j=\overline{1,N}, s=\overline{1,N};$$

При $(x,t)\in\overline{Q}_T$, $|u^i| \le M^i$, $|q^j| \le M^i_1$, функції $a_{ij}(x,t,\mathbf{u},\mathbf{q})$, $f_i(x,t,\mathbf{u},\mathbf{q})$, $\frac{\partial a_{ij}(x,t,\mathbf{u},\mathbf{q})}{\partial q^s}$, $\frac{\partial a_{ij}(x,t,\mathbf{u},\mathbf{q})}{\partial u^s}$, $\frac{\partial a_{ij}(x,t,\mathbf{u},\mathbf{q})}{\partial x}$ є неперервними функціями і задовольняють по x, t, u^i, q^i умові Гельдера з показниками β_1, $\beta_1/2$, β_1,β_1 відповідно, $j=\overline{1,N}$, $s=\overline{1,N}$;

f) оператор

$$L\mathbf{u} = \mathbf{u}_t - \frac{d}{dx}\left[\mathbf{A}(x,t,\mathbf{u},\mathbf{u}_x)\cdot u_x\right] + \mathbf{F}(x,t,\mathbf{u},\mathbf{u}_x)$$

так само як і оператор

$$L^1\mathbf{u} = \mathbf{u}_t - \mathbf{A}^1\left(x,t,\mathbf{u},\mathbf{u}_x\right)\cdot\mathbf{u}_{xx} + \mathbf{F}^1\left(x,t,\mathbf{u},\mathbf{u}_x\right)$$

є 2-параболічними за Петровським [32].

У вищенаведених умовах функції $a_0^i\left(\psi\right)$, $A_0^i\left(\psi\right)$, $i=\overline{1,N}$, є додатними неперервними функціями аргумента $\psi \geq 0$; $\varphi_3\left(x,t\right)$ — неперервна функція, яка задовольняє по x, t умові Гельдера з показниками β_1, $\beta_1/2$ відповідно; $\|\varphi,\varphi_1,\varphi_2\|_{2q_1,2r_1,Q_T} \leq \mu_1$, де

$$\frac{1}{r_1}+\frac{1}{2q_1}=1-\eta_1,$$
$$q_1\in\left[1,\infty\right],\quad r_1\in\left[\frac{1}{1-\eta_1};\frac{2}{1-2\eta_1}\infty\right],\quad 0<\eta_1<\frac{1}{2}.$$

3. Зведення до задачі в області з фіксованими межами

В роботі [6] відмічено наступне: 'При вивченні доволі широкого класу задач із вільними межами для параболічних та еліптичних рівнянь доведення розвязності на малому проміжку часу проводиться згідно наступної схеми. За допомогою того чи іншого перетворення задача зводиться до дослідження нелінійного функціонального рівняння, в якому шукані функції визначені у фіксованих областях. Далі отримане рівняння лінеаризується, вивчаються умови розв'язності лінійної задачі та встановлюються оцінки для її розв'язку, які потім використовуються для доведення застосовності до нелінійного рівняння того чи іншого принципу існування нерухомої точки'. Цей підхід частково ми використаємо і в представленій роботі.

Проведемо наступну заміну змінних [56, 57]:

$$\xi=\frac{x}{l(t)},\quad t=t,$$

і позначимо $\mathbf{v}\left(\xi,t\right)=\mathbf{u}\left(\xi l(t),t\right)$.

Для обгрунтування допустимості такої заміни змінних потрібні додаткові пояснення. Надалі розглядаємо функції $l(t)$ з множини B_{2M}, де

$$B_{2M}=\left\{l(t):\|l(t)\|_{H^{1+\beta_1/2}([0;T])}\leq 2M\right\},$$
$$M=l_0+\sum_i\left\|v_0^i\right\|_{H^{2+\beta_1}([0;1])}.$$

Якщо проміжок часу T є достатньо малим, то

$$\left|l(t)-l_0\right|\leq\left|l'(t)\right|T\leq 2MT<\frac{1}{2}\min\left\{\left(l_0-l_{\min}\right),\left(l_{\max}-l_0\right)\right\}.$$

Далі, для уникнення нових позначень, провівши переприсвоєння величин

$$l_{\min} = l_0 - \frac{1}{2}\min\left\{\left(l_0 - l_{\min}\right), \left(l_{\max} - l_0\right)\right\},$$

$$l_{\max} = l_0 + \frac{1}{2}\min\left\{\left(l_0 - l_{\min}\right), \left(l_{\max} - l_0\right)\right\}$$

отримаємо виконання умови (1.14), де $l_{\min} > 0$, $l_{\max} > 0$. "Платою" за такі припущення є дослідження поки що лише локальної за часом розв'язності вищенаведеної крайової задачі.

Тоді

$$\mathbf{u}_x\left(x,t\right) = \frac{1}{l(t)}\mathbf{v}_\xi\left(\xi,t\right);$$

$$\mathbf{u}_{xx}\left(x,t\right) = \frac{1}{l^2(t)}\mathbf{v}_{\xi\xi}\left(\xi,t\right);$$

$$\mathbf{u}_t\left(x,t\right) = \mathbf{v}_t\left(\xi,t\right) - \xi\frac{l'(t)}{l(t)}\mathbf{v}_\xi\left(\xi,t\right).$$

В результаті з крайової задачі (2.1)–(2.5) отримуємо наступну:

$$\begin{gathered}\mathbf{v}_t(\xi,t) - \frac{d}{d\xi}\left[\overline{\mathbf{A}}\left(\xi,t,\mathbf{v},\mathbf{v}_\xi\right)\cdot\mathbf{v}_\xi\right] + \overline{\mathbf{F}}\left(\xi,t,\mathbf{v},\mathbf{v}_\xi\right) = 0,\\ \xi\in(0;1),\quad t\in(0;T],\end{gathered}\tag{3.1}$$

$$\mathbf{v}(\xi,t)|_{t=0} = \mathbf{V}_0(\xi),\quad \xi\in[0;1],\tag{3.2}$$

$$\mathbf{v}(\xi,t)|_{\xi=0} = \mathbf{v}(\xi,t)|_{\xi=1} = \mathbf{0},\quad t\in[0;T],\tag{3.3}$$

$$l'(t) = \lambda l(t)\left(\overline{\mathbf{a}}_N\left(\xi,t,\mathbf{v},\mathbf{v}_\xi\right)\cdot\mathbf{v}_\xi|_{\xi=1} - \overline{\mathbf{a}}_N\left(\xi,t,\mathbf{v},\mathbf{v}_\xi\right)\cdot\mathbf{v}_\xi|_{\xi=0}\right),\quad t>0,\tag{3.4}$$

$$l(t)|_{t=0} = l_0 > 0,\tag{3.5}$$

де

$$\overline{\mathbf{A}}\left(\xi,t,\mathbf{v},\mathbf{v}_\xi\right) = \frac{1}{l^2(t)}\mathbf{A}\left(\xi l(t),t,\mathbf{v}(\xi,t),\frac{1}{l(t)}\mathbf{v}_\xi\right),$$

$$\overline{\mathbf{F}}\left(\xi,t,\mathbf{v},\mathbf{v}_\xi\right) = \mathbf{F}\left(\xi l(t),t,\mathbf{v}(\xi,t),\frac{1}{l(t)}\mathbf{v}_\xi\right) - \xi\frac{l'(t)}{l(t)}\mathbf{v}_\xi\left(\xi,t\right),$$

$$\mathbf{V}_0\left(\xi\right) = \mathbf{U}_0\left(\xi l(t)\right).$$

Аналогічно, система (2.6) набуває вигляду

$$\begin{gathered}\mathbf{v}_t(\xi,t) - \overline{\mathbf{A}^1}\left(\xi,t,\mathbf{v},\mathbf{v}_\xi\right)\cdot\mathbf{v}_{\xi\xi} + \overline{\mathbf{F}^1}\left(\xi,t,\mathbf{v},\mathbf{v}_\xi\right) = 0,\\ \xi\in(0;1),\quad t\in(0;T],\end{gathered}\tag{3.6}$$

де

$$\overline{\mathbf{A}^1}\left(\xi, t, \mathbf{v}, \mathbf{v}_\xi\right) = \frac{1}{l^2(t)}\mathbf{A}^1\left(\xi l(t), t, \mathbf{v}(\xi, t), \frac{1}{l(t)}\mathbf{v}_\xi\right),$$

$$\overline{\mathbf{F}^1}\left(\xi, t, \mathbf{v}, \mathbf{v}_\xi\right) = \mathbf{F}^1\left(\xi l(t), t, \mathbf{v}(\xi, t), \frac{1}{l(t)}\mathbf{v}_\xi\right) - \xi\frac{l'(t)}{l(t)}\mathbf{v}_\xi\left(\xi, t\right).$$

4. Основні результати

Покажемо, що коефіцієнти крайової задачі (3.1)–(3.5) задовольняють вимогам a)–f). Тоді для встановлення факту існування та єдиності розв'язку даної крайової задачі можна використати результати роботи [33]. Позначимо вказані вимоги A)–F). Маємо

A) Оскільки

$$\overline{a}_{ii}\left(\xi, t, \mathbf{v}, \mathbf{v}_\xi\right) = \frac{1}{l^2(t)}a_{ii}\left(\xi l(t), t, \mathbf{v}(\xi, t), \frac{1}{l(t)}\mathbf{v}_\xi\right),$$

то з урахуванням обмеження (1.14) отримуємо

$$0 < \overline{a}_0^i\left(|\mathbf{v}|\right) \leq \overline{a}_{ii}\left(\xi, t, \mathbf{v}, \mathbf{q}\right) \leq \overline{A}_0^i\left(|\mathbf{v}|\right), \quad i = \overline{1, N},$$

де

$$\overline{a}_0^i\left(|\mathbf{v}|\right) = \frac{a_0^i\left(|\mathbf{v}|\right)}{l^2_{\max}}, \quad \overline{A}_0^i\left(|\mathbf{v}|\right) = \frac{A_0^i\left(|\mathbf{v}|\right)}{l^2_{\min}}.$$

B) Оскільки

$$\frac{\partial\left(a_{ii}\left(x, t, \mathbf{u}, \mathbf{q}\right)\cdot q^i\right)}{\partial q^i} = l^2(t)\frac{\partial\left(\overline{a}_{ii}\left(\xi, t, \mathbf{v}, \mathbf{p}\right)\cdot p^i\right)}{\partial p^i},$$

то з умови b) отримуємо

$$0 < \overline{a}_0^i\left(|\mathbf{v}|\right) \leq \frac{\partial\left[\overline{a}_{ii}\left(\xi, t, \mathbf{v}, \mathbf{p}\right)\cdot p^i\right]}{\partial p^i} \leq \overline{A}_0^i\left(|\mathbf{v}|\right), \quad i = \overline{1, N}.$$

C) Маємо

$$\begin{aligned}\overline{f}_i\left(\xi, t, \mathbf{v}, \mathbf{p}\right) &= f_i\left(\xi l(t), t, \mathbf{v}(\xi, t), \frac{1}{l(t)}\mathbf{p}\right) - \xi\frac{l'(t)}{l(t)}p^i\left(\xi, t\right)\\ &= f_i\left(x, t, \mathbf{u}(x, t), \frac{1}{l(t)}\mathbf{p}\right) - \xi\frac{l'(t)}{l(t)}p^i.\end{aligned}$$

Отже

$$\left|\overline{f}_i\left(\xi,t,\mathbf{v},\mathbf{p}\right)\right| = \left|f_i\left(x,t,\mathbf{u},\frac{1}{l(t)}\mathbf{p}\right) - \xi\frac{l'(t)}{l(t)}p^i\right|$$
$$\leq \left|f_i\left(x,t,\mathbf{u},\frac{1}{l(t)}\mathbf{p}\right)\right| + \frac{|l'(t)|}{l_{\min}}\cdot\left|p^i\right|$$
$$\leq A_0^i\left(|\mathbf{v}|\right)\cdot\frac{\left|p^i\right|^2}{l_{\min}^2} + \varphi(x,t) + \frac{|l'(t)|}{l_{\min}}\cdot\left|p^i\right|.$$

Якщо $l(t)\in C^1\left([0;T]\right)$ то $l'(t)$ є неперервною, а отже і обмеженою при $t\in[0;T]$. Тобто, $|l'(t)|\leq a$, $t\in[0;T]$, де a — деяка невід'ємна константа. Отже,

$$\frac{|l'(t)|}{l_{\min}}\cdot\left|p^i\right| \leq \frac{a}{l_{\min}}\cdot\left|p^i\right| \leq \frac{a}{l_{\min}}\left(\left|p^i\right|^2+1\right).$$

Тоді

$$\left|\overline{f}_i\left(\xi,t,\mathbf{v},\mathbf{p}\right)\right| \leq A_0^i\left(|\mathbf{v}|\right)\cdot\frac{\left|p^i\right|^2}{l_{\min}^2} + \varphi(\xi l(t),t) + \frac{a}{l_{\min}}\left(\left|p^i\right|^2+1\right)$$
$$= \left(\frac{A_0^i\left(|\mathbf{v}|\right)}{l_{\min}^2} + \frac{a}{l_{\min}}\right)\left|p^i\right|^2 + \varphi(\xi l(t),t) + \frac{a}{l_{\min}}.$$

Визначаючи $\overline{A}_0^i\left(|\mathbf{v}|\right)$ тут і у обмеженні A), як

$$\overline{A}_0^i\left(|\mathbf{v}|\right) = \left(\frac{A_0^i\left(|\mathbf{v}|\right)}{l_{\min}^2} + \frac{a}{l_{\min}}\right),$$

отримуємо

$$\left|\overline{f}_i\left(\xi,t,\mathbf{v},\mathbf{p}\right)\right| \leq \overline{A}_0^i\left(|\mathbf{v}|\right)\cdot\left|p^i\right|^2 + \overline{\varphi}(\xi,t), i=\overline{1,N},$$

де $\overline{\varphi}(\xi,t)=\varphi(\xi l(t),t)+\frac{a}{l_{\min}}$.

Аналогічно

$$\left|\overline{f}_i^1\left(\xi,t,\mathbf{v},\mathbf{p}\right)\right| \leq \overline{A}_0^i\left(|\mathbf{v}|\right)\cdot\left|p^i\right|^2 + \overline{\varphi}_1(\xi,t), \quad i=\overline{1,N},$$

де $\overline{\varphi}_1(\xi,t)=\varphi_1(\xi l(t),t)+\frac{a}{l_{\min}}$.

D) Тут маємо наступні співвідношення

$$\left|\frac{\partial\overline{a}_{ii}\left(\xi,t,\mathbf{v},\mathbf{p}\right)}{\partial v^i}\right| = \left|\frac{\partial\left(\frac{1}{l^2(t)}a_{ii}\left(x,t,\mathbf{u},\frac{1}{l(t)}\mathbf{p}\right)\right)}{\partial u^i}\right|$$
$$\leq \frac{A_0^i\left(|\mathbf{u}|\right)}{l_{\min}^2} \leq \overline{A}_0^i\left(|\mathbf{v}|\right),$$

$$\left|\frac{\partial\left(\overline{a}_{ii}\left(\xi,t,\mathbf{v},\mathbf{p}\right)\cdot p^i\right)}{\partial\xi}\right| = \left|\frac{\partial\left(\frac{1}{l^2(t)}a_{ii}\left(x,t,\mathbf{u},\mathbf{q}\right)\cdot l(t)q^i\right)}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial\xi}\right|$$
$$\le A_0^i\left(|\mathbf{u}|\right)\cdot\left|q^i\right|^2+\varphi_2(x,t) = A_0^i\left(|\mathbf{v}|\right)\cdot\left|\frac{p^i}{l(t)}\right|^2+\overline{\varphi}_2(\xi,t)$$
$$\le \overline{A}_0^i\left(|\mathbf{v}|\right)\cdot\left|p^i\right|^2+\overline{\varphi}_2(\xi,t),$$

де $\overline{A}_0^i$ визначене в умові C) і $\overline{\varphi}_2(\xi,t)=\varphi_2(\xi l(t),t)$.

E)

$$\left|\frac{\partial\left[\overline{a}_{ij}\left(\xi,t,\mathbf{v},\mathbf{p}\right)\cdot p^j\right]}{\partial v^s}\right| = \left|\frac{\partial\left[\frac{1}{l^2(t)}a_{ij}\left(x,t,\mathbf{u},\mathbf{q}\right)\cdot l(t)q^j\right]}{\partial u^s}\right|$$
$$\le \frac{1}{l_{\min}}\varphi_3\left(x,t\right)=\overline{\varphi}_3\left(\xi,t\right);$$

$$\left|\frac{\overline{a}_{ij}\left(\xi,t+\tau,\mathbf{v},\mathbf{p}\right)\cdot p^j-\overline{a}_{ij}\left(\xi,t,\mathbf{v},\mathbf{p}\right)\cdot p^j}{\tau}\right|\le\frac{1}{l_{\min}}\varphi_3\left(x,t\right)=\overline{\varphi}_3\left(\xi,t\right).$$

Аналогічно отримуємо

$$\left|\frac{\overline{f}_i\left(\xi,t+\tau,\mathbf{p},\mathbf{q}\right)-\overline{f}_i\left(\xi,t,\mathbf{v},\mathbf{p}\right)}{\tau}\right|\le\varphi_3\left(x,t\right)\le\overline{\varphi}_3\left(\xi,t\right),$$

де $\overline{\varphi}_3\left(\xi,t\right)=\max\left\{\varphi_3\left(\xi l(t),t\right),\frac{1}{l_{\min}}\varphi_3\left(\xi l(t),t\right)\right\}$.

Далі

$$\left|\frac{\partial\overline{f}_i\left(\xi,t,\mathbf{v},\mathbf{p}\right)}{\partial v^s}\right| = \left|\frac{\partial}{\partial v^s}\left(f_i\left(\xi l(t),t,\mathbf{v},\frac{1}{l(t)}\mathbf{p}\right)-\xi\frac{l'(t)}{l(t)}\mathbf{p}\right)\right|$$
$$\le\varphi_3\left(x,t\right)\le\overline{\varphi}_3\left(\xi,t\right);$$

$$\left|\frac{\partial\overline{f}_i\left(\xi,t,\mathbf{v},\mathbf{p}\right)}{\partial p^s}\right| = \left|\frac{\partial}{\partial q^s}\left(f_i\left(x,t,\mathbf{u},\mathbf{q}\right)-\xi l'(t)\mathbf{q}\right)\cdot\frac{\partial q^s}{\partial p^s}\right|$$
$$\le\frac{1}{l_{\min}}\left(\varphi_3\left(x,t\right)+\left|l'(t)\right|\right)\le\overline{\varphi}_3\left(\xi,t\right),$$

де $\overline{\varphi}_3\left(\xi,t\right)=\max\{\varphi_3\left(\xi l(t),t\right),\frac{1}{l_{\min}}\left(\varphi_3\left(\xi l(t),t\right)+a\right)\}$, $i=\overline{1,N}$, $j=\overline{1,N}$, $s=\overline{1,N}$.

Якщо при $(x,t)\in\overline{Q}_T$, $\left|u^i\right|\le M^i$, $\left|q^i\right|\le M_1^i$, функції $a_{ij}\left(x,t,\mathbf{u},\mathbf{q}\right)$, $f_i\left(x,t,\mathbf{u},\mathbf{q}\right)$, $\frac{\partial a_{ij}(x,t,\mathbf{u},\mathbf{q})}{\partial q^s}$, $\frac{\partial a_{ij}(x,t,\mathbf{u},\mathbf{q})}{\partial u^s}$, $\frac{\partial a_{ij}(x,t,\mathbf{u},\mathbf{q})}{\partial x}$ є неперервними функціями і задовольняють по x, t, u^i, q^i умові Гельдера з показниками β_1, $\beta_1/2$, β_1,β_1 відповідно, то

1) при $(\xi, t) \in [0;1] \times [0;T]$ виконується $\left|v^i\right| \le \overline{M}^i$, $\left|p^i\right| \le \overline{M}_1^i$, де $\overline{M}^i = M^i$, $\overline{M}_1^i = l_{\max} M_1^i$, $i = \overline{1, N}$;

2) функції $\overline{a}_{ij}(\xi, t, \mathbf{v}, \mathbf{p})$, $\overline{f}_i(\xi, t, \mathbf{v}, \mathbf{p})$, $\frac{\partial \overline{a}_{ij}(\xi, t, \mathbf{v}, \mathbf{p})}{\partial p^s}$, $\frac{\partial \overline{a}_{ij}(\xi, t, \mathbf{v}, \mathbf{p})}{\partial v^s}$, $\frac{\partial \overline{a}_{ij}(\xi, t, \mathbf{v}, \mathbf{p})}{\partial \xi}$ є неперервними функціями, $i = \overline{1, N}$, $j = \overline{1, N}$, $s = \overline{1, N}$;

3) функції $\overline{a}_{ij}(\xi, t, \mathbf{v}, \mathbf{p})$, $\overline{f}_i(\xi, t, \mathbf{v}, \mathbf{p})$, $\frac{\partial \overline{a}_{ij}(\xi, t, \mathbf{v}, \mathbf{p})}{\partial p^s}$, $\frac{\partial \overline{a}_{ij}(\xi, t, \mathbf{v}, \mathbf{p})}{\partial v^s}$, $\frac{\partial \overline{a}_{ij}(\xi, t, \mathbf{v}, \mathbf{p})}{\partial \xi}$ задовольняють по ξ, t, v^i, p^i умові Гельдера з показниками β_1, $\beta_1/2$, β_1,β_1 відповідно.

F) Очевидно, що при виконанні умови f) буде виконуватись умова, що оператор

$$L\mathbf{v} = \mathbf{v}_t(\xi, t) - \frac{d}{d\xi}\left[\overline{\mathbf{A}}(\xi, t, \mathbf{v}, \mathbf{v}_\xi) \cdot \mathbf{v}_\xi\right] + \overline{\mathbf{F}}(\xi, t, \mathbf{v}, \mathbf{v}_\xi),$$

так само як і оператор

$$L^1\mathbf{v} = \mathbf{v}_t(\xi, t) - \overline{\mathbf{A}^1}(\xi, t, \mathbf{v}, \mathbf{v}_\xi) \cdot \mathbf{v}_{\xi\xi} + \overline{\mathbf{F}^1}(\xi, t, \mathbf{v}, \mathbf{v}_\xi)$$

є 2-параболічними за Петровським [32].

Нехай функції $a_0^i(\psi)$, $A_0^i(\psi)$, $i = \overline{1, N}$, є додатними неперервними функціями аргумента $\psi \ge 0$; $\varphi_3(x, t)$ — неперервна функція, яка задовольняє по x, t умові Гельдера з показниками β_1, $\beta_1/2$ відповідно; $\|\varphi, \varphi_1, \varphi_2\|_{2q_1, 2r_1, Q_T} \le \mu_1$, де

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{2q_1} = 1 - \eta_1,$$

$$q_1 \in [1, \infty], \quad r_1 \in \left[\frac{1}{1-\eta_1}; \quad \frac{2}{1-2\eta_1}\infty\right], \quad 0 < \eta_1 < \frac{1}{2}$$

Тоді аналогічні властивості будуть стосуватись і функцій $\overline{a}_0^i(\psi)$, $\overline{A}_0^i(\psi)$, $i = \overline{1, N}$, $\psi \ge 0$; $\overline{\varphi}_3(\xi, t)$, $\overline{\varphi}(\xi, t)$, $\overline{\varphi}_1(\xi, t)$, $\overline{\varphi}_2(\xi, t)$, де

$$\overline{a}_0^i(\psi) = \frac{a_0^i(\psi)}{l_{\max}^2}, \overline{A}_0^i(\psi) = \left(\frac{A_0^i(\psi)}{l_{\min}^2} + \frac{a}{l_{\min}}\right), \overline{\varphi}_2(\xi, t) = \varphi_2(\xi l(t), t),$$

$$\overline{\varphi}(\xi, t) = \varphi(\xi l(t), t) + \frac{a}{l_{\min}}, \overline{\varphi}_1(\xi, t) = \varphi_1(\xi l(t), t) + \frac{a}{l_{\min}},$$

$$\overline{\varphi}_3(\xi, t) = \max\left\{\varphi_3(\xi l(t), t), \frac{1}{l_{\min}}(\varphi_3(\xi l(t), t) + a)\right\}.$$

Отже, справедлива наступна теорема.

Теорема 4.1 ([33]). *Припустимо що виконуються умови A)–F). Нехай при* $(\xi, t) \in [0;1] \times [0;T]$, $|\mathrm{v}^s| \le \overline{M}^s$ *і довільній вектор-функції* $\mathbf{p}$ *функції* $\overline{a}_{ij}(\xi, t, \mathbf{v}, \mathbf{p})$, $\overline{f}_i(\xi, t, \mathbf{v}, \mathbf{p})$ *неперервні,* $\overline{a}_{ij}(\xi, t, \mathbf{v}, \mathbf{p})$ *диференційовні по* ξ, v^s, p^s, $i = \overline{1, N}$, $j = \overline{1, N}$, $s = \overline{1, N}$. *Нехай при* $(\xi, t) \in [0;1] \times [0;T]$, $|\mathrm{v}^s| \le \overline{M}^s$, $|\mathrm{p}^s| \le \overline{M}_1^s$ *функції* $f_i(\xi, t, \mathbf{v}, \mathbf{p})$ *мають частинні похідні* $\frac{\partial f_i}{\partial p^s}$, $\frac{\partial f_i}{\partial \mathrm{v}^s}$, $i = \overline{1, N}$, $j = \overline{1, N}$. *Функції* $\mathrm{v}_0^i(\xi) \in H^{2+\beta_1}([0;1])$, $i = \overline{1, N}$, *і виконуються умови узгодження початкових даних, граничних даних та самої системи рівнянь нульового та першого порядків* [32]. *При вищевказаних умовах для будь-якої функції* $l(t) \in B_{2M}$ *існує єдиний розв'язок* $\mathbf{v}(\xi, t) \in H^{2+\beta_1, 1+\beta_1/2}([0;1] \times [0;T])$ *крайової задачі* (3.1)–(3.3).

Якщо розв'язок крайової задачі (3.1)–(3.3) існує для довільної функції з B_{2M}, то він буде існувати і для функції $l(t)$, яка є розв'язком задачі Коші (3.4), (3.5). Введемо позначення

$$f(l,t) = \lambda l(t) \left(\overline{\mathbf{a}}_N (\xi, t, \mathbf{v}, \mathbf{v}_\xi) \cdot \mathbf{v}_\xi |_{\xi=1} - \overline{\mathbf{a}}_N (\xi, t, \mathbf{v}, \mathbf{v}_\xi) \cdot \mathbf{v}_\xi |_{\xi=0} \right), \quad t > 0.$$

З відомої гладкої залежності розв'язків параболічних систем від коефіцієнтів в умовах збереження параболічності випливає, що є виконаними наступні умови:

1) функціонал $f(l,t)$ є неперервним на множині

$$\Pi = \{(l,t) : 0 \le t \le T, l(t) \in B_{2M}\};$$

2) функціонал $f(l,t)$ в Π задовольняє умову Ліпшиця відносно l, тобто існує така константа $L > 0$, що для будь яких двох точок $(l_1, t) \in \Pi$, $(l_2, t) \in \Pi$ виконується умова

$$|f(l_1, t) - f(l_2, t)| \le L \cdot |l_1 - l_2|.$$

Тоді згідно теореми Пікара (див. [38, с. 65]) на відрізку $[0;h]$, де $h = \min(T; \frac{l_{\max} - l_{\min}}{2M})$, існує єдиний розв'язок $l(t)$ задачі Коші (3.4), (3.5).

Висновки

В роботі визначено умови існування локального в часі єдиного класичного розв'язку крайової задачі з вільною межею системи квазілінійних параболічних рівнянь. Дослідженою одновимірною задачею описується математична модель фільтраційної консолідації грунтів в умовах впливу тепло-солепереносу. Наступні етапи досліджень вказаного напрямку: глобальність розв'язку; відповідні багатовимірні задачі.

Подяка проф. А. П. Власюку за підтримку та постійну увагу до роботи.

Література

[1] А. Архипова, *О глобальной разрешимости задачи Коши-Дирихле для класса недиагональных параболических систем с q-нелинейностю по градиенту,* $1 < q < 2$ // Записки научных семинаров ПОМИ, **288** (2002), 34–78.

[2] І. Баранська, М. Іванчов, *Обернена задача для двовимірного рівняння теплопровідності в області з вільними межами* // Український математичний вісник, **4** (2007), No. 4, 457–484.

[3] Б. В. Базалий, С. П. Дегтярёв, *О классической разрешимости многомерной задачи Стефана при конвективном движении вязкой несжимаемой жидкости* //Математический сборник, **132** (1987), No. 1, 3–19.

[4] Б. В. Базалий, С. П. Дегтярёв, *О задаче Стефана с кинетическим и классическим условием на свободной границе* // Укр. матем. журнал, **44** (1992), No. 2, 155–166.

[5] Б. В. Базалий, С. П. Дегтярёв, *О классической разрешимости в целом по времени одномерной задачи Стефана для вырождающихся параболических уравнений* // Нелинейные граничные задачи, **5** (1993), 6–13.

[6] Б. В. Базалий, С. П. Дегтярёв, *Об одной линейной краевой задаче со старшими производными в граничном условиии, возникающей в теории задач со свободной границей* // Нелинейные граничные задачи, **1** (1989), 7–12.

[7] Б. В. Базалий, Н. В. Краснощёк, *Регулярность решения многомерной задачи со свободной границей для уравнения пористой среды* // Математические труды, **5** (2002), No. 2, 38–91.

[8] В. С. Белоносов, *Оценки решений параболических систем в гельдеровских классах с весом и некоторые приложения* // Математический сборник, **110** (1979), No. 2, 165–188.

[9] Г. И. Бижанова, *Решение в весовом гельдеровском пространстве функций многомерных двухфазных задач Стефана и Флорина для параболических уравнений второго порядка в ограниченной области* // Алгебра и анализ, **7** (1995), No. 2, 46–76.

[10] Г. И. Бижанова, *О классической разрешимости одномерных задач со свободной границей Флорина, Маскета–Веригина и Стефана* // Записки научных семинаров ПОМИ, **243** (1997), 30–60.

[11] Г. И. Бижанова, *О точных решениях одномерных двухфазных задач со свободными границами для параболических уравнений* // Записки научных семинаров ПОМИ, **318** (2004), 42–59.

[12] Г. И. Бижанова, В. А. Солонников, *О разрешимости начально-краевой задачи для параболического уравнения второго порядка с производной по времени в граничном условии в весовом гёльдеровском пространстве функций* // Алгебра и анализ, **5** (1993), No. 1, 109–142.

[13] Г. И. Бижанова, В. А. Солонников, *О некоторых модельных задачах для параболических уравнений второго порядка с производной по времени в краевых условиях* // Алгебра и анализ, **6** (1994), No. 6, 30–50.

[14] Г. И. Бижанова, В. А. Солонников, *О задачах со свободными границами для параболических уравнений второго порядка* // Алгебра и анализ, **12** (2000), No. 6, 98–139.

[15] М. А. Бородин, *Существование классического решения в многомерной задаче Стефана на конечном промежутке времени* // Укр. матем. журнал, **44** (1992), No. 12, 1652–1657.

[16] М. А. Бородин, *Задача Стефана* // Український математичний вісник, **8** (2011), No. 1, 17–54.

[17] М. П. Вишневский, *Асимптотическое поведение решений краевых задач для квазилинейных параболических уравнений и систем*, Автореферат дисертации на соисание учёной степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.02 - дифференциальные уравнения, Новосибирск, 1995.

[18] А. П. Власюк, П. М. Мартинюк, *Математичне моделювання консолідації ґрунтів в процесі фільтрації сольових розчинів*, Вид-во УДУВГП, 2004.

[19] А. П. Власюк, П. М. Мартинюк, *Математичне моделювання консолідації ґрунтів при фільтрації сольових розчинів в неізотермічних умовах*, Вид-во НУВГП, 2008.

[20] А. П. Власюк, П. М. Мартинюк, *Чисельне розв'язування задач консолідації та фільтраційного руйнування ґрунтів в умовах тепло-масопереносу методом радіальних базисних функцій*, Вид-во НУВГП, 2010.

[21] В. И. Войтицкий, *О спектральной задаче Стефана и Флорина с классическим граничным условием* // Український математичний вісник, **10** (2013), No. 1, 129–143.

[22] Г. И. Данилюк, *Внутренняя регулярность и свойство Лиувилля для нелинейных параболических систем второго порядка дивергентного вида* //Нелинейные граничные задачи, **1** (1989), 31–37.

[23] И. И. Данилюк, *О задаче Стефана* // Успехи математических наук, **40** (1985), No. 5, 133–185.

[24] С. П. Дегтярев, *О существовании гладкого решения задачи со свободной границей для квазилинейного параболического уравнения с разрывными коэффициентами* // Доп. НАН України, (2009), No. 12, 21–26.

[25] А. В. Индионков, *Некоторые классы квазилинейных параболических систем второго порядка на плоскости* // Труды Московского энергетического ин-та. Исследования по уравнениям математической физики и смежным вопросам, **260** (1975), 39–50.

[26] А. В. Индионков, *О некоторых квазилинейных параболических системах* // Труды Московского энергетического ин-та. Исследования по уравнениям математической физики и смежным вопросам, **260** (1975), 52–58.

[27] М. І. Іванчов, *Задача з вільною межею для напівлінійного рівняння дифузії* // Нелинейные граничные задачи, **15** (2005), 141–148.

[28] И. А. Калиев, *Однофазная задача фазового перехода типа твёрдое тело-сжимаемая жидкость* // Сибирский журнал индустриальной математики, **III** (2000), No. 2, 97–114.

[29] Л. И. Камынин, *О существовании решения задачи Веригина* // Журнал вычислительной математики и математической физики, **2** (1962), No. 5, 834–858.

[30] С. Н. Кружков, *Квазилинейные параболические уравнения и системы с двумя независимыми переменными* // Труды семинара им. И. Г. Петровского, **5** (1979), 217–272.

[31] С. Н. Кружков, *Линейные и нелинейные параболические системы на плоскости* // Докл. АН СССР, **187** (1969), No. 3, 510–513.

[32] О. А. Ладыженская, В. А. Солонников, Н. Н. Уральцева, *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа*, Наука, 1967.

[33] П. М. Мартинюк, А. П. Власюк, *Дослідження існування та единості розв'язку однієї квазілінійної параболічної системи диференціальних рівнянь другого порядку*, Препр./ НАН України. Ін-т математики, Київ, 2001.

[34] А. М. Мейрманов, *О классическом решении многомерной задачи Стефана для квазилинейных параболических уравнений* // Математический сборник, **112** (1980), No. 2, 170–192.

[35] А. М. Мейрманов, *Об одной задаче со свободной границей для параболических уравнений* // Математический сборник, **115** (1981), No. 4, 532–543.

[36] Ю. А. Митропольский, А. А. Березовский, Т. А. Плотницкий, *Задачи со свободными границами для нелинейого эволюционного уравнения в проблемах металлургии, медицины, экологии* // Укр. матем. журнал., **44** (1992), No. 1, 67–76.

[37] Е. В. Радкевич, *Об условиях существования классического решения контактной задачи Стефана* // Математический сборник, **181** (1990), No. 4, 464–489.

[38] А. М. Самойленко, М. О. Перестюк, І. О. Парасюк, *Диференціальні рівняння*, Либідь, 2003.

[39] В. А. Солонников, А. Фазано, *Об одномерной параболической задаче, возникающей при изучении некоторых задач со свободными границами* // Записки научных семинаров ПОМИ, **269** (2000), 322–338.

[40] В. А. Солонников, Е. В. Фролова, *L_p-теория для задачи Стефана* // Записки научных семинаров ПОМИ, **243** (1997), 299–323.

[41] В. А. Солонников, Е. В. Фролова, *О справедливости квазистационарного приближения для задачи Стефана* // Записки научных семинаров ПОМИ, **348** (2007), 209–253.

[42] Ж. О. Тахиров, Р. Н. Тураев, *Нелокальная задача Стефана для квазилинейного параболического уравнения* // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. физ.-матем. науки, (2012), No. 3, 8–16.

[43] В. А. Флорин, *Основы механики грунтов*, Госстройиздат, 1961.

[44] О. Чмир, *Поведінка розв'язку узагальненої нормальної крайової задачі для квазалінійної параболічної системи біля межі області* // Нелинейные граничные задачи, **20** (2010), 129–151.

[45] B. V. Bazaliy, S. P. Degtyarev, *Classical solution of a degenerate elliptic-parabolic free boundary problem* // Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry, **7** (2011), No. 4, 295–332.

[46] G. I. Bizhanova, *On a classical solvability of a Florin problem* // Український математичний вісник, **5** (2008), No. 1, 16–31.

[47] A. C. Briozzo, D. A. Tarzia, *Existence and uniqueness for one-phase Stefan problems for non-classical heat equations with temperature boundary condition at a fixed face* // Electronic Journal of Differential Equations, (2006), No. 21, 1–16.

[48] E. DiBenedetto, R. E. Showalter, *A free boundary problem for a degenerate parabolic system* // Journal of differential equations, **50** (1983), 1–19.

[49] Dinh Phu Bong, Nguyen Dinh Tri, *A free boundary problem for the nonlinear second order parabolic equations* // Acta Mathematica Vietnamica, **12**, (1987), No. 1, 55–65.

[50] A. Fasano, A. Farina, *Modelling complex flows in porous media by means of upscaling procedures* // Rend. Istit. Mat. Univ. Trieste, **42** (2010), 65–102.

[51] A. Fasano, V. Solonnikov, *Unsaturated incompressible flows in adsorbing porous media* // Math. Meth. Appl. Sci., **26** (2003), 1391–1419.

[52] A. Friedman, *Free boundary problems arising in tumor models* // Rend. Mat. Acc. Lincei, **15** (2004), 161–168.

[53] E.-I. Hanzawa, *Classical solutions of the Stefan problem* // Tohoku Math. Journ., **33** (1981), 297–335.

[54] H. Kawarada, *Stefan-type free boundary problems for heat equations* // Publ. RJMS, Kyoto Univ., **9** (1974), 517–533.

[55] J. F. Rodrigues, V. A. Solonnikov, F. Yi, *On a parabolic system with time derivative in the boundary conditions and related free boundary problems* // Math. Ann., **315** (1999), 61–95.

[56] R. Semerdjieva, *Global existence of classical solutions for a nonlocal one dimensional parabolic free boundary problem* // arXiv: 1211.0894v1 [math.AP] 5 Nov, 2012, 23 p.

[57] R. Semerdjieva, *Regularity of the free boundary in a nonlocal one-dimensional parabolic free boundary value problem* // arXiv: 1211.2219v3 [math.AP] 20 Aug, 2013, 10 p.

[58] P. Souplet, *Stability and continuous dependence of solutions of one-phase Stefan problems for semilinear parabolic equations* // Portugaliae Mathematica, **59** (2002), No. 3, 315–323.

[59] X. Wang, F. Yi, Z. Yang, *Local classical solution of free boundary problem for a coupled system* // Acta Mathematica Scientia, **25B** (2005), No. 2, 259–273.

[60] J. Wu, F. Zhou, S. Cui, *Analysis of an elliptic-parabolic free boundary problem modelling the growth of non-necrotic tumor cord* // J. Math. Anal. Appl., **352** (2009), 184–205.

Відомості про авторів

Петро Миколайович Мартинюк

Кафедра прикладної математики
Національний університет
водного господарства та
природокористування
вул. Соборна, 11,
33001, Рівне,
Україна
E-Mail: `martinjuk@ukr.net`