Український математичний вісник
Том 11 **(2014)**, № 4, 480 – 496

Краевые задачи для параболических уравнений с нелокальным условием и вырождениями

Инна М. Исарюк, Иван Д. Пукальский

(*Представлена С. Д. Ивасишеным*)

Аннотация. При помощи принципа максимума и априорных оценок изучаются первая краевая задача и задача с косой производной с нелокальным условием по временной переменной для параболических уравнений со степенными особенностями в коэффициентах по временной и пространственным переменным. В гельдеровых пространствах со степенным весом установлено существование и единственность решений поставленных задач.

2010 MSC. 35K65.

Ключевые слова и фразы. Краевая задача, принцип максимума, задача с косой производной.

Введение

Многие задачи математической физики, квантовой механики, решение важных вопросов прикладного характера приводят к задачам для уравнений с частными производными, коэффициенты которых имеют особенности. Изучению качественных свойств решений краевых задач для уравнений с частными производными посвящены работы [1–11]. В работах [1–4, 6, 7] исследованы краевые задачи для уравнений второго порядка со степенными особенностями в коэффициентах.В частности, в уравнении Шредингера, которое описывает квантомеханические системы, коэффициенты имеют степенные особенности при младших производных [11]. Уравнения с сингулярным оператором Бесселя в телах с симметрией моделируют диффузионные процессы, радиальние колебания, тепло-массообмен при выращивании монокристаллов [10].

Статья поступила в редакцию 17.09.2013

Нелокальным краевым задачам посвящены монографии [3,7]. Необходимость изучения краевых задач для дифференциальных уравнений с нелокальными условиями стимулируется разными обстоятельствами, в частности, решением обратных задач для уравнения теплопроводности, задач из теории физики плазмы.

В этой работе установлена корректная разрешимость первой краевой задачи и задачи с косой производной для параболических уравнений второго порядка со степенными особенностями в коэффициентах на координатных плоскостях произвольного порядка. В гельдеровых пространствах со степенным весом установлено существование и единственность решений поставленных задач.

1. Постановка задач и основной результат

Пусть $t_0, t_1, \ldots, t_N$, T — фиксированные положительные числа, $t_k < T$, $(x_1, \ldots, x_n)$ — координаты точки $x \in \mathbb{R}^n$, $\Omega_j = \{x,\ x \in \mathbb{R}^n, x_j = 0\}$, D — ограниченная область во множестве $\mathbb{R}^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, x_j \geq 0, j \in \{1, 2, \ldots, n\}\}$ с границей ∂D, причем $\partial D \cap \Omega_j \neq \emptyset$, $\forall j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. В области $Q = [0, T) \times D$ рассмотрим задачу нахождения функции $u(t, x)$, которая при $t \neq t_0$ удовлетворяет уравнению

$$(Lu)(t, x) \equiv \left[\partial_t - \sum_{ij=1}^{n} A_{ij}(t, x)\partial_{x_i x_j} - \sum_{i=1}^{n} A_i(t, x)\partial_{x_i} - A_0(t, x)\right] u = f(t, x), \tag{1.1}$$

нелокальному условию

$$u(0, x) + \sum_{k=1}^{N} q(t_k, x) u(t_k, x) = \varphi(x), \tag{1.2}$$

а на боковой поверхности $\Gamma = (0, T] \times \partial D$ одному из краевых условий

$$\lim_{x \to z \in \partial D} [u(t, x) - g(t, x)] = 0, \tag{1.3}$$

$$(\mathcal{B}u - \psi)(t, z) \equiv \lim_{x \to z \in \partial D} \left[\sum_{i=1}^{n} b_i(t, x)\partial_{x_i} u + b_0(t, x) u - \psi(t, x)\right] = 0. \tag{1.4}$$

Характер особенностей коэффициентов дифференциальных выражений L и $\mathcal{B}$ будут характеризовать функции:

$$s(\beta_i; P) = s_1(\beta_i^{(1)}, t) s_2(\beta_i^{(2)}, x_i),$$

где $s_1(\beta_i^{(1)}, t) = |t - t_0|^{\beta_i^{(1)}}$ при $|t - t_0| \leq 1$, $s_1(\beta_i^{(1)}, t) = 1$ при $|t - t_0| \geq 1$; $s_2(\beta_i^{(2)}, x_i) = x_i^{\beta_i^{(2)}}$ при $0 \leq x_i \leq 1$, $s_2(\beta_i^{(2)}, x_i) = 1$ при $x_i \geq 1$;

$\beta_i = (\beta_i^{(1)}, \beta_i^{(2)})$, $P(t,x) \in Q$, $i \in \{1,\dots,n\}$, $\beta_i^{(\nu)} \in (-\infty,\infty)$, $\beta_i^{(\nu)}$ — вещественные числа, $\nu \in \{1,2\}$.

Обозначим через l, $\gamma^{(\nu)}$, $\mu_j^{(\nu)}$, $\delta^{(\nu)}$, α, $a^{(\nu)}$ — вещественные числа, $\nu \in \{1,2\}$, $\alpha \in (0,1)$, $\mu = (\mu_0,\dots,\mu_n)$, $\mu_i = (\mu_i^{(1)}, \mu_i^{(2)})$, $\mu_i^{(\nu)} \ge 0$, $i \in \{0,1,\dots,n\}$, $\delta = (\delta^{(1)}, \delta^{(2)})$, $\delta^{(\nu)} \ge 0$, $\gamma = (\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)})$, $\gamma^{(\nu)} \ge 0$, $\beta = (\beta_1,\dots,\beta_n)$, $a = (a^{(1)}, a^{(2)})$, $a^{(\nu)} \ge 0$, $[l]$ — целая часть l, $Q^{(0)} = Q \setminus \{(t,x) \in Q \,\big|\, t = t_0, x \in D\}$.

Пусть $(x_1^{(1)},\dots,x_{i-1}^{(1)},x_i^{(1)},x_{i+1}^{(1)},\dots,x_n^{(1)})$ — координаты точки $x^{(1)}$ области $\overline{D} = D \cup \partial D$, $(x_1^{(1)},\dots,x_{i-1}^{(1)},x_i^{(2)},x_{i+1}^{(1)},\dots,x_n^{(1)})$ — координаты точки $x^{(2)} \in \overline{D}$, $P(t,x)$, $P_1(t^{(1)},x^{(1)})$, $P_2(t^{(2)},x^{(2)})$, $H_i(t^{(1)},x_i^{(2)})$ — произвольные точки области $\overline{Q} = [0,T) \times \overline{D}$,

$$S(\gamma;P) = s_1(\gamma^{(1)},t)\min_i(s_2(\gamma^{(2)},x_i)).$$

Определим функциональные пространства, в которых исследуются задачи (1.1)–(1.4).

$C^l(\gamma;\beta;a;Q)$, $l \in \mathbb{R}$ — пространство функций $u(t,x) \in Q$, имеющих частные производные в $Q^{(0)}$ вида $\partial_t^j \partial_x^k u$, $2j+|k| \le [l]$ и конечное значение нормы

$$\|u;\gamma;\beta;a;Q\|_l = \|u;\gamma;\beta;a;Q\|_{[l]} + \langle u;\gamma;\beta;a;Q\rangle_l,$$

где, например

$$\|u;\gamma;\beta;0;Q\|_0 = \sup_{\overline{Q}} |u| \equiv \|u;Q\|_0,$$

$$\begin{aligned}\|u;\gamma;\beta;a;Q\|_{[l]} = \sum_{2j+|k|\le[l]} \sup_{P\in\overline{Q}} S((2j+|k|)\gamma+a;P)|\partial_t^j\partial_x^k u(P)| \\ \times \prod_{m=1}^n s_2(-k_m\beta_m^{(2)},x_m)s_1(-k_m\beta_m^{(1)},t),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle u;\gamma;\beta;a;Q\rangle_l = \sum_{2j+|k|=[l]} \sum_{i=1}^n \sup_{(P_1,H_i)\subset\overline{Q}} |x_i^{(1)} - x_i^{(2)}|^{-\{l\}} \\ \times |\partial_t^j\partial_x^k u(P_1) - \partial_t^j\partial_x^k u(H_i)| S((l+\alpha)\gamma+a;\tilde{P}) \\ \times s_1(-\{l\}\beta_i^{(1)},t^{(1)})s_2(-\{l\}\beta_i^{(2)},\tilde{x}_i)\prod_{m=1}^n s_2(-k_m\beta_m^{(2)},\tilde{x}_m)\end{aligned}$$

$$\times s_1(-k_m\beta_m^{(1)},t^{(1)}) + \sum_{2j+|k|=[l]}\sum_{i=1}^{n}\sup_{(P_2,H_i)\subset\overline{Q}}|t^{(1)}-t^{(2)}|^{-\frac{\{l\}}{2}}$$
$$\times|\partial_t^j\partial_x^k u(P_2)-\partial_t^j\partial_x^k u(H_i)|S((l+\alpha)\gamma+a;\tilde{P})$$
$$\times\prod_{m=1}^{n}s_2(-k_m\beta_m^{(2)},x_m^{(2)})s_1(-k_m\beta_m^{(1)},\tilde{t}).$$

Здесь обозначено: $S(a\gamma;\tilde{P})=\min\{S(a\gamma;P_1),S(a\gamma;P_2),S(a\gamma;H_i)\}$, $s_2(a,\tilde{x}_i)=\min(s_2(a,x_i^{(1)}),s_2(a,x_i^{(2)}))$, $\partial_x^k=\partial_{x_1}^{k_1}\cdots\partial_{x_n}^{k_n}$, $|k|=k_1+\cdots+k_n$.

Относительно задач (1.1)–(1.4) предполагаем выполнение условий:

а) для произвольного вектора $\xi=(\xi_1,\ldots,\xi_n)\in\mathbb{R}^n$ выполняется неравенство

$$\pi_1|\xi|^2\le\sum_{ij=1}^{n}s(\beta_i;P)s(\beta_j;P)A_{ij}(P)\xi_i\xi_j\le\pi_2|\xi|^2,$$

где π_1, π_2 — положительные константы и $s(\mu_i;P)A_i(P)\in C^\alpha(\gamma;\beta;0;Q)$, $s(\beta_i;P)s(\beta_j;P)A_{ij}(P)\in C^\alpha(\gamma;\beta;0;Q)$, $s(\mu_0;P)A_0(P)\in C^\alpha(\gamma;\beta;0;Q)$, $A_0<K<+\infty$, K — константа, $\partial D\in C^{2+\alpha}$;

б) функции $f\in C^\alpha(\gamma;\beta;\mu_0;Q)$, $\varphi\in C^{2+\alpha}(\tilde{\gamma};\tilde{\beta};0;D)$, $\tilde{\gamma}=(0;\gamma^{(2)})$, $\tilde{\beta}=(0,\beta^{(2)})$, $q(t_k,x)\in C^{2+\alpha}(D)$, $\sum_{k=1}^{N}|q(t_k,x)|e^{-\lambda t_k}\le\lambda_0<1$, где λ — произвольное число, удовлетворяющее неравенству $\lambda<-K$;

в) $g\in C^{2+\alpha}(\gamma;\beta;0;Q)$, $g(0,x)+\sum_{k=1}^{N}q(t_k,x)g(t_k,x)=\varphi(x)$, $\gamma^{(\nu)}=\max\{\max_i(1+\beta_i^{(\nu)}),\max_i(\mu_i^{(\nu)}-\beta_i^{(\nu)}),\frac{\mu_0^{(\nu)}}{2}\}$, $\nu\in\{1,2\}$;

г) векторы $\overrightarrow{b}^{(s)}=\{b_1^{(s)},\ldots,b_n^{(s)}\}$, $b_i^{(s)}=s(\beta_i;P)b_i(P)$ и $\overrightarrow{b}=\{b_1,\ldots,b_n\}$ образуют с направлением внешней нормали $\overrightarrow{n}$ к Γ в точке $P(t,x)\in\Gamma$ угол, меньший $\frac{\pi}{2}$; $s(\beta_i;P)b_i(P)\in C^{1+\alpha}(\gamma;\beta;0;Q)$, $\psi\in C^{1+\alpha}(\gamma;\beta;\delta;Q)$, $S(\delta;P)b_0(P)\in C^{1+\alpha}(\gamma;\beta;0;Q)$, $b_0(P)>0$, $\lim_{x\to z\in\partial D}q(t_k,x)=0$,

$$\lim_{x\to z\in\partial D}\left[\sum_{i=1}^{n}b_i(0,x)\partial_{x_i}\varphi+b_0(0,x)\varphi-\psi(0,x)\right]=0,$$

$\gamma^{(\nu)}=\max\{\max_i(1+\beta_i^{(\nu)}),\max_i(\mu_i^{(\nu)}-\beta_i^{(\nu)}),\frac{\mu_0^{(\nu)}}{2},\frac{\delta^{(\nu)}}{2}\}$.

Справедливы следующие теоремы.

Теорема 1.1. *Пусть для задачи* (1.1)–(1.3) *выполнены условия а)–в). Тогда существует единственное решение задачи* (1.1)–(1.3) *в пространстве* $C^{2+\alpha}(\gamma;\beta;0;Q)$ *и для него справедлива оценка*

$$\|u;\gamma;\beta;0;Q\|_{2+\alpha} \le c\Big(\|f;\gamma;\beta;\mu_0;Q\|_{\alpha} + \|\varphi;\tilde{\gamma};\tilde{\beta};0;D\|_{2+\alpha} \\ + \|g;\gamma;\beta;0;Q\|_{2+\alpha}\Big). \quad (1.5)$$

Теорема 1.2. *Предположим, что для задачи* (1.1), (1.2), (1.4) *выполнены условия а), б), г). Тогда существует единственное решение задачи* (1.1), (1.2), (1.4) *в пространстве* $C^{2+\alpha}(\gamma;\beta;0;Q)$ *и для него справедлива оценка*

$$\|u;\gamma;\beta;0;Q\|_{2+\alpha} \le C(\|f;\gamma;\beta;\mu_0;Q\|_{\alpha} + \|\varphi;\tilde{\gamma};\tilde{\beta};0;D\|_{2+\alpha} \\ + \|\psi;\gamma;\beta;\delta;Q\|_{1+\alpha}). \quad (1.6)$$

Для исследования задач (1.1)–(1.4) построим последовательности решений краевых задач с гладкими коэффициентами, предельные значения которых будут решениями задач (1.1)–(1.4).

2. Оценка решений краевых задач с гладкими коэффициентами

Пусть $Q_m = Q \cap \{(t,x) \in Q \,|\, s_1(1,t) \ge m_1^{-1}, s_2(1,x_i) \ge m_2^{-1}\}$, $i \in \{1,\dots,n\}$, $m_1 > 1$, $m_2 > 1$ — последовательность областей, сходящихся к области Q при $m_1 \to \infty$, $m_2 \to \infty$. Рассмотрим в области Q задачу нахождения функции $u_m(t,x)$, удовлетворяющей уравнению

$$(L_1 u_m)(t,x) \equiv \Big(\partial_t - \sum_{ij=1}^{n} a_{ij}(t,x)\partial_{x_i}\partial_{x_j} - \sum_{i=1}^{n} a_i(t,x)\partial_{x_i} - a_0(t,x)\Big)u_m \\ = f_m(t,x), \quad (2.1)$$

нелокальному условию

$$u_m(0,x) + \sum_{k=1}^{N} q(t_k,x)u_m(t_k,x) = \varphi_m(x), \quad (2.2)$$

а на боковой поверхности Γ одному из краевых условий

$$\lim_{x\to z\in\partial D}[u_m(t,x) - g_m(t,x)] = 0, \quad (2.3)$$

$$(\mathcal{B}_1 u_m - \psi_m)(t,x) \\ = \lim_{x\to z\in\partial D}\left[\sum_{i=1}^{n} h_i(t,x)\partial_{x_k}u_m + h_0(t,x)u_m - \psi_m(t,x)\right] = 0. \quad (2.4)$$

Коэффициенты a_{ij}, a_i, a_0, h_i, h_0, функции f_m, φ_m, ψ_m, g_m являются непрерывными продолжениями коэффициентов A_{ij}, A_i, A_0, b_i, b_0, функций f, φ, ψ, g из области Q_m в область $Q \setminus Q_m$ [5, с. 82].

В области Q_m коэффициенты a_{ij}, a_i, a_0, h_i, h_0 и функции f_m, φ_m, ψ_m, g_m равны соответственно коэффициентам A_{ij}, A_i, A_0, b_i, b_0 и функциям f, φ, ψ, g.

В задачах (2.2)–(2.4) сделаем замену $u_m(t,x) = v_m(t,x)e^{-\lambda t}$, где λ удовлетворяет условию б). Тогда $v_m(t,x)$ удовлетворяет уравнению

$$((L_1 - \lambda)v_m)(t,x) = f_m(t,x)e^{\lambda t}, \tag{2.5}$$

нелокальному условию

$$v_m(0,x) + \sum_{k=1}^{N} q(t_k,x)e^{-\lambda t_k} v_m(t_k,x) = \varphi_m(x), \tag{2.6}$$

а на боковой поверхности Γ одному из краевых условий

$$\lim_{x\to z\in\partial D} [v_m(t,x) - g_m(t,x)e^{\lambda t}] = 0, \tag{2.7}$$

$$(\mathcal{B}_1 v_m - \psi_m e^{\lambda t})|_\Gamma =$$
$$= \lim_{x\to z\in\partial D} \Big[\sum_{i=1}^{n} h_i(t,x)\partial_{x_i} v_m + h_0(t,x)v_m - \psi_m(t,x)e^{\lambda t} \Big] = 0. \tag{2.8}$$

Существование классических решений задач (2.5)–(2.8) устанавливается по схеме доказательства теорем 2.2 и 2.10 из [7].

Установим оценки решений $v_m(t,x)$.

Введем в пространстве $C^{2+\alpha}(Q)$ норму $\|v_m;\gamma;\beta;q;Q\|_l$, эквивалентную при каждом фиксированном m_1, m_2 гельдеровой норме, которая определяется так же, как норма $\|u;\gamma;\beta;a;Q\|_l$, только вместо функций $s(\beta_i;P)$, $S(\gamma;P)$ берем соответственно $d(\beta_i;P)$, $R(\gamma;P)$, где $d(\beta_i;P) = d_1(\beta_i^{(1)},t)d_2(\beta_i^{(2)},x_i)$,

$$d_1(\beta_i^{(1)},t) = \begin{cases} \max(s_1(\beta_i^{(1)},t), m_1^{-\beta_i^{(1)}}), & \text{если } \beta_i^{(1)} \ge 0; \\ \min(s_1(\beta_i^{(1)},t), m_1^{-\beta_i^{(1)}}), & \text{если } \beta_i^{(1)} \le 0; \end{cases}$$

$$d_2(\beta_i^{(2)},x_i) = \begin{cases} \max(s_2(\beta_i^{(2)},x_i), m_2^{-\beta_i^{(2)}}), & \text{если } \beta_i^{(2)} \ge 0; \\ \min(s_2(\beta_i^{(2)},x_i), m_2^{-\beta_i^{(2)}}), & \text{если } \beta_i^{(2)} \le 0, \end{cases}$$

$R(\gamma;P) = d_1(\gamma^{(1)},t)\min_i d_2(\gamma^{(2)},x_i)$.

Для решений задач (2.5)–(2.8) имеют место теоремы.

Теорема 2.1. *Пусть v_m — классическое решение задачи* (2.5)–(2.7) *в области Q и выполнены условия а)–в). Тогда для v_m справедлива оценка*

$$|v_m| \le \max\left\{ \left\| \frac{f_m e^{\lambda t}}{-a_0-\lambda}; Q \right\|_0, \left\| \varphi_m \left(1 - \sum_{j=1}^{N} |q(t_j,x)| e^{-\lambda t_j}\right)^{-1}; D \right\|_0, \right.$$
$$\left. \|g_m e^{\lambda t}; Q\|_0 \right\}. \quad (2.9)$$

Теорема 2.2. *Пусть $v_m(t,x)$ — классическое решение задачи* (2.5), (2.6), (2.8) *в цилиндре Q и выполнены условия а), б), г). Тогда для решения $v_m(t,x)$ справедлива оценка*

$$|v_m| \le \max\left\{ \left\| \frac{f_m e^{\lambda t}}{-a_0-\lambda}; Q \right\|_0, \left\| \varphi_m \left(1 - \sum_{j=1}^{N} |q(t_j,x)| e^{-\lambda t_j}\right)^{-1}; D \right\|_0, \right.$$
$$\left. \|\psi_m e^{\lambda t} b_0^{-1}; Q\|_0 \right\}. \quad (2.10)$$

Неравенства (2.9), (2.10) устанавливаются по схеме доказательства теорем 2.1, 2.2. [1, с. 22–26], т.е. анализируются всевозможные значения положительного максимума и отрицательного минимума решения $v_m(t,x)$. Отличие только в случае, когда $\sup_{\overline{Q}}|v_m| = \sup_{\overline{D}}|v_m| = |v_m(0,x^{(3)})|$. Используя условие (2.6) имеем равенство

$$v_m(0,x^{(3)}) + \sum_{k=1}^{N} q(t_k,x^{(3)}) e^{-\lambda t_k} v_m(t_k,x^{(3)}) = \varphi_m(x^{(3)}),$$

из которого следует, что

$$v_m(0,x^{(3)}) \le |\varphi_m(x^{(3)})| \left(1 - \sum_{k=1}^{N} |q(t_k,x^{(3)})| e^{-\lambda t_k}\right)^{-1}$$
$$\le \left\| \varphi_m \left(1 - \sum_{k=1}^{N} |q(t_k,x)| e^{-\lambda t_k}\right)^{-1}; D \right\|_0.$$

Теорема 2.3. *Если выполнены условия теоремы* 1.1, *то для решения задачи* (2.5)–(2.7) *справедлива оценка*

$$\|v_m;\gamma;\beta;0;Q\|_{2+\alpha} \le C(\|f;\gamma;\beta;\mu_0;Q\|_\alpha$$
$$+ \|\varphi;\tilde{\gamma};\tilde{\beta};0;D\|_{2+\alpha} + \|g;\gamma;\beta;0;Q\|_{2+\alpha}). \quad (2.11)$$

Доказательство. В задаче (2.5)–(2.7) сделаем замену

$$v_m(t,x) = \omega_m(t,x) + g_m(t,x)e^{\lambda t}.$$

Тогда $\omega_m(t,x)$ удовлетворяет в Q задачи

$$((L_1-\lambda)\omega_m)(t,x) = f_m(t,x)e^{\lambda t} - ((L-\lambda)g_m)(t,x) \equiv F_m(t,x),$$

$$\begin{aligned}\omega_m(0,x) &+ \sum_{k=1}^N q(t_k,x)e^{-\lambda t_k}\omega_m(t_k,x)\\ &= \varphi_m(x) - g_m(0,x) - \sum_{k=1}^N q(t_k,x)e^{-\lambda t_k} g_m(t_k,x) \equiv \Phi_m(x),\end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\lim_{x\to z\in\partial D} \omega_m(t,x) = 0.$$

Используя определение нормы и интерполяционные неравенства из [7]

$$\|\omega_m;\gamma;\beta;0;Q\|_2 \le \varepsilon^\alpha\langle\omega_m;\gamma;\beta;0;Q\rangle_{2+\alpha} + c(\varepsilon)\|\omega_m;Q\|_0,$$

$$\|\omega_m;\gamma;\beta;0;Q\|_1 \le \varepsilon\|\ \omega_m;\gamma;\beta;0;Q\|_2 + c(\varepsilon)\|\omega_m;Q\|_0,$$

имеем

$$\|\omega_m;\gamma;\beta;0;Q\|_{2+\alpha} \le (1+\varepsilon^\alpha)\langle\omega_m;\gamma;\beta;0;Q\rangle_{2+\alpha} + c(\varepsilon)\|\omega_m;Q\|_0,$$

где ε — произвольное действительное число, $\varepsilon \in (0;1)$. Поэтому достаточно оценить полунорму $\langle\omega_m;\gamma;\beta;0;Q\rangle_{2+\alpha}$. Из определения полунормы следует существование в Q точек P_1, P_2 и H_i, для которых справедливо одно из неравенств

$$\lambda_1\|\omega_m;\gamma;\beta;0;Q\|_{2+\alpha} \le E_l(\omega_m), \quad l=1,2, \quad (2.13)$$

где

$$\begin{aligned}E_1(\omega_m) = \sum_{2j+|k|=2}\sum_{i=1}^n &|x_i^{(1)} - x_i^{(2)}|^{-\alpha}|\partial_t^j\partial_x^k\omega_m(P_1) - \partial_t^j\partial_x^k\omega_m(H_i)|\\ &\times R((2+\alpha)\gamma;\tilde P)d_1(-\alpha\beta_i^{(1)},t^{(1)})d_2(-\alpha\beta_i^{(2)},\tilde x_i)\\ &\qquad\times\prod_{\nu=1}^n d_2(-k_\nu\beta_\nu^{(2)},\tilde x_\nu)d_1(-k_\nu\beta_\nu^{(1)},t^{(1)}),\end{aligned}$$

$$E_2(\omega_m) = \sum_{2j+|k|=2} \sum_{i=1}^{n} |t^{(1)} - t^{(2)}|^{-\alpha/2} |\partial_t^j \partial_x^k \omega_m(P_2) - \partial_t^j \partial_x^k \omega_m(H_i)|$$

$$\times R((2+\alpha)\gamma; \tilde{P}) \prod_{\nu=1}^{n} d_2(-k_\nu \beta_\nu^{(2)}, x_\nu^{(2)}) d_1(-k_\nu \beta_\nu^{(1)}, \tilde{t}),$$

$\lambda_1 \in (\frac{1+\lambda_0}{2}, 1)$, $R(a\gamma; \tilde{P}) = \min\{R(a\gamma; P_1),\ R(a\gamma; P_2),\ R(a\gamma; H_i)\}$, $d_2(a, \tilde{x}_i) = \min(d_2(a, x_i^{(1)}), d_2(a, x_i^{(2)}))$.

Если $|t^{(1)} - t^{(2)}| \geq R(2\gamma; \tilde{P})\frac{\tau}{16} \equiv T_1$, τ — произвольное число, $\tau \in (0,1)$, то

$$E_2(\omega_m) \leq 2\tau^{-\alpha} \|\omega_m; \gamma; \beta; 0; Q\|_2. \tag{2.14}$$

Если $|x_i^{(1)} - x_i^{(2)}| \geq n^{-1} R(\gamma; \tilde{P}) d_1(-\beta_i^{(1)}, t^{(2)}) d_2(-\beta_i^{(2)}, \tilde{x}_i)\dfrac{\tau}{4} \equiv T_2$, то

$$E_1(\omega_m) \leq 2\tau^{-\alpha} \|\omega_m; \gamma; \beta; 0; Q\|_2. \tag{2.15}$$

Применяя интерполяционные неравенства к (2.14) и (2.15), находим

$$E_l(\omega_m) \leq \varepsilon^\alpha \|\omega_m; \gamma; \beta; 0; Q\|_{2+\alpha} + c(\varepsilon)\|\omega_m; Q\|_0. \tag{2.16}$$

Пусть $|x_i^{(1)} - x_i^{(2)}| \leq T_2$ и $|t^{(1)} - t^{(2)}| \leq T_1$. Будем считать, что $R(\gamma; \tilde{P}) \equiv R(\gamma; P_1)$. Предположим, что $|x^{(1)} - z| \geq 2T_2 n$, или $|x_n^{(1)} - z_n| \geq T_2$, $z \in \partial D$.

Запишем задачу (2.12) в виде

$$\begin{aligned}(L_2\omega_m)(t,x) \equiv \left[\partial_t - \sum_{ij=1}^{n} a_{ij}(P_1)\partial_{x_i}\partial_{x_j}\right]\omega_m \\ = \sum_{ij=1}^{n} [a_{ij}(P) - a_{ij}(P_1)]\partial_{x_i}\partial_{x_j}\omega_m \\ + \sum_{i=1}^{n} a_i(P)\partial_{x_i}\omega_m + (a_0(P) - \lambda)\omega_m + F_m(t,x) \\ \equiv F_m^{(1)}(t,x,\omega_m) + F_m(t,x),\end{aligned} \tag{2.17}$$

$$\omega_m(0,x) = \Phi_m(x) - \sum_{k=1}^{N} q(t_k, x)e^{-\lambda t_k}\omega_m(t_k, x) \equiv \Phi_m^{(1)}(x),$$

$$\lim_{x \to z \in \partial D} \omega_m(t,x) = 0.$$

Пусть $V_r^{(1)}$ — область из Q, $V_r^{(1)} = \{(t,x) \in Q \,\big|\, |x_i - x_i^{(1)}| \leq rT_2$, $i \in \{1,\ldots,n\}, |t - t^{(1)}| \leq r^2 T_1\}$. В задаче (2.17) сделаем замену

$$\omega_m(t,x) = W_m(t,y), \quad y_i = d_1(\beta_i^{(1)}, t^{(1)}) d_2(\beta_i^{(2)}, x_i^{(1)}) x_i.$$

В результате получим

$$(L_3W_m)(t,y) \equiv \Bigg[\partial_t - \sum_{ij=1}^{n} d_1(\beta_i^{(1)}, t^{(1)}) d_1(\beta_j^{(1)}, t^{(1)}) d_2(\beta_i^{(2)}, x_i^{(1)}) \times d_2(\beta_j^{(2)}, x_j^{(1)}) a_{ij}(P_1) \partial_{y_i}\partial_{y_j}\Bigg] W_m = F_m^{(1)}(t,\tilde{y},W_m) + F_m(t,\tilde{y}), \quad (2.18)$$

$$W_m(0,y) = \Phi_m^{(1)}(\tilde{y}), \quad W_m|_\Gamma = 0,$$

где

$$\tilde{y} = (d_1(-\beta_1^{(1)}, t^{(1)}) d_2(-\beta_1^{(2)}, x_1^{(1)}) y_1, \dots, d_1(-\beta_n^{(1)}, t^{(1)}) d_2(-\beta_n^{(2)}, x_n^{(1)}) y_n).$$

Обозначим через $y_i^{(1)} = d_1(\beta_i^{(1)}, t^{(1)}) d_2(\beta_i^{(2)}, x_i^{(1)}) x_i^{(1)}$, $H_r^{(1)} = \{(t,y)| \, |y_i - y_i^{(1)}| \le rn^{-1}\sqrt{T_1},\ i \in \{1,\dots,n\},\ |t - t^{(1)}| \le rT_1\}$ и возьмем трижды дифференцируемую функцию $\eta(t,y)$, обладающую следующими свойствами:

$$\eta(t,y) = \begin{cases} 1, & (t,y) \in H_{1/4}^{(1)}, \quad 0 \le \eta(t,y) \le 1; \\ 0, & (t,y) \notin H_{3/4}^{(1)}, \quad |\partial_t^j \partial_y^k \eta| \le C_{kj} R(-(2j+|k|)\gamma; P_1). \end{cases}$$

Тогда функция $V_m(t,y) = \eta(t,y) W_m(t,y)$ является решением следующей краевой задачи:

$$\begin{aligned} (L_3V_m)(t,y) = {} & \sum_{ij=1}^{n} d_1(\beta_i^{(1)}, t^{(1)}) d_1(\beta_j^{(1)}, t^{(1)}) d_2(\beta_i^{(2)}, x_i^{(1)}) \\ & \times d_2(\beta_j^{(2)}, x_j^{(1)}) a_{ij}(P_1) [\partial_{y_i}\eta \partial_{y_j} W_m + \partial_{y_j}\eta \partial_{y_i} W_m] \\ & + w_m \Bigg[\sum_{ij=1}^{n} d_1(\beta_i^{(1)}, t^{(1)}) d_1(\beta_j^{(1)}, t^{(1)}) d_2(\beta_i^{(2)}, x_i^{(1)}) \\ & \times d_2(\beta_j^{(2)}, x_j^{(1)}) a_{ij}(P_1) \partial_{y_i}\partial_{y_j}\eta - \partial_t \eta \Bigg] \\ & + \eta(F_m^{(1)} + F_m) \equiv F_m^{(2)}(t,\tilde{y},\eta,W_m) + \eta F_m(t,\tilde{y}), \quad (2.19) \end{aligned}$$

$$V_m(0,y) = \eta \Phi_m^{(1)}(\tilde{y}), \quad V_m|_\Gamma = 0.$$

При выполнении условий а)–в) единственное решение задачи (2.19) существует и на основании теоремы 5.2 [1, с. 364] для него имеет место неравенство

$$E_3(V_m) \equiv d^{-\alpha}(N_1,N_2) |\partial_t^j \partial_y^k V_m(N_1) - \partial_t^j \partial_y^k V_m(N_2)|$$

$$\leq C(\|F_m^{(2)} + \eta F_m\|_{C^\alpha(H^{(1)}_{3/4})} + \|\eta\Phi_m^{(1)}\|_{C^{2+\alpha}(H^{(1)}_{3/4})}), \quad (2.20)$$

где $(N_1, N_2) \subset H^{(1)}_{1/4}$, $d(N_1, N_2)$ — параболическое расстояние между точками N_1, N_2, $2j + |k| = 2$.

Учитывая свойства функции $\eta(t, y)$, находим

$$\|F_m^{(2)} + \eta F_m\|_{C^\alpha(H^{(1)}_{3/4})} \leq cR(-(2+\alpha)\gamma; P_1)(\|W_m; \gamma; 0; 0; H^{(1)}_{3/4}\|_2$$
$$+ \|W_m; H^{(1)}_{3/4}\|_0 + \|F_m^{(1)}; \gamma; 0; 2\gamma; H^{(1)}_{3/4}\|_\alpha + \|F_m; \gamma; 0; 2\gamma; H^{(1)}_{3/4}\|_\alpha), \quad (2.21)$$

$$\|\eta\Phi_m^{(1)}\|_{C^{2+\alpha}(H^{(1)}_{3/4})} \leq R(-(2+\alpha)\gamma; P_1)(\lambda_0\|W_m; \gamma; 0; 0; H^{(1)}_{3/4}\|_{2+\alpha}$$
$$+ c\|W_m; H^{(1)}_{3/4}\|_0 + c_1\|\Phi_m; \gamma; 0; 0; H^{(1)}_{3/4}\|_{2+\alpha}).$$

Подставляя (2.21) в (2.20) и возвращаясь к переменным (t, x), получим

$$E_l(\omega_m) \leq c_1(\|F_m^{(1)}; \gamma; \beta; 2\gamma; V^{(1)}_{3/4}\|_\alpha + \|\Phi_m; \gamma; \beta; 0; V^{(1)}_{3/4}\|_{2+\alpha}$$
$$+ \|F_m; \gamma; \beta; 2\gamma; V^{(1)}_{3/4}\|_\alpha + \|\omega_m; \gamma; \beta; 0; V^{(1)}_{3/4}\|_2 + \|\omega_m; V^{(1)}_{3/4}\|_0)$$
$$+ \lambda_0\|\omega_m; \gamma; \beta; 0; V^{(1)}_{3/4}\|_{2+\alpha}. \quad (2.22)$$

Учитывая интерполяционные неравенства и оценки норм каждого слагаемого выражений $F_m^{(1)}$, F_m, Φ_m, получим

$$E_l(\omega_m) \leq (\lambda_0 + \varepsilon^\alpha(n+2) + r^2 n^2)\|\omega_m; \gamma; \beta; 0; H^{(1)}_{3/4}\|_{2+\alpha} + c_2\|\omega_m; H^{(1)}_{3/4}\|_0$$
$$+ c_3(\|f_m; \gamma; \beta; \mu_0; Q\|_\alpha + \|\varphi_m; \tilde{\gamma}; \tilde{\beta}; 0; D\|_{2+\alpha} + \|g_m; \gamma; \beta; 0; Q\|_{2+\alpha}). \quad (2.23)$$

Рассмотрим случай, когда $|x^{(1)} - z| \leq 2T_2 n$ и $|x_n^{(1)} - z_n| \leq T_2$, $z \in \partial D$. Пусть $K(P)$ — шар радиуса R_0, $R_0 \geq 4(T_2 n + T_1)$ с центром в точке $P \in \Gamma$, содержащий точки P_1, P_2, H. Используя ограничение на гладкость границы ∂D, можно распрямить область $\partial D \cap K(P)$ при помощи взаимно однозначного преобразования $x = \psi_1(\xi)$ [5, с. 126]. В результате такого преобразования область $D \cap K(P)$ переходит в область Π, для точек которой $\xi_n \geq 0$. Пусть $\omega_m(t, x)$, P_1, P_2, H при этом преобразовании переходят соответственно в $\omega_m^{(1)}(t, \xi)$, M_1, M_2, $N_i^{(1)}$. Обозначим коэффициенты дифференциального выражения

$(L_1-\lambda)$ в области Π через $p_{ij}(\tau,\xi)$, $p_i(\tau,\xi)$, $p_0(\tau,\xi)$, нелокального условия через $q^{(1)}(t_k,\xi)$. Тогда $\omega_m^{(1)}(t,\xi)$ будет решением задачи

$$\begin{aligned}(L_4\omega_m^{(1)})(t,\xi) \equiv \Big[\partial_t - \sum_{ij=1}^{n} p_{ij}(M_1)\partial_{\xi_i}\partial_{\xi_j}\Big]\omega_m^{(1)} \\ = \sum_{ij=1}^{n}[p_{ij}(t,\xi)-p_{ij}(M_1)]\partial_{\xi_i}\partial_{\xi_j}\omega_m^{(1)} \\ + \sum_{i=1}^{n} p_i(t,\xi)\partial_{\xi_i}\omega_m^{(1)} + (p_0(t,\xi)-\lambda)\omega_m^{(1)} + F_m(t,\psi_1(\xi)) \\ \equiv F_m^{(3)}(t,\xi,\omega_m^{(1)}) + F_m(t,\psi_1(\xi)),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\omega_m^{(1)}(0,\xi) = \Phi_m(\psi_1(\xi)) - \sum_{k=1}^{N} q^{(1)}(t_k,\xi)\omega_m^{(1)}(t_k,\xi)e^{-\lambda t_k} \\ = \Phi_m^{(1)}(\xi,\omega_m^{(1)}) + \Phi_m(\psi_1(\xi)),\end{aligned}$$

$$\omega_m^{(1)}|_{\xi_n=0} = 0.$$

На основании теоремы 6.1 [1, с. 368] и рассуждений доказательства оценки (2.22), получим неравенство

$$\begin{aligned}E_l(\omega_m^{(1)}) \le (\lambda_0 + \varepsilon^\alpha(n+2) + r^2n^2)\|\omega_m^{(1)};\gamma;\beta;0;\Pi\|_{2+\alpha} + c_4\|\omega_m^{(1)};\Pi\|_0 \\ + c_5(\|f_m;\gamma;\beta;\mu_0;Q\|_\alpha + \|\varphi_m;\tilde\gamma;\tilde\beta;0;D\|_{2+\alpha} + \|g_m;\gamma;\beta;0;Q\|_{2+\alpha}).\end{aligned} \tag{2.24}$$

Воспользовавшись неравенствами (2.9), (2.13), (2.15), (2.16), (2.23), (2.24) и выбирая ε, τ и r достаточно малыми, получим неравенство

$$\begin{aligned}\|v_m;\gamma;\beta;0;Q\|_{2+\alpha} \le c(\|f_m;\gamma;\beta;\mu_0;Q\|_\alpha + \|\varphi_m;\tilde\gamma;\tilde\beta;0;D\|_{2+\alpha} \\ + \|g_m;\gamma;\beta;0;Q\|_{2+\alpha}).\end{aligned} \tag{2.25}$$

В силу неравенства (2.25) и того, что

$$\|f_m;\gamma;\beta;\mu_0;Q\|_\alpha \le c\|f;\gamma;\beta;\mu_0;Q\|_\alpha,$$

$$\|\varphi_m;\tilde\gamma;\tilde\beta;0;D\|_{2+\alpha} \le c\|\varphi;\tilde\gamma;\tilde\beta;0;D\|_{2+\alpha},$$

$$\|g_m;\gamma;\beta;0;Q\|_{2+\alpha} \le c\|g;\gamma;\beta;0;Q\|_{2+\alpha}$$

имеем неравенство (2.11). $\square$

Теорема 2.4. *Пусть выполнены условия теоремы* 1.2. *Тогда для решения задачи* (2.5), (2.6), (2.8) *имеет место оценка*

$$\|v_m;\gamma;\beta;0;Q\|_{2+\alpha}\le c(\|f;\gamma;\beta;\mu_0;Q\|_\alpha + \|\varphi;\tilde\gamma;\tilde\beta;0;D\|_{2+\alpha}+\|\psi;\gamma;\beta;\delta;Q\|_{1+\alpha}). \quad (2.26)$$

Оценка (2.26) получается при помощи методики доказательства теоремы 2.3. Выделим наиболее существенные места.

Пусть $|t^{(1)}-t^{(2)}|\le T_1$ и $|x_i^{(1)}-x_i^{(2)}|\le T_2$. В случае $|x^{(1)}-z|\ge 2\,T_2 n$ или $|x_n^{(1)}-z_n|\ge T_2$, $z\in\partial D$ запишем задачу (2.5), (2.6), (2.8) в виде

$$(L_2 v_m)(t,x)=F_m^{(1)}(t,x,v_m)+f_m(t,x)e^{\lambda t},$$

$$v_m(0,x)=\varphi_m(x)-\sum_{k=1}^N q(t_k,x)e^{-\lambda t_k}v_m(t_k,x)\equiv\Phi_m^{(3)}(x,v_m), \quad (2.27)$$

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_2 v_m|_\Gamma &\equiv \sum_{i=1}^n h_i(P_1)\partial_{x_i}v_m|_\Gamma\\ &=\left\{\sum_{i=1}^n[h_i(P_1)-h_i(P)]\partial_{x_i}v_m-h_0(P)v_m+\psi_m(P)e^{\lambda t}\right\}\Big|_\Gamma\\ &\equiv G_m(t,x,v_m)\Big|_\Gamma.\end{aligned}$$

В задаче (2.27) сделаем замену $v_m(t,x)=w_m^{(1)}(t,y)$. Тогда функция $V_m^{(1)}(t,y)=\eta(t,y)W_m^{(1)}(t,y)$ в области $H_{3/4}^{(1)}$ удовлетворяет краевой задаче

$$(L_3V_m^{(1)})(t,y)=F_m^{(2)}(t,\tilde y,\eta,w_m^{(1)})+\eta f_m(t,\tilde y)e^{\lambda t},$$

$$V_m^{(1)}(0,y)=\eta\Phi_m^{(3)}(\tilde y,w_m^{(1)}), \quad (2.28)$$

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^n h_i(P_1)d_1(\beta_i^{(1)},t^{(1)})d_2(\beta_i^{(2)},x_i^{(1)})\partial_{y_i}V_m^{(1)}\Big|_\Gamma\\ &\quad=\Big[\eta(t,y)G_m(t,\tilde y,W_m^{(1)})-W_m^{(1)}\sum_{i=1}^n h_i(P_1)d_1(\beta_i^{(1)},t^{(1)})\\ &\qquad\times d_2(\beta_i^{(2)},x_i^{(1)})\partial_{y_i}\eta\Big]\Big|_\Gamma\equiv G_m^{(1)}(t,\tilde y,\eta,W_m^{(1)})\Big|_\Gamma.\end{aligned}$$

При выполнении условий а), б), г) единственное решение задачи (2.28) существует и на основании теоремы 5.3 [1, с. 364] для него имеет место неравенство

$$E_3(V_m^{(1)}) \le c(\|F_m^{(2)} + \eta f_m e^{\lambda t}\|_{C^\alpha(H_{3/4}^{(1)})} + \|\eta \Phi_m^{(3)}\|_{C^{2+\alpha}(H_{3/4}^{(1)})} + \|G_m^{(1)}\|_{C^{1+\alpha}(H_{3/4}^{(1)})}).$$

Учитывая свойства функций $\eta(t,y)$, оценки выражений $F_m^{(2)}$, $G_m^{(1)}$ и возвращаясь к переменным (t,x), получим

$$E_l(v_m) \le c(\|F_m^{(1)}; \gamma; \beta; 2\gamma; V_{3/4}^{(1)}\|_\alpha + \|f_m; \gamma; \beta; 2\gamma; V_{3/4}^{(1)}\|_\alpha + \|\Phi_m; \tilde\gamma; \tilde\beta; 0; V_{3/4}^{(1)}\|_{2+\alpha} + \|G_m; \gamma; \beta; \gamma; V_{3/4}^{(1)}\|_{1+\alpha} + \|v_m; \gamma; \beta; 0; V_{3/4}^{(1)}\|_2 + \|v_m; V_{3/4}^{(1)}\|_0).$$

Оценивая нормы каждого слагаемого выражений $F_m^{(1)}$, $\Phi_m^{(3)}$, G_m, находим

$$E_l(v_m) \le (\lambda_0 + \varepsilon^\alpha(n+3) + r^2 n^2)\|v_m; \gamma; \beta; 0; V_{3/4}^{(1)}\|_{2+\alpha} + c_5\|v_m; V_{3/4}^{(1)}\|_0 + c_6(\|f; \gamma; \beta; \mu_0; Q\|_\alpha + \|\varphi; \tilde\gamma; \tilde\beta; 0; D\|_{2+\alpha} + \|\psi; \gamma; \beta; \delta; Q\|_{1+\alpha}). \quad (2.29)$$

В случае, когда $|x_n^{(1)} - z_n| \le 2T_2$ и $|x^{(1)} - z| \le 2T_2 n$ обозначим коэффициенты дифференциального выражения $\mathcal{B}_2$ через $\tilde h_i(t,\xi)$. Тогда $w_m^{(2)}(t,\xi) = v_m(t, \psi_1(\xi))$ в области Π будет решением задачи

$$(L_4 w_m^{(2)})(t,\xi) = F_m^{(3)}(t, \xi w_m^{(2)}) + f_m(t, \psi_1(\xi))e^{\lambda t},$$
$$w_m^{(2)}(0,\xi) = \Phi_m^{(2)}(\xi, w_m^{(2)}) + \varphi_m(\psi_1(\xi)),$$

$$\sum_{i=1}^n \tilde h_i(M_1)\partial_{\xi_i} w_m^{(x)}\Big|_{\xi_n=0} = \Big\{\sum_{i=1}^n [\tilde h_i(M_1) - \tilde h_i(t,\xi)]\partial_{\xi_i} w_m^{(2)} - \tilde h_0(t,\xi) w_m^{(2)} + \psi_m(t, \psi_1(\xi))e^{-\lambda t}\Big\}\Big|_{\xi_n=0} = G_m^{(2)}(t, \xi, w_m^{(2)})\Big|_{\xi_n=0}. \quad (2.30)$$

На основании теоремы 6.1 [1, с. 368] и рассуждений доказательства теоремы 2.3 получаем неравенство (2.29).

Воспользовавшись неравенствами (2.10), (2.13), (2.29) и выбирая τ, ε и r достаточно малыми, получим неравенство (2.26).

Доказательство теоремы 1.1. Учитывая замену $v_m = u_m e^{\lambda t}$ и неравенство (2.11), для решения задачи (2.1)–(2.3) имеем оценку

$$\|u_m;\gamma;\beta;0;Q\|_{2+\alpha} \le c(\|f;\gamma;\beta;\mu_0;Q\|_\alpha + \|\varphi;\tilde\gamma;\tilde\beta;0;D\|_{2+\alpha} + \|g;\gamma;\beta;0;Q\|_{2+\alpha}), \quad (2.31)$$

правая часть которой не зависит от m_1, m_2. Кроме того, последовательности $\{U_m^{(0)}\} = \{u_m(P)\}$, $\{U_m^{(1)}\} = \{d_1(\gamma^{(1)} - \beta_i^{(1)}, t)d_2(\gamma^{(2)} - \beta_i^{(2)}, x_i)\partial_{x_i} u_m(P)\}$, $\{U_m^{(2)}\} = \{R(2\gamma;P)\partial_t u_m(P)\}$, $\{U_m^{(3)}\} = \{d_1(2\gamma^{(1)} - \beta_i^{(1)} - \beta_j^{(1)}, t)d_2(\gamma^{(2)} - \beta_i^{(2)}, x_i)d_2(\gamma^{(2)} - \beta_j^{(2)}, x_j)\partial_{x_i}\partial_{x_j} u_m(P)\}$ равномерно ограничены и равностепенно непрерывны в области $\overline{Q}$. По теореме Арчела существуют подпоследовательности $\{U_m^{(\nu)}\}$, равномерно сходящиеся в $\overline{Q}$ к $U^{(\nu)}$, $\nu \in \{0,1,2,3\}$. Переходя к пределу при $m_1 \to \infty$, $m_2 \to \infty$ в задаче (2.1)–(2.3), получим, что $u(t,x) = U^{(0)}$ является единственным решением задачи (1.1)–(1.3), $u \in C^\alpha(\gamma;\beta;0;Q)$. □

Доказательство теоремы 1.2. Учитывая замену $v_m = u_m e^{\lambda t}$ и неравенство (2.26), для решения задачи (2.1), (2.2), (2.4) имеем оценку

$$\|u_m;\gamma;\beta;0;Q\|_{2+\alpha} \le c(\|f;\gamma;\beta;\mu_0;Q\|_\alpha + \|\varphi;\tilde\gamma;\tilde\beta;0;D\|_{2+\alpha} + \|\psi;\gamma;\beta;\delta;Q\|_{1+\alpha}), \quad (2.32)$$

правая часть которой не зависит от m_1, m_2. Поэтому, повторяя рассуждения доказательства теоремы 1.1, получим, что единственное решение задачи (1.1), (1.2), (1.4) принадлежит пространству $C^\alpha(\gamma;\beta;0;Q)$. □

Теорема 2.5. *Если $f \in C^\alpha(\gamma;\beta;0;Q)$ и выполнены условия а)–в), то единственное решение задачи* (1.1)–(1.3) *в пространстве $C^{2+\alpha}(\gamma;\beta;0;Q)$ определяется интегралами Стильтьеса с борелевской мерой*

$$u(t,x) = \int\limits_Q \mathcal{E}_1(t,x;d\tau,d\xi)f(\tau,\xi) + \int\limits_D \mathcal{E}_2(t,x;d\xi)\varphi(\xi) + \int\limits_\Gamma \mathcal{E}_3(t,x;d\tau,d_\xi S)g(\tau,\xi), \quad (2.33)$$

и компоненты $(\mathcal{E}_1,\mathcal{E}_2,\mathcal{E}_3)$ удовлетворяют неравенствам

$$\left|\int\limits_Q \mathcal{E}_1(t,x;d\tau,d\xi)\right| \le \|e^{\lambda t}(-A_0-\lambda)^{-1};Q\|_0,$$

$$\left|\int\limits_{\Gamma} \mathcal{E}_3(t,x;d\tau,d_\xi S)\right| \le e^{\lambda T},$$

$$\left|\int\limits_{D} \mathcal{E}_2(t,x;d\xi)\right| \le \left\|\left(1-\sum_{k=1}^{N} |q(t_k,x)e^{-\lambda t_k}|\right)^{-1}; D\right\|_0. \tag{2.34}$$

Доказательство. Согласно вложению $C^{\alpha}(\gamma;\beta;0;Q) \subset C^{\alpha}(\gamma;\beta;\mu_0;Q)$ имеем для решения задачи (1.1)–(1.3) оценку

$$\|u;\gamma;\beta;0;Q\|_{2+\alpha} \le c(\|f;\gamma;\beta;0;Q\|_{\alpha} + \|\varphi;\tilde{\gamma};\tilde{\beta};0;D\|_{2+\alpha} \\ + \|g;\gamma;\beta;0;Q\|_{2+\alpha}). \tag{2.35}$$

Рассматривая $u(t,x)$ при фиксированных (t,x) как линейный непрерывный функционал $A(f,\varphi,g)$ на нормированном пространстве $C^{2+\alpha}(\gamma;\beta;0;Q)$ с нормой, равной правой части неравенства (2.34), в силу теоремы Рисса и вложения $C^{2+\alpha}(\gamma;\beta;0;Q) \subset C(Q)$, можно считать, что $u(t,x)$ порождает борелевскую меру $E(t,x;Z)$, определенную на σ-алгебре множества Z области $\overline{Q}$, включая Q и все его открытые подмножества такие, что значение функционала определяется формулой (2.33).

Используя теорему 2.1 при $f \equiv 1$, $\varphi \equiv 1$, $g \equiv 1$, получаем оценки (2.34). □

Аналогичная теорема имеет место для решения задачи (1.1), (1.2), (1.4).

Теорема 2.6. *Если $f \in C^{\alpha}(\gamma;\beta;0;Q)$, $\psi \in C^{1+\alpha}(\gamma;\beta;0;Q)$ и выполнены условия а), б), г), то единственное решение задачи* (1.1), (1.2), (1.4) *в пространстве $C^{2+\alpha}(\gamma;\beta;0;Q)$ определяется интегралами Стильтьеса с борелевской мерой*

$$u(t,x) = \int\limits_{Q} \Gamma_1(t,x;d\tau,d\xi) f(\tau,\xi) + \int\limits_{D} \Gamma_2(t,x;d\xi)\varphi(\xi) \\ + \int\limits_{\Gamma} \Gamma_3(t,x;d\tau,d_\xi S)\psi(\tau,\xi) \tag{2.36}$$

и компоненты $(\Gamma_1,\Gamma_2,\Gamma_3)$ удовлетворяют неравенствам

$$\left|\int\limits_{Q} \Gamma_1(t,x;d\tau,d\xi)\right| \le \|e^{\lambda t}(-A-\lambda)^{-1}; Q\|_0,$$

$$\left| \int\limits_{\Gamma} \Gamma_3(t, x; d\tau, d_\xi S) \right| \leq \|e^{\lambda T} b_0^{-1}; Q\|_0,$$

$$\left| \int\limits_{D} \Gamma_2(t, x; d\xi) \right| \leq \left\| \left(1 - \sum_{k=1}^{N} |q(t_k, x) e^{-\lambda t_k}|\right)^{-1}; D \right\|_0.$$

Литература

[1] О. А. Ладыженская, В. А. Солонников, Н. Н. Уральцева, *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа*, М.: Наука, 1967, 736 с.

[2] М. М. Смирнов, *Вырождающиеся эллиптические и гиперболические уравнения*, Москва, 1966, 292 с.

[3] Б. I. Пташник, В. С. Iльків, I. Я. Кміть, В. М. Поліщук, *Нелокальні крайові задачі із частинними похідними*, Київ, 2002, 416 с.

[4] М. I. Матійчук, *Параболічні та еліптичні задачі з особливостями*, Чернівці, 2003, 248 с.

[5] А. Фридман, *Уравнения с частными производными параболического типа*, Москва, 1967, 427 с.

[6] Б. В. Базалий, Н. В. Краснощек, *Классическая разрешимость первой начально-краевой задачи для нелинейного сильно вырождающегося параболического уравнения* // Укр. мат. журн., **56** (2004), No. 10, 1299–1320.

[7] I. Д. Пукальський, *Крайові задачі для нерівномірно параболічних та еліптичних рівнянь з виродженнями і особливостями: Монография*, Чернівці, 2008, 253 с.

[8] S. D. Eidelman, S. D. Ivasyshen, A. N. Kochubei, *Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type*, Basel, Birkhauser, 2004.

[9] M. Majewski, *On the existence of optimal solutions to an optimal control problem* // I. Optimiz. theory and Appl., **126** (2006),No. 3, 635–651.

[10] П. К. Конаков, Г. Е. Веревочкин, *Тепло-массообмен при получении монокристалов*, М.: Металлургия, 1971, 238 с.

[11] Ф. Зейтц, *Современная теория твердого тела*, М.-Л.: Гостехиздат, 1949, 736 с.

Сведения об авторах

Инна Михайловна Исарюк, Иван Дмитриевич Пукальский

Черновецкий национальный университет им. Ю. Федьковича, ул. Коцюбинского 2, Черновцы, 58012, Украина

E-Mail: katy_diff@mail.ru