Український математичний вісник
Том 11 **(2014)**, № 3, 417 – 441

Структурные характеристики функций из L_2 и точные значения поперечников некоторых функциональных классов

Сергей Б. Вакарчук, Мирганд Ш. Шабозов, Валентина И. Забутная

(*Представлена Р. М. Тригубом*)

Аннотация. Для предложенной К. И. Руновским усредненной характеристики гладкости функций рассмотрены её основные свойства и получены точные неравенства типа Джексона. Точные значения некоторых n-поперечников вычислены для классов дифференцируемых функций, определенных при помощи указанной характеристики гладкости, и мажорант, удовлетворяющих определенным требованиям.

2010 MSC. 41A10, 41A17, 41A44, 42A10.

Ключевые слова и фразы. Наилучшее полиномиальное приближение, усредненная характеристика гладкости функции, неравенство типа Джексона, поперечник, мажоранта, коэффициенты Фурье.

1. Пусть $L_2 = L_2([0, 2\pi])$ — пространство измеримых по Лебегу 2π-периодических функций, у которых норма

$$\|f\| := \|f\|_{L_2} = \left\{ \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx \right\}^{1/2} < \infty.$$

Через $\mathcal{T}_{n-1}$ обозначим подпространство тригонометрических полиномов порядка $n-1$ ($n \in \mathbb{N}$). Для произвольной функции $f \in L_2$, имеющей разложение в ряд Фурье

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k \cos(kx + \gamma_k), \qquad (1)$$

Статья поступила в редакцию 14.10.2013

ISSN 1810 – 3200.

где равенство понимается в смысле сходимости в пространстве L_2, величина ее наилучшего приближения элементами подпространства $\mathcal{T}_{n-1}$ равна

$$E_{n-1}(f) := \inf\{\|f - T_{n-1}\| : T_{n-1} \in \mathcal{T}_{n-1}\} = \|f - S_{n-1}(f)\| \\ = \bigg\{ \sum_{k=n}^{\infty} \rho_j^2(f) \bigg\}^{1/2} \quad (n \in \mathbb{N}). \quad (2)$$

Здесь

$$S_{n-1}(f, x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \rho_k \cos(kx + \gamma_k)$$

есть частная сумма $(n-1)$-го порядка ряда Фурье (1) функции f. Под $\omega_m(f, t)$ $(m \in \mathbb{N};\ t \geqslant 0)$ понимаем модуль непрерывности m-го порядка функции $f \in L_2$, т.е.

$$\omega_m(f, t) := \sup\{\|\Delta_h^m f\| : |h| \leqslant t\},$$

где

$$\Delta_h^m f(x) := \sum_{j=0}^{m} (-1)^{m-j} \binom{m}{j} f(x + jh)$$

есть конечная разность m-го порядка функции f в точке x с шагом h. Через L_2^r $(r \in \mathbb{N})$ обозначим множество функций $f \in L_2$, у которых производные $(r-1)$-го порядка абсолютно непрерывны, а производные r-го порядка $f^{(r)}$ принадлежат пространству L_2.

Среди экстремальных задач теории аппроксимации функций одной из важных является задача вычисления точных констант в неравенствах Джексона

$$E_{n-1}(f) \leqslant \chi n^{-r} \omega_m(f^{(r)}, \tau/n) \quad (r \in \mathbb{Z}_+;\ n, m \in \mathbb{N};\ \tau > 0)$$

на классах L_2^r $(L_2^0 \equiv L_2)$, где χ — константа. Эту задачу в разное время исследовали Н. И. Черных, Л. В. Тайков, А. А. Лигун, В. А. Юдин, В. И. Иванов и О. И. Смирнов, А. Г. Бабенко и другие (см., например, [1–15]).

В работе [5] А. А. Лигун рассмотрел следующую экстремальную характеристику (всюду далее отношение 0/0 полагаем равным 0):

$$\sup \left\{ \frac{E_{n-1}^2(f)}{\int_0^h \omega_m^2(f^{(r)}, t) \varphi(t)\, dt} : f \in L_2^r, \quad f \not\equiv \text{const} \right\},$$

где $m,n\in\mathbb{N}$; $r\in\mathbb{Z}_+$; $0<h\leqslant\pi/n$; неотрицательная функция φ измерима, суммируема на отрезке $[0,h]$ и не эквивалентна нулю. В частности, было показано, что имеет место двойное неравенство

$$\frac{1}{B_{n,h}^{r,m}(\varphi)}\leqslant\sup_{\substack{f\in L_2^r\\ f\not\equiv\mathrm{const}}}\frac{E_{n-1}^2(f)}{\int_0^h\omega_m^2(f^{(r)},t)\varphi(t)\,dt}\leqslant\frac{1}{\inf\limits_{n\leqslant k<\infty}B_{k,h}^{r,m}(\varphi)},$$

где

$$B_{k,h}^{r,m}(\varphi):=2^mk^{2r}\int\limits_0^h(1-\cos kt)^m\varphi(t)\,dt.$$

С целью обобщения указанного результата М. Ш. Шабозов и Г. А. Юсупов [12] рассмотрели экстремальную характеристику:

$$\chi_{m,n,r,p,s}(\varphi;h):=\sup\left\{\frac{E_{n-1}(f)}{\left(\int_0^h\omega_m^p(f^{(r)},t)\varphi(t)dt\right)^s}:f\in L_2^r,\quad f\not\equiv\mathrm{const}\right\},\tag{3}$$

где $m,n\in\mathbb{N}$; $r\in\mathbb{Z}_+$; p,s — положительные числа; $0<h\leqslant\pi/n$, а функция φ удовлетворяет требованиям, сформулированным выше в двойном неравенстве, полученном А. А. Лигуном. В [12] была показана справедливость соотношения

$$\left\{\mathcal{A}_{n,h,p}^{r,m}(\varphi)\right\}^{-1}\leqslant\chi_{m,n,r,p,1/p}(\varphi,h)\leqslant\left\{\inf_{n\leqslant k<\infty}\mathcal{A}_{k,h,p}^{r,m}(\varphi)\right\}^{-1},\tag{4}$$

где $0<p\leqslant 2$; $0<h\leqslant\pi/n$ и

$$\mathcal{A}_{k,h,p}^{r,m}(\varphi):=2^{m/2}\left(k^{rp}\int\limits_0^h(1-\cos kt)^{mp/2}\varphi(t)\,dt\right)^{1/p}.$$

2. При решении некоторых экстремальных задач теории аппроксимации функций в L_2 вместо модуля непрерывности m-го порядка С. Б. Вакарчуком, В. И. Забутной и М. Ш. Шабозовым использовалась следующая усредненная характеристика гладкости [13–15]:

$$\Omega_m(f,t):=\left\{\frac{1}{t^m}\int\limits_0^t\cdots\int\limits_0^t\|\Delta_{\overline{h}}^m f\|^2dh_1\cdots dh_m\right\}^{1/2},\tag{5}$$

где $t > 0$; $\overline{h} := (h_1, \dots, h_m)$; $\Delta^m_{\overline{h}} := \Delta^1_{h_1} \circ \Delta^1_{h_2} \circ \dots \circ \Delta^1_{h_m}$; $\Delta^1_{h_j} f(x) := f(x + h_j) - f(x)$, $j = \overline{1,m}$. Напомним, что в ходе исследования важных вопросов конструктивной теории функций в метрическом пространстве L_p $(0 < p < 1)$ подобного рода усредненная характеристика гладкости функций рассматривалась К. В. Руновским [16, 17] и Э. А. Стороженко, В. Кротовым, П. Освальдом [18].

Заметим, что усредненные модули непрерывности иного вида ранее изучались Р. М. Тригубом (см., например, [19, 20]) в пространствах L_p $(p \geqslant 1)$ и была показана их слабая эквивалентность обычным модулям непрерывности.

Далее отметим свойства $\Omega_m(f)$, поскольку они, по нашему мнению, представляют определенный интерес.

1. $\lim\limits_{t \to 0} \Omega_m(f, t) = 0$.

Действительно, поскольку норма $\|\Delta^m_{\overline{h}}\|$ является непрерывной функцией от $h_1, \dots, h_m$, то данное свойство вытекает из теоремы о среднем для кратного интеграла:

$$\lim_{t \to 0} \Omega_m(f, t) = \lim_{t \to 0} \|\Delta^1_{h_1(t)} \circ \Delta^1_{h_2(t)} \circ \dots \circ \Delta^1_{h_m(t)} f\| = 0,$$

где $0 < h_j(t) \leqslant t$ $(j = \overline{1,m})$ — значения, зависящие от t.

2. Функция $\Omega_m(f, t)$ непрерывна при $t > 0$.

3. $\Omega_m(f, t) \leqslant 2^m \|f\|$.

Данное свойство можно показать, используя метод математической индукции.

4. $\Omega_m(f_1 + f_2, t) \leqslant 2(\Omega_m(f_1, t) + \Omega_m(f_2, t))$.

Действительно, поскольку $\Delta^m_{\overline{h}}(f_1 + f_2) = \Delta^m_{\overline{h}} f_1 + \Delta^m_{\overline{h}} f_2$, то $\|\Delta^m_{\overline{h}}(f_1 + f_2)\|^2 \leqslant 2\left(\|\Delta^m_{\overline{h}} f_1\|^2 + \|\Delta^m_{\overline{h}} f_2\|^2\right)$. Используя формулу (5), получаем требуемое неравенство.

5. $\Omega_m(f, nt) \leqslant n^m \Omega_m(f, t)$ $(n \in \mathbb{N})$.

Докажем это свойство. Поскольку

$$\Omega_m(f, nt) = \left\{ \frac{1}{(nt)^m} \int\limits_0^{nt} \cdots \int\limits_0^{nt} \|\Delta^m_{\overline{h}} f\|^2 dh_1 \cdots dh_m \right\}^{1/2}$$
$$= \left\{ \frac{1}{t^m} \int\limits_0^{t} \cdots \int\limits_0^{t} \|\Delta^m_{n\overline{h}} f\|^2 dh_1 \cdots dh_m \right\}^{1/2},$$

где $n\overline{h} := (nh_1, \ldots, nh_m)$, то теперь необходимо показать справедливость неравенства $\|\Delta^m_{n\overline{h}} f\| \leqslant n^m \|\Delta^m_{\overline{h}} f\|$ и далее воспользоваться соотношением (5). Применим метод математической индукции для доказательства указанного неравенства. При $m = 1$ и $m = 2$ имеем соответственно

$$\Delta^1_{nh_1} f(x) = \sum_{i_1=0}^{n-1} \Delta^1_{h_1} f(x + i_1 h_1),$$

$$\begin{aligned}\Delta^1_{nh_2} \circ \Delta^1_{nh_1} f(x) &= \Delta^1_{nh_2} \circ \left(\sum_{i_1=0}^{n-1} \Delta^1_{h_1} f(x + i_1 h_1) \right) \\ &= \sum_{i_1=0}^{n-1} \Delta^1_{nh_2} \circ \Delta^1_{h_1} f(x + i_1 h_1) \\ &= \sum_{i_2=0}^{n-1} \sum_{i_1=0}^{n-1} \Delta^1_{h_2} \circ \Delta^1_{h_1} f(x + i_1 h_1 + i_2 h_2).\end{aligned}$$

Следовательно, $\|\Delta^1_{nh_1} f\| \leqslant n \|\Delta^1_{h_1} f\|$, $\|\Delta^1_{nh_2} \circ \Delta^1_{nh_1} f\| \leqslant n^2 \|\Delta^1_{h_2} \circ \Delta^1_{h_1} f\|$.

Пусть при $m = k$, где $k \in \mathbb{N}$; $k \geqslant 2$, справедливо неравенство

$$\|\Delta^1_{nh_k} \circ \Delta^1_{nh_{k-1}} \circ \cdots \circ \Delta^1_{nh_1} f\| \leqslant n^k \|\Delta^1_{h_k} \circ \Delta^1_{h_{k-1}} \circ \cdots \circ \Delta^1_{h_1} f\|.$$

Тогда для $m = k + 1$ получаем

$$\begin{aligned}&\|\Delta^1_{nh_{k+1}} \circ \Delta^1_{nh_k} \circ \cdots \circ \Delta^1_{nh_1} f\| \leqslant n \|\Delta^1_{h_{k+1}} \circ (\Delta^1_{nh_k} \circ \cdots \circ \Delta^1_{nh_1} f)\| \\ &= n \|\Delta^1_{nh_k} \circ \cdots \circ \Delta^1_{nh_1} \circ (\Delta^1_{h_{k+1}} f)\| \leqslant n^{k+1} \|\Delta^1_{h_k} \circ \cdots \circ \Delta^1_{h_1} \circ \Delta^1_{h_{k+1}} f\| \\ &\qquad = n^{k+1} \|\Delta^1_{h_{k+1}} \circ \Delta^1_{h_k} \circ \cdots \circ \Delta^1_{nh_1} f\|,\end{aligned}$$

т.е. $\|\Delta^m_{n\overline{h}} f\| \leqslant n^m \|\Delta^m_{\overline{h}} f\|$.

6. $\widetilde{C}_m \Omega_m(f, t) \leqslant \omega_m(f, t) \leqslant C^*_m \Omega_m(f, t)$, где $\widetilde{C}_m$ и C^*_m — некоторые постоянные, не зависящие от t и $f \in L_2$.

Отметим, что для пространства L_p $(0 < p < 1)$ данное свойство было получено К. В. Руновским [16]. Используя некоторые соображения из [16, 17], покажем его справедливость и в рассматриваемом случае. Получим вначале второе неравенство. Из [17] следует соотношение $\omega_1(f, t) \leqslant C\Omega_1(f, t)$, где C — константа, не зависящая от функции f и переменной t. Используя определение модуля непрерывности первого порядка и формулу (5), отсюда получаем

$$\|\Delta_\tau^1 f\|^2 \leqslant C^2 \frac{1}{t} \int\limits_0^t \|\Delta_h^1 f\|^2 dh,$$

где $|\tau| \leqslant t$. На основании данного неравенства для любого $\tau \in [-t, t]$ имеем

$$\|\Delta_\tau^2 f\|^2 = \|\Delta_\tau^1 \circ \Delta_\tau^1 f\|^2 \leqslant \frac{C^2}{t} \int\limits_0^t \|\Delta_{h_1}^1 \circ \Delta_\tau^1 f\|^2 dh_1$$

$$= \frac{C^2}{t} \int\limits_0^t \|\Delta_\tau^1 \circ \Delta_{h_1}^1 f\|^2 dh_1 \leqslant \frac{C^4}{t^2} \int\limits_0^t \int\limits_0^t \|\Delta_{h_2}^1 \circ \Delta_{h_1}^1 f\|^2 dh_1 dh_2.$$

Следовательно, $\omega_2(f,t) \leqslant C_2^*\Omega_2(f,t)$, где $C_2^* := C^2$. Продолжая последовательно указанным образом описанный процесс, получаем неравенство $\omega_m(f,t) \leqslant C_m^*\Omega_m(f,t)$, где $C_m^* := C^m$. Поскольку получение оценки сверху величины $\Omega_m(f,t)$ через $\omega_m(f,t)$ основано на идее доказательства соответствующего факта для случая $0 < p < 1$ в теореме 3.1 из работы К. В. Руновского [16], то по понятным причинам оно не приводится.

7. Функция $\Omega_m(f)$ является почти возрастающей, т.е. существует константа C, не зависящая от f и t, такая, что для любых $0 < t_1 < t_2$ имеет место неравенство $\Omega_m(f,t_1) \leqslant C\Omega_m(f,t_2)$.

Действительно, используя свойство 6 и полагая $C := C_m^*/\widetilde{C}_m$, имеем

$$\Omega_m(f,t_1) \leqslant \frac{1}{\widetilde{C}_m}\omega_m(f,t_1) \leqslant \frac{1}{\widetilde{C}_m}\omega_m(f,t_2) \leqslant C\Omega_m(f,t_2).$$

3. С нашей точки зрения, по аналогии с (3), определенный интерес представляет изучение экстремальной характеристики

$$\mathcal{K}_{m,n,r,p,s}(\varphi;h) := \sup\left\{ \frac{E_{n-1}(f)}{\left(\int_0^h \Omega_m^p(f^{(r)},t)\varphi(t)dt\right)^s} : f \in L_2^r,\ f \not\equiv \mathrm{const} \right\}, \tag{6}$$

где $m,n \in \mathbb{N}$; $r \in \mathbb{Z}_+$; $p,s \in \mathbb{R}_+\backslash\{0\}$; $0 < h \leqslant \pi/n$; φ — неотрицательная измеримая суммируемая на $[0,h]$ функция, не эквивалентная нулю. Следующая теорема является своеобразным распространением результата (4) на экстремальную характеристику (6).

Обозначим $\operatorname{sinc} t := \sin(t)/t$ $(t \neq 0)$, доопределив данную функцию значением 1 в точке $t = 0$, т.е. $\operatorname{sinc} 0 := 1$.

Теорема 1. *Пусть* $m, n \in \mathbb{N}$; $0 < p \leqslant 2$; $r \in \mathbb{Z}_+$; $0 < h \leqslant \pi/n$; φ *— неотрицательная, измеримая, суммируемая на отрезке* $[0, h]$ *функция, не эквивалентная нулю. Тогда справедливо равенство*

$$\mathcal{K}_{m,n,r,p,1/p}(\varphi; h) = \Big\{ \inf_{n\leqslant k<\infty} \mathcal{B}^{r,m}_{k,h,p}(\varphi) \Big\}^{-1}, \tag{7}$$

где

$$\mathcal{B}^{r,m}_{k,h,p}(\varphi) := 2^{m/2} \left\{ k^{rp} \int\limits_0^h (1 - \operatorname{sinc} kt)^{mp/2} \varphi(t)\, dt \right\}^{1/p}.$$

Доказательство. Пусть $f \in L_2^r$, $f \not\equiv \mathrm{const}$. Поскольку $f^{(r)} \in L_2$, то в смысле сходимости в L_2

$$f^{(r)}(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (ik)^r c_k \exp(ikx), \tag{8}$$

где c_k — коэффициенты ряда Фурье функции f, записанного в комплексной форме.

Используя равенство (8), запишем

$$\Delta^m_{\overline{h}} f^{(r)}(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (ik)^r \prod_{\nu=1}^{m} (\exp(ikh_\nu) - 1)\; c_k \exp(ikx).$$

Применяя равенство Парсеваля, имеем

$$\|\Delta^m_{\overline{h}} f^{(r)}\|^2 = 2^m \sum_{k=1}^{\infty} k^{2r} \prod_{\nu=1}^{m} (1 - \cos kh_\nu) \rho_k^2. \tag{9}$$

Подставляя (9) в формулу (5), получаем

$$\Omega_m^2(f^{(r)}, t) = 2^m \sum_{k=1}^{\infty} k^{2r} \rho_k^2 (1 - \operatorname{sinc} kt)^m \geqslant 2^m \sum_{k=n}^{\infty} k^{2r} \rho_k^2 (1 - \operatorname{sinc} kt)^m. \tag{10}$$

Воспользуемся далее одним вариантом неравенства Минковского, приведенным в монографии А. Пинкуса [21, с. 109]:

$$\left\{ \int\limits_0^h \left(\sum_{k=n}^{\infty} |\widetilde{f}_k(t)|^2 \right)^{p/2} dt \right\}^{1/p} \geqslant \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} \left(\int\limits_0^h |\widetilde{f}_k(t)|^p dt \right)^{2/p} \right\}^{1/2}$$
$$(0 < p \leqslant 2). \tag{11}$$

Полагая $\widetilde{f}_k := f_k \varphi^{1/p}$, из (11) получаем

$$\left\{\int\limits_0^h\left(\sum_{k=n}^{\infty}|f_k(t)|^2\right)^{p/2}\varphi(t)\,dt\right\}^{1/p}\geqslant\left\{\sum_{k=n}^{\infty}\left(\int\limits_0^h|f_k(t)|^p\varphi(t)\,dt\right)^{2/p}\right\}^{1/2}$$
$$(0<p\leqslant 2).\quad (12)$$

Возводя обе части неравенства (10) в степень $p/2$, умножая их на функцию φ, интегрируя по переменной t в пределах от 0 до h и применяя соотношение (12), с учетом формулы (2) имеем

$$\left\{\int\limits_0^h\Omega_m^p(f^{(r)},t)\varphi(t)\,dt\right\}^{1/p}$$
$$\geqslant 2^{m/2}\left\{\int\limits_0^h\left(\sum_{k=n}^{\infty}k^{2r}\rho_k^2(1-\operatorname{sinc}kt)^m\right)^{p/2}\varphi(t)\,dt\right\}^{1/p}$$
$$\geqslant 2^{m/2}\left\{\sum_{k=n}^{\infty}\left(k^{pr}\rho_k^p\int\limits_0^h(1-\operatorname{sinc}kt)^{mp/2}\varphi(t)\,dt\right)^{2/p}\right\}^{1/2}$$
$$=\left\{\sum_{k=n}^{\infty}\rho_k^2\Big(\mathcal{B}_{k,h,p}^{r,m}(\varphi)\Big)^2\right\}^{1/2}\geqslant E_{n-1}(f)\inf_{n\leqslant k<\infty}\mathcal{B}_{k,h,p}^{r,m}(\varphi).\quad (13)$$

Из неравенства (13) следует оценка сверху экстремальной характеристики (6)

$$\mathcal{K}_{m,n,r,p,1/p}(\varphi,h)\leqslant\big\{\inf_{n\leqslant k<\infty}\mathcal{B}_{k,h,p}^{r,m}(\varphi)\big\}^{-1}.\quad (14)$$

Перейдем к получению оценки снизу экстремальной характеристики (6), где $s=1/p$. Можно показать, что числовая последовательность $\{\mathcal{B}_{k,h,p}^{r,m}(\varphi)\}_{k\in\mathbb{N},\ k\geqslant n}$ ограничена снизу положительным числом, т.е. она имеет отличную от нуля точную нижнюю границу. Рассмотрим функцию $f_k(x)=\sin kx$ $(k\in\mathbb{N},\ k\geqslant n)$, принадлежащую классу L_2^r. Поскольку $E_{n-1}(f_k)=1$ и $\Omega_m(f_k^{(r)},t)=k^r\{2(1-\operatorname{sinc}kt)\}^{m/2}$, то

$$\frac{E_{n-1}(f_k)}{\left(\int_0^h\Omega_m^p(f_k^{(r)},t)\varphi(t)\,dt\right)^{\frac{1}{p}}}\geqslant 2^{-m/2}n^{-r}\left\{\int\limits_0^h(1-\operatorname{sinc}kt)^{mp/2}\varphi(t)\,dt\right\}^{-\frac{1}{p}}$$
$$=\left\{\mathcal{B}_{k,h,p}^{r,m}(\varphi)\right\}^{-1},$$

т.е.

$$\mathcal{K}_{m,n,r,p,1/p}(\varphi,h)\geqslant\left\{\mathcal{B}_{k,h,p}^{r,m}(\varphi)\right\}^{-1}$$

для любого натурального числа $k \geqslant n$. Отсюда, учитывая определение и свойства точных верхней и нижней границ числового множества, получаем

$$\mathcal{K}_{m,n,r,p,1/p}(\varphi, h) \geqslant \sup_{n \leqslant k < \infty} \left\{ \mathcal{B}_{k,h,p}^{r,m}(\varphi) \right\}^{-1} = \left\{ \inf_{n \leqslant k < \infty} \mathcal{B}_{k,h,p}^{r,m}(\varphi) \right\}^{-1}. \tag{15}$$

Сопоставляя неравенства (14) и (15), получаем требуемое равенство (7). Теорема 1 доказана. $\square$

4. Рассмотрим следствия, вытекающие из теоремы 1.

Следствие 1. *Пусть* $0 < h \leqslant 3\pi/(4n)$ *и выполнены все требования теоремы* 1. *Тогда имеет место следующее равенство*

$$\mathcal{K}_{m,n,r,p,1/p}(\varphi, h) = \left\{ \mathcal{B}_{n,h,p}^{r,m}(\varphi) \right\}^{-1}. \tag{16}$$

Доказательство. В силу поведения функции $g(t) := \operatorname{sinc} t$ (см., например, [22, с. 129, 132]), для любого $x \geqslant 1$ и $0 < y \leqslant 3\pi/4$ имеем $g(y) \geqslant g(xy)$. Тогда справедливо неравенство

$$x^{\gamma}(1 - g(xy))^{\alpha} \geqslant (1 - g(y))^{\alpha}, \tag{17}$$

где γ и α — произвольные положительные числа. Пусть $x = k/n$ $(k, n \in \mathbb{N};\ k \geqslant n)$; $y = nt$ $(0 < t \leqslant h)$; $\gamma = rp$; $\alpha = mp/2$. Тогда из (17) получаем

$$k^{rp}(1 - \operatorname{sinc} kt)^{mp/2} \geqslant n^{rp}(1 - \operatorname{sinc} nt)^{mp/2}. \tag{18}$$

Умножая обе части неравенства (18) на функцию φ, интегрируя полученное соотношение по переменной t в пределах от 0 до h, возводя обе части полученного таким образом неравенства в степень $1/p$ и умножая их на число $2^{m/2}$, имеем

$$\mathcal{B}_{k,h,p}^{r,m}(\varphi) \geqslant \mathcal{B}_{n,h,p}^{r,m}(\varphi) \quad (k \geqslant n).$$

С учетом данного соотношения из формулы (7) получаем требуемое равенство (16), чем и завершаем доказательство следствия 1. $\square$

Полагая в формуле (16) $p = 2$ и $\varphi \equiv 1$, имеем один из результатов, приведенных в работе [15]:

$$\sup\left\{\frac{n^{r-1/2}E_{n-1}(f)}{\int_0^h \Omega_m^2(f^{(r)},t)\,dt} : f\in L_2^r,\quad f\not\equiv \mathrm{const}\right\}$$
$$=\left\{2^m\int\limits_0^{nh}(1-\operatorname{sinc} t)^m dt\right\}^{-1/2}.$$

Введем обозначение $Si(\tau) := \int_0^\tau \operatorname{sinc} t\,dt$ — интегральный синус — и доопределим функцию $\Omega_m(t)$ в точке $t=0$, полагая $\Omega_m(f,0)=0$, где $f\in L_2$.

Следствие 2. *Пусть* $0<\tau\leqslant 3\pi/4$; $m,n\in\mathbb{N}$; $\beta(\tau) := (Si(\tau)-\sin\tau)/(\tau-\sin\tau)$; $\eta(p) := (1+mp/2)^{1/p}$. *Если при некотором фиксированном значении* $p\in(0,2]$ *для элемента* $f\in L_2^r$ $(r\in\mathbb{Z}_+)$ *функция* $\Omega_m^p(f^{(r)})$ *является выпуклой вверх на сегменте* $[0,3\pi/(4n)]$, *то величина наилучшего полиномиального приближения функции* f *удовлетворяет неравенству*

$$E_{n-1}(f)\leqslant\frac{\eta(p)}{n^r}\,(2(1-\operatorname{sinc}\tau))^{-m/2}\,\Omega_m(f^{(r)},\tau\beta(\tau)/n).$$

Если же функция $\Omega_m^p(f^{(r)})$ *при любом значении* p *из отрезка* $[p_*,p^*]\subset(0,2]$ *выпуклая вверх на сегменте* $[0,3\pi/(4n)]$, *то*

$$E_{n-1}(f)\leqslant\frac{\eta(p^*)}{n^r}\,(2(1-\operatorname{sinc}\tau))^{-m/2}\,\Omega_m(f^{(r)},\tau\beta(\tau)/n).$$

Доказательство. Используя следствие 1, для функции $f\in L_2^r$ запишем неравенство

$$E_{n-1}(f)\leqslant 2^{-m/2}n^r\left\{\frac{\int_0^h\Omega_m^p(f^{(r)},t)\varphi(t)\,dt}{\int_0^h(1-\operatorname{sinc} nt)^{mp/2}\varphi(t)\,dt}\right\}^{1/p}. \tag{19}$$

Обозначая $\sigma(t)=-\operatorname{sinc} nt$, где $0<t\leqslant 3\pi/(4n)$, и полагая $\varphi(t)=d\sigma(t)/dt$, получаем

$$\int\limits_0^h(1-\operatorname{sinc} nt)^{mp/2}\sigma'(t)\,dt=\int\limits_0^h(1-\operatorname{sinc} nt)^{mp/2}\,d(1-\operatorname{sinc} nt)$$
$$=\left(\frac{mp}{2}+1\right)^{-1}(1-\operatorname{sinc} nh)^{mp/2+1}.$$

Далее воспользуемся неравенством Иенсена, которое сформулируем в необходимом нам виде (см., например, [23, с. 288]):

Пусть $\mathfrak{L}$ — *непрерывная, выпуклая вверх функция, заданная на полуоси* $\mathbb{R}_+$. *Если функции* ψ *и* q *определены на отрезке* $[a,b]$ *и при этом* ψ *измерима и почти везде конечна,* q *неотрицательна,* q *и* $\psi\cdot q$ *суммируемы и* $\int_a^b q(t)dt > 0$, *то справедливо неравенство*

$$\frac{\int_a^b \mathfrak{L}(\psi(t))q(t)\,dt}{\int_a^b q(t)\,dt} \leqslant \mathfrak{L}\left(\frac{\int_a^b \psi(t)q(t)\,dt}{\int_a^b q(t)\,dt}\right).$$

Поскольку, по условию, $\Omega_m^p(f^{(r)})$ — выпуклая вверх на отрезке $[0, 3\pi/(4n)]$ функция, то, полагая в последней формуле $\mathfrak{L} = \Omega_m^p(f^{(r)})$, $q = \varphi,\ \psi = t,\ a = 0,\ b = h$, где $0 < h \leqslant 3\pi/(4n)$, получаем

$$\frac{\int_0^h \Omega_m^p(f^{(r)}, t)\varphi(t)\,dt}{\int_0^h \varphi(t)\,dt} \leqslant \Omega_m^p\left(f^{(r)}; \frac{\int_0^h t\varphi(t)\,dt}{\int_0^h \varphi(t)\,dt}\right).$$

Учитывая указанный выше вид функции $\varphi = \sigma'$, из данного неравенства имеем

$$\int\limits_0^h \Omega_m^p(f^{(r)}, t)\sigma'(t)\,dt \leqslant (1 - \operatorname{sinc} nh)\ \Omega_m^p\left(f^{(r)}; \frac{h(Si(nh) - \sin(nh))}{nh - \sin(nh)}\right).$$

Из последнего неравенства и соотношения (19), в которых полагаем $h = \tau/n$, следует оценка сверху величины наилучшего полиномиального приближения функции f, которая в силу введенных ранее обозначений запишется в виде

$$E_{n-1}(f) \leqslant \eta(p)\ n^{-r}(2(1 - \operatorname{sinc}\tau))^{-m/2}\ \Omega_m(f^{(r)}; \tau\beta(\tau)/n).$$

Пусть теперь функция $\Omega_m^p(f^{(r)})$ является выпуклой вверх при любом $p \in [p_*, p^*] \subset (0, 2]$. Поскольку в последнем неравенстве от p зависит лишь величина η, которая, как нетрудно убедиться, принимает минимальное значение при $p = p^*$, то при оценке величины $E_{n-1}(f)$ сверху вместо числового значения $\eta(p)$ используем $\eta(p^*)$. Следствие 2 доказано. □

Запишем значение величины $\mathcal{B}_{k,h,p}^{r,m}(\varphi)$ при $h = a/n$ $(0 < a \leqslant \pi)$ и $\varphi(t) = q(nt)$, т.е.

$$\mathcal{B}_{k,h,p}^{r,m}(\varphi) = 2^{m/2}\left\{k^{rp}\int\limits_0^{a/n}(1-\operatorname{sinc} kt)^{mp/2}q(nt)\,dt\right\}^{1/p}$$

$$= 2^{m/2}n^{r-1/p}\left\{\left(\frac{k}{n}\right)^{rp}\int\limits_0^{a}(1-\operatorname{sinc}(kt/n))^{mp/2}q(t)\,dt\right\}^{1/p}.$$

Отсюда получаем неравенство

$$\inf_{n\leqslant k<\infty}\mathcal{B}_{k,h,p}^{r,m}(\varphi) \geqslant 2^{m/2}n^{r-1/p}\inf_{x\geqslant 1}\left\{x^{rp}\int\limits_0^{a}(1-\operatorname{sinc} xt)^{mp/2}q(t)\,dt\right\}^{1/p}.$$

В силу теоремы 1 и рассуждений, подобных проведенным в работе [5, с. 788–789], получаем следующий результат.

Следствие 3. *Пусть* $m,n\in\mathbb{N}$; $r\in\mathbb{Z}_+$; $0<p\leqslant 2$; q — *неотрицательная, измеримая, суммируемая на отрезке* $[0,a]$ $(0<a\leqslant\pi)$ *функция, не эквивалентная нулю. Тогда справедливы неравенства*

$$\left\{\Phi_{m,r,p}(a,q,1)\right\}^{-1/p} \leqslant \sup_{\substack{f\in L_2^r\\ f\not\equiv const}}\frac{2^{m/2}n^rE_{n-1}(f)}{\left\{\int_0^a\Omega_m^p(f^{(r)},t/n)q(t)dt\right\}^{1/p}}$$

$$\leqslant\left\{\inf_{x\geqslant 1}\Phi_{m,r,p}(a,q,x)\right\}^{-1/p}, \quad (20)$$

где $\Phi_{m,r,p}(a,q,x) = x^{rp}\int_0^a(1-\operatorname{sinc} xt)^{mp/2}q(t)\,dt$. *При этом, если функция* q *такова, что* $\inf_{x\geqslant 1}\Phi_{m,r,p}(a,q,x) = \Phi_{m,r,p}(a,q,1)$, *то имеет место равенство*

$$\sup_{\substack{f\in L_2^r\\ f\not\equiv \mathrm{const}}}\frac{2^{m/2}n^rE_{n-1}(f)}{\left\{\int_0^a\Omega_m^p(f^{(r)},t/n)q(t)\,dt\right\}^{1/p}} = \left\{\Phi_{m,r,p}(a,q,1)\right\}^{-1/p}.$$

Следствие 4. *Пусть* $m,n\in\mathbb{N}$; $r\in\mathbb{Z}_+$; $0<p\leqslant 2$; *функция* $q(t)=t^{rp-1}q_1(t)$ — *неотрицательная, измеримая, суммируемая на* $[0,a]$, *где* $0<a\leqslant\pi$; q_1 — *невозрастающая, не эквивалентная нулю функция. Тогда имеет место равенство*

$$\inf_{x\geqslant 1}\Phi_{m,r,p}(a,t^{rp-1}q_1(t),x) = \Phi_{m,r,p}(a,t^{rp-1}q_1(t),1) \quad (21)$$

и справедлива формула

$$\sup_{\substack{f\in L_2^r\\ f\not\equiv \mathrm{const}}}\frac{2^{m/2}n^rE_{n-1}(f)}{\left\{\int_0^a\Omega_m^p(f^{(r)},t/n)t^{rp-1}q_1(t)dt\right\}^{\frac{1}{p}}} = \left\{\Phi_{m,r,p}(a,t^{rp-1}q_1(t),1)\right\}^{-\frac{1}{p}}.$$

$$(22)$$

Доказательство. Покажем справедливость соотношения (21), поскольку равенство (22) будет сразу получено при помощи формулы (20) из следствия 3.

Полагаем $q_2(t) = \{q_1(t),\ \text{если } 0 \leqslant t \leqslant a;\ q_1(a),\ \text{если } a \leqslant t < \infty\}$. При всех $x \geqslant 1$ имеем

$$\Phi_{m,r,p}(a, t^{rp-1}q_1(t), x) = x^{rp}\int\limits_0^a (1-\operatorname{sinc} xt)^{mp/2} t^{rp-1} q_1(t)\,dt$$

$$= \int\limits_0^{ax} (1-\operatorname{sinc} t)^{mp/2} t^{rp-1} q_2(t/x)\,dt \geqslant \int\limits_0^{ax} (1-\operatorname{sinc} t)^{mp/2} t^{rp-1} q_2(t)\,dt$$

$$\geqslant \int\limits_0^{a} (1-\operatorname{sinc} t)^{mp/2} t^{rp-1} q_1(t)\,dt = \Phi_{m,r,p}(a, t^{rp-1}q_1(t), 1),$$

т.е. формула (21) имеет место. Следствие 4 доказано. □

Возвращаясь снова к выражению $\mathcal{B}^{r,m}_{k,h,p}(\varphi)$, введенному в формулировке теоремы 1, выясним, какими дифференциальными свойствами должна обладать функция φ, чтобы выполнялось равенство

$$\inf_{n\leqslant k<\infty} \mathcal{B}^{r,m}_{k,h,p}(\varphi) = \mathcal{B}^{r,m}_{n,h,p}(\varphi). \tag{23}$$

Лемма 1. *Пусть функция φ является неотрицательной на отрезке $[0,h]$ и дифференцируемой на интервале $(0,h)$ $(0 < h \leqslant \pi/n)$. Если при некоторых $r \in \mathbb{N}$; $1/r \leqslant p \leqslant 2$ и любых $t \in (0,h)$ выполнено неравенство*

$$(rp-1)\varphi(t) - t\varphi'(t) \geqslant 0, \tag{24}$$

то справедливо соотношение (23).

Доказательство. Учитывая вид выражения $\mathcal{B}^{r,m}_{k,h,p}(\varphi)$ и условия леммы 1, для установления справедливости формулы (23) достаточно доказать, что функция

$$y(x) := x^{rp}\int\limits_0^h (1-\operatorname{sinc} xt)^{mp/2}\varphi(t)\,dt \tag{25}$$

будет неубывающей при $1 \leqslant x < \infty$. Для этого покажем, что на множестве $1 \leqslant x < \infty$ её первая производная y' является неотрицательной, откуда будет следовать равенство $\inf\{y(x) : 1 \leqslant x < \infty\} = y(1)$. Дифференцируя функцию (25), получаем

$$y'(x) = rp\ x^{rp-1}\int\limits_0^h (1-\operatorname{sinc} xt)^{mp/2}\varphi(t)\,dt$$
$$+\, x^{rp}\int\limits_0^h \frac{\partial}{\partial x}(1-\operatorname{sinc} xt)^{mp/2}\varphi(t)\,dt. \quad (26)$$

Непосредственным подсчетом можно убедиться в справедливости равенства

$$\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial x}(1-\operatorname{sinc} xt)^{mp/2} = \frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial t}(1-\operatorname{sinc} xt)^{mp/2}. \quad (27)$$

Используя формулу (27), из равенства (26) имеем

$$y'(x) = x^{rp-1}\Bigg\{rp\int\limits_0^h (1-\operatorname{sinc} xt)^{mp/2}\varphi(t)\,dt$$
$$+\int\limits_0^h t\varphi(t)\frac{\partial}{\partial t}(1-\operatorname{sinc} xt)^{mp/2}dt\Bigg\}. \quad (28)$$

Выполнив интегрирование по частям во втором интеграле, расположенном в правой части равенства (28), и учитывая неравенство (24), получаем

$$y'(x) = x^{rp-1}\Bigg\{(1-\operatorname{sinc} xh)^{mp/2}h\varphi(h)$$
$$+\int\limits_0^h (1-\operatorname{sinc} xt)^{mp/2}\Big((rp-1)\varphi(t)-t\varphi'(t)\Big)dt\Bigg\} \geqslant 0.$$

Лемма доказана. $\square$

Следствие 5. *Пусть $r\in\mathbb{N}$; $1/r\leqslant p\leqslant 2$; $0\leqslant\gamma\leqslant rp-1$; $0<\beta\leqslant\pi$; $\varphi_*(t)=\sin^\gamma(\beta t/h)$, где $0<t\leqslant h\leqslant\pi/n$. Тогда для любых $m,n\in\mathbb{N}$ справедливо равенство*

$$\mathcal{K}_{m,n,r,p,1/p}(\varphi_*,h) = 2^{-m/2}n^{-r}\Bigg\{\int\limits_0^h (1-\operatorname{sinc} nt)^{mp/2}\sin^\gamma(\beta t/h)\,dt\Bigg\}^{-1/p}. \quad (29)$$

Действительно, нетрудно показать, что при $0<x\leqslant\pi$ имеет место неравенство

$$\operatorname{sinc} x - \cos x \geqslant 0. \quad (30)$$

Далее проверим выполнение условия (24) для функции φ_*, полагая

$$\xi(t) := (rp-1)\varphi_*(t) - t\varphi_*'(t)$$
$$= (\beta t/h)\sin^{\gamma-1}(\beta t/h)\Big((rp-1)\mathrm{sinc}\,(\beta t/h) - \gamma\cos(\beta t/h)\Big). \quad (31)$$

В силу неравенства (30) имеем

$$\mathrm{sinc}\,(\beta t/h) - \cos(\beta t/h) \geqslant 0. \quad (32)$$

Поскольку $rp-1 \geqslant \gamma$, то с учетом неравенства (32) выражение в круглых скобках в правой части формулы (31) будет неотрицательным. Следовательно, $\xi(t) \geqslant 0$ для любых $t \in (0,h)$, а это, в силу леммы 1, означает справедливость формулы (29).

5. Пусть $\mathfrak{M}$ — выпуклое центрально-симметричное подмножество из L_2. Символами $b_n(\mathfrak{M}, L_2)$, $d^n(\mathfrak{M}, L_2)$, $d_n(\mathfrak{M}, L_2)$, $\delta_n(\mathfrak{M}, L_2)$, $\Pi_n(\mathfrak{M}, L_2)$ обозначим соответственно бернштейновский, гельфандовский, колмогоровский, линейный и проекционный n-поперечники $\mathfrak{M}$ в пространстве L_2 (см., например, [21]). Между этими n-поперечниками в L_2 выполняются следующие соотношения

$$b_n(\mathfrak{M}, L_2) \leqslant d^n(\mathfrak{M}, L_2) \leqslant d_n(\mathfrak{M}, L_2) = \delta_n(\mathfrak{M}, L_2) = \Pi_n(\mathfrak{M}, L_2). \quad (33)$$

Пусть $\Phi(t)(t \geqslant 0)$ — произвольная непрерывная возрастающая функция такая, что $\Phi(0) = 0$. Через $W^r_{m,p}(\Phi)$ $(m, r \in \mathbb{N};\ 0 < p \leqslant 2)$ обозначим класс функций $f \in L_2^r$, для которых при всех $0 < t \leqslant 2\pi$ выполнено неравенство

$$\int_0^t \Omega_m^p(f^{(r)}, \tau)\, d\tau \leqslant \Phi^p(t). \quad (34)$$

Следуя работам [13–15], обозначим через t_* величину аргумента $t \in (0,\infty)$ функции $\mathrm{sinc}\, t$, при котором она достигает своего наименьшего значения. Очевидно, что t_* есть наименьший из положительных корней уравнения $t - \mathrm{tg}\, t = 0$ $(4,49 < t_* < 4,51)$. При этом полагаем $(1-\mathrm{sinc}\, t)_* = \{1-\mathrm{sinc}\, t,\ \text{если}\ 0 < t \leqslant t_*;\ 1-\mathrm{sinc}\, t_*,\ \text{если}\ t \geqslant t_*\}$. Также обозначим $E_{n-1}(W^r_{m,p}) = \sup\{E_{n-1}(f) : f \in W^r_{m,p}(\Phi)\}$.

Теорема 2. *Пусть $n, m, r \in \mathbb{N}$; $1/r \leqslant p \leqslant 2$. Если для всех $0 < t \leqslant 2\pi$ мажоранта Φ удовлетворяет условию*

$$\frac{\Phi^p(t)}{\Phi^p(\pi/n)} \geqslant \frac{\int_0^t (1-\mathrm{sinc}\, n\tau)_*^{mp/2} d\tau}{\int_0^{\pi/n} (1-\mathrm{sinc}\, n\tau)^{mp/2}\, d\tau}, \quad (35)$$

то справедливы равенства

$$\lambda_{2n}(W^r_{m,p}(\Phi), L_2) = \lambda_{2n-1}(W^r_{m,p}(\Phi), L_2) = E_{n-1}(W^r_{m,p}(\Phi))$$
$$= 2^{-m/2} n^{-r} \left\{ \int\limits_0^{\pi/n} (1 - \operatorname{sinc} nt)^{mp/2} dt \right\}^{-1/p} \Phi\Big(\frac{\pi}{n}\Big), \quad (36)$$

где λ_n *— любой из перечисленных выше* n*-поперечников —* b_n, d^n, d_n, δ_n *или* Π_n*. При этом множество мажорант, удовлетворяющих условию* (35)*, не пусто.*

Доказательство. Из формулы (29), в которой полагаем $\gamma = 0$ и $h = \pi/n$, и соотношения (33) получаем оценки сверху

$$\lambda_{2n}(W^r_{m,p}(\Phi), L_2) \leqslant \lambda_{2n-1}(W^r_{m,p}(\Phi), L_2) \leqslant d_{2n-1}(W^r_{m,p}(\Phi), L_2)$$
$$\leqslant E_{n-1}(W^r_{m,p}(\Phi)) \leqslant 2^{-m/2} n^{-r} \left\{ \int\limits_0^{\pi/n} (1 - \operatorname{sinc} nt)^{mp/2} dt \right\}^{-1/p} \Phi\Big(\frac{\pi}{n}\Big). \quad (37)$$

Для получения оценок снизу рассмотрим шар $\mathbb{B}_{2n+1}$ в подпространстве $\mathcal{T}_n$ тригонометрических полиномов порядка n, т.е.

$$\mathbb{B}_{2n+1} := \left\{ T_n \in \mathcal{T}_n : \|T_n\| = 2^{-m/2} n^{-r} \left(\int\limits_0^{\pi/n} (1 - \operatorname{sinc} nt)^{mp/2} dt \right)^{-\frac{1}{p}} \Phi\Big(\frac{\pi}{n}\Big) \right\}$$

и покажем справедливость включения $\mathbb{B}_{2n+1} \subset W^r_{m,p}(\Phi)$. Для произвольного полинома

$$T_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \rho_k \cos(kx + \gamma_k)$$

имеем

$$\Omega_m^2(T_n^{(r)}, \tau) = 2^m \sum_{k=1}^{n} k^{2r} \rho_k^2 (1 - \operatorname{sinc} k\tau)^m. \quad (38)$$

Учитывая, что неравенство $(1 - \operatorname{sinc} k\tau)^m \leqslant (1 - \operatorname{sinc} n\tau)_*^m$ справедливо для любых $0 \leqslant \tau < \infty$ и $k \leqslant n$ ($k \in \mathbb{N}$), из (38) получаем

$$\Omega_m(T_n^{(r)}, \tau) \leqslant 2^{m/2}\ n^r (1 - \operatorname{sinc} n\tau)_*^{m/2} \|T_n\|. \quad (39)$$

Возведя обе части неравенства (39) в степень p, где $1/r \leqslant p \leqslant 2$, и проинтегрировав их по переменной τ в пределах от 0 до t $(0 < t \leqslant 2\pi)$, имеем

$$\int\limits_0^t \Omega_m^p(T_n^{(r)}, \tau)d\tau \leqslant \|T_n\|^p\ 2^{m/2}\ n^{rp} \int\limits_0^t (1 - \operatorname{sinc} n\tau)_*^{mp/2} d\tau. \qquad (40)$$

Учитывая условие (35), для любого полинома $T_n \in \mathbb{B}_{2n+1}$ из неравенства (40) получаем

$$\int\limits_0^t \Omega_m^p(T_n^{(r)}, \tau)d\tau \leqslant \frac{\Phi^p(\pi/n)\int_0^t (1 - \operatorname{sinc} n\tau)_*^{mp/2} d\tau}{\int_0^t (1 - \operatorname{sinc} n\tau)^{mp/2} d\tau} \leqslant \Phi^p(t).$$

Отсюда, в силу неравенства (34), следует включение $\mathbb{B}_{2n+1} \subset W_{m,p}^r(\Phi)$. Следовательно,

$$\lambda_{2n}(W_{m,p}^r(\Phi), L_2) \geqslant b_{2n}(W_{m,p}^r(\Phi), L_2) \geqslant b_{2n}(\mathbb{B}_{2n+1}, L_2)$$
$$\geqslant 2^{-m/2}\ n^{-r} \left\{ \int\limits_0^{\pi/n} (1 - \operatorname{sinc} nt)^{mp/2} dt \right\}^{-1/p} \Phi\Big(\frac{\pi}{n}\Big). \qquad (41)$$

Сопоставляя соотношения (37) и (41), получаем требуемые равенства (36).

Покажем, что функция $\Phi_*(t) = t^{\alpha/p}$, где

$$\alpha = \pi \Big/ \int\limits_0^\pi (1 - \operatorname{sinc} \tau)^{mp/2} d\tau, \qquad (42)$$

удовлетворяет условию (35) при любом $n \in \mathbb{N}$. Для дальнейших рассуждений нам понадобятся оценки величины α как сверху так и снизу. Из геометрических соображений очевидно, что $\operatorname{sinc} \tau > 1 - \tau/\pi$ для любого $\tau \in (0, \pi)$. Тогда из соотношения (42) имеем

$$\alpha > \pi \Big/ \int\limits_0^\pi (\tau/\pi)^{mp/2} d\tau = mp/2 + 1. \qquad (43)$$

Для получения оценки сверху величины α воспользуемся неравенством $1 - \operatorname{sinc} \tau > (\tau/\pi)^2$, где $\tau \in (0, \pi)$. Из соотношения (42) получаем

$$\alpha < \pi \Big/ \int\limits_0^\pi (\tau/\pi)^{mp} d\tau = mp + 1. \qquad (44)$$

Условие (35), которое требуется доказать для функции Φ_*, примет следующий вид:

$$\left(\frac{tn}{\pi}\right)^{\alpha} \geqslant \frac{\int_0^t (1-\operatorname{sinc} n\tau)_*^{mp/2} d\tau}{\int_0^{\pi/n} (1-\operatorname{sinc} n\tau)^{mp/2} d\tau}. \tag{45}$$

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$F(t) := \left(\frac{tn}{\pi}\right)^{\alpha} - \frac{\int_0^t (1-\operatorname{sinc} n\tau)_*^{mp/2} d\tau}{\int_0^{\pi/n} (1-\operatorname{sinc} n\tau)^{mp/2} d\tau},$$

которую, используя формулу (42), перепишем в следующем виде

$$F(t) = \left(\frac{tn}{\pi}\right)^{\alpha} - \frac{\alpha n}{\pi} \int\limits_0^t (1-\operatorname{sinc} n\tau)_*^{mp/2} d\tau \tag{46}$$

и покажем, что $F(t) \geqslant 0$ при любом $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$. Это будет равносильно выполнению неравенства (45). Рассуждения проведем для трех случаев: а) $0 \leqslant t \leqslant \pi/n$; б) $\pi/n \leqslant t \leqslant t_*/n$; в) $t_*/n \leqslant t \leqslant 2\pi$.

Рассмотрим случай а). Воспользовавшись формулой (46) и неравенством $\sin\tau \geqslant \tau - \tau^3/6$ $(\tau \geqslant 0)$, получаем

$$\begin{aligned} F(t) &\geqslant \left(\frac{tn}{\pi}\right)^{\alpha} - \frac{\alpha n}{\pi} \int\limits_0^t \left(\frac{n\tau}{6}\right)^{mp} d\tau \\ &= \left(\frac{tn}{\pi}\right)^{\alpha} \left(1 - \frac{\alpha \pi^{\alpha-1} n^{mp+1-\alpha}}{(mp+1)\sqrt{6^{mp}}}\ t^{mp+1-\alpha}\right). \end{aligned} \tag{47}$$

Из неравенств (44) и (47) следует, что при $t \to 0+0$ функция F принимает положительные значения. Покажем, что F является знакопостоянной функцией на интервале $(0, \pi/n)$. Для этого применим метод рассуждений от противного, полагая, что существует точка $\xi \in (0, \pi/n)$, при переходе аргумента t через которую F меняет свой знак.

Поскольку, как следует из формул (32) и (46), $F(0) = F(\pi/n) = 0$, то в силу теоремы Ролля производная первого порядка

$$F^{(1)}(t) = \frac{\alpha n}{\pi} \left(\left(\frac{tn}{\pi}\right)^{\alpha-1} - (1-\operatorname{sinc} nt)^{mp/2} \right) \tag{48}$$

должна иметь на интервале $(0, \pi/n)$ не менее двух различных нулей. Из формулы (48) следует, что такое же количество различных нулей на $(0,\pi/n)$ и в тех же точках будет иметь и функция

$$G(t) := \left(\frac{tn}{\pi}\right)^{2(\alpha-1)/(mp)} - 1 + \operatorname{sinc} nt. \tag{49}$$

В силу первого замечательного предела, для функции $g(t) = \operatorname{sinc} t$ полагаем $g(0) = 1$. С учетом этого из соотношения (49) имеем $G(0) = G(\pi/n) = 0$. Следовательно, функция G имеет на отрезке $[0,\pi/n]$ не менее четырех различных нулей. Поскольку функцию (49) можно представить в виде

$$G(t) = \frac{1}{nt}\, G_1(t),$$

где

$$G_1(t) := \left(\frac{1}{\pi}\right)^{2(\alpha-1)/(mp)} (tn)^{2(\alpha-1)/(mp)+1} - nt + \sin nt, \tag{50}$$

то из выше сказанного вытекает, что G_1 также должна иметь на $[0,\pi/n]$ не менее четырех различных нулей. Из теоремы Ролля следует, что производная первого порядка

$$G_1^{(1)}(t) = \left(\frac{1}{\pi}\right)^{2(\alpha-1)/(mp)} n^{2(\alpha-1)/(mp)+1} \times \left(\frac{2(\alpha-1)}{mp}+1\right) t^{2(\alpha-1)/(mp)} + n(\cos nt - 1) \tag{51}$$

обязана обращаться в ноль на интервале $(0,\pi/n)$ не менее чем в трех различных точках. Поскольку $G_1^{(1)}(0) = 0$, то на основании аналогичных соображений функция

$$G_1^{(2)}(t) = \left(\frac{1}{\pi}\right)^{2(\alpha-1)/(mp)} n^{2(\alpha-1)/(mp)+1} \times \left(\frac{2(\alpha-1)}{mp}+1\right) \frac{2(\alpha-1)}{mp}\, t^{2(\alpha-1)/(mp)-1} - n^2 \sin nt \tag{52}$$

должна иметь на $(0,\pi/n)$ не менее трех различных нулей. В силу неравенства (43) из (52) получаем $G_1^{(2)}(0) = 0$, что будет означать наличие не менее чем трех различных нулей на интервале $(0,\pi/n)$ у функции

$$G_1^{(3)}(t) = \left(\frac{1}{\pi}\right)^{2(\alpha-1)/(mp)} n^{2(\alpha-1)/(mp)+1} \left(\frac{2(\alpha-1)}{mp}+1\right) \frac{2(\alpha-1)}{mp} \times \left(\frac{2(\alpha-1)}{mp}-1\right) t^{2(\alpha-1)/(mp)-2} - n^3 \cos nt.$$

Из неравенства (44) и последней формулы следует, что $G_1^{(3)}$ является разностью положительной выпуклой вниз монотонно убывающей степенной функции и монотонно убывающей тригонометрической функции, меняющей при переходе через точку $\pi/(2n)$ знак с плюса на минус и направление выпуклости с выпуклости вверх на выпуклость вниз. Следовательно, функция $G_1^{(3)}$ может иметь не более двух различных нулей на интервале $(0, \pi/n)$. Полученное противоречие доказывает справедливость неравенства (45) при $0 \leqslant t \leqslant \pi/n$.

Рассмотрим теперь случай б). Рассуждая от противного, докажем, что функция (46) принимает на полусегменте $(\pi/n, t_*/n]$ положительные значения. Пусть существует некоторая точка $\eta \in (\pi/n, t_*/n]$, при переходе через которую аргумента t функция F меняет свой знак. Поскольку $F(\pi/n) = 0$, то на основании теоремы Ролля функция $F^{(1)}$, а значит и функция G_1, определяемая формулой (50), имеет на множестве $(\pi/n, t_*/n)$ не менее одного нуля. Поскольку $G_1(\pi/n) = 0$, то на основании аналогичных соображений производная первого порядка $G_1^{(1)}$ должна иметь на интервале $(\pi/n, t_*/n)$ также не менее одного нуля. Согласно формуле (51) и неравенству (43) производная $G_1^{(1)}$ является суммой двух монотонно возрастающих выпуклых вниз функций, первая из которых принимает положительные значения, а вторая — отрицательные значения. Из сказанного следует, что

$$\min\{G_1^{(1)}(t) : \pi/n \leqslant t \leqslant t_*/n\} = G_1^{(1)}(\pi/n). \tag{53}$$

Из соотношений (51) и (43) имеем

$$G_1^{(1)}(\pi/n) = n\left(\frac{2(\alpha-1)}{mp} - 1\right) > 0.$$

Следовательно, согласно формуле (53) $G_1^{(1)}(t) > 0$ для любого $t \in (\pi/n, t_*/n)$. Противоречие, полученное в связи с тем, что функция $G_1^{(1)}$ должна была иметь по крайней мере один ноль в указанном интервале, доказывает справедливость неравенства (45) и в случае б).

Рассмотрим далее случай в). При $t_*/n \leqslant t \leqslant 2\pi$ функция (46) примет следующий вид:

$$F(t) = \left(\frac{tn}{\pi}\right)^{\alpha} - 1 - \frac{\alpha n}{\pi}\int\limits_{\pi/n}^{t_*/n}(1-\operatorname{sinc} n\tau)^{mp/2}d\tau \\ - \frac{\alpha n}{\pi}(1-\operatorname{sinc} t_*)^{mp/2}\left(t - \frac{t_*}{n}\right).$$

Отсюда имеем

$$F^{(1)}(t) = \frac{\alpha n}{\pi}\left(\left(\frac{nt}{\pi}\right)^{\alpha-1} - (1-\operatorname{sinc} t_*)^{mp/2}\right). \tag{54}$$

В силу неравенства (43) функция (54) является монотонно возрастающей и

$$\min\{F^{(1)}(t) : t_*/n \leqslant t \leqslant 2\pi\} = F^{(1)}(t_*/n). \tag{55}$$

Поскольку при $\pi \leqslant t \leqslant 2\pi$ справедливо неравенство $\sin t \geqslant t(1-t/\pi)$, т.е. $\operatorname{sinc} t \geqslant 1 - t/\pi$, то с его помощью и на основании формулы (43) получаем

$$F^{(1)}\left(\frac{t_*}{n}\right) = \frac{\alpha n}{\pi}\left(\left(\frac{t_*}{\pi}\right)^{\alpha-1} - (1-\operatorname{sinc} t_*)^{mp/2}\right)$$
$$> \frac{\alpha n}{\pi}\left(\left(\frac{t_*}{\pi}\right)^{mp/2} - (1-\operatorname{sinc} t_*)^{mp/2}\right) \geqslant 0.$$

С учетом соотношения (55) это означает, что на отрезке $[t_*/n, 2\pi]$ функция F является монотонно возрастающей. Поскольку, как следует из случая б), $F(t_*/n) > 0$, то на рассматриваемом точечном множестве функция F будет положительной, что означает выполнение неравенства (45) и при $t_*/n \leqslant t \leqslant 2\pi$. Теорема 2 доказана. $\square$

6. Из доказанной теоремы 2 вытекают такие следствия и утверждение.

Следствие 6. *Для любых чисел $n, m, r \in \mathbb{N}$; $1/r \leqslant p \leqslant 2$ имеют место следующие равенства*

$$\lambda_{2n}(W^r_{m,p}(\Phi_*), L_2) = \lambda_{2n-1}(W^r_{m,p}(\Phi_*), L_2) = E_{n-1}(W^r_{m,p}(\Phi_*))$$
$$= 2^{-m/2}\,\pi^{\alpha/p}\,n^{-r-\alpha/p}\left\{\int\limits_0^{\pi/n}(1-\operatorname{sinc} nt)^{mp/2}dt\right\}^{-1/p},$$

где мажоранта Φ_* была введена в ходе доказательства теоремы 2.

Вопросы вычисления точных верхних граней модулей коэффициентов Фурье на различных классах функций действительного переменного в разное время рассматривались, например, А. В. Ефимовым, А. Ф. Тиманом, Н. П. Корнейчуком, В. И. Бердышевым, С. Милорадовичем, С. А. Теляковским, А. И. Степанцом и многими другими (см., например, [24–27]). Следующее утверждение продолжает указанную тематику.

Утверждение 1. *Пусть выполнены все условия теоремы 2. Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$ справедливы следующие равенства*

$$\sup\{|a_n(f)| : f \in W^r_{m,p}(\Phi)\} = \sup\{|b_n(f)| : f \in W^r_{m,p}(\Phi)\}$$
$$= 2^{-m/2}\, n^{-r} \left\{ \int\limits_0^{\pi/n} (1 - \operatorname{sinc} nt)^{mp/2} dt \right\}^{-1/p} \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right),$$

где a_n и b_n есть косинус и синус-коэффициенты Фурье функции f соответственно.

Доказательство. Не уменьшая общности, проведем рассуждения для коэффициентов Фурье $b_n(f)$. Поскольку

$$b_n(f) = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(t) \sin nt\, dt = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} (f(t) - S_{n-1}(f,t)) \sin nt\, dt,$$

то используя неравенство Коши–Буняковского, а также соотношения (2) и (36), получаем

$$\sup\{|b_n(f)| : f \in W^r_{m,p}(\Phi)\} \leqslant E_{n-1}(W^r_{m,p}(\Phi))$$
$$\leqslant 2^{-m/2}\, n^{-r} \left\{ \int\limits_0^{\pi/n} (1 - \operatorname{sinc} nt)^{mp/2} dt \right\}^{-1/p} \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right). \quad (56)$$

Для нахождения оценки снизу рассмотрим функцию

$$\widetilde{f}(t) := 2^{-m/2}\, n^{-r} \left\{ \int\limits_0^{\pi/n} (1 - \operatorname{sinc} nt)^{mp/2} dt \right\}^{-1/p} \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right) \sin nt.$$

Очевидно, что функция $\widetilde{f}$ принадлежит шару $\mathbb{B}_{2n+1}$, введенному в ходе доказательства теоремы 2. Поскольку $\widetilde{f} \subset W^r_{m,p}(\Phi)$, то

$$\sup\{|b_n(f)| : f \in W^r_{m,p}(\Phi)\} \geqslant |b_n(\widetilde{f})|$$
$$= 2^{-m/2}\, n^{-r} \left\{ \int\limits_0^{\pi/n} (1 - \operatorname{sinc} nt)^{mp/2} dt \right\}^{-1/p} \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right). \quad (57)$$

Сравнивая оценку сверху (56) с оценкой снизу (57), получаем требуемое равенство

$$\sup\{|b_n(f)| : f \in W^r_{m,p}(\Phi)\}$$
$$= 2^{-m/2}\ n^{-r}\left\{\int\limits_0^{\pi/n}(1-\operatorname{sinc} nt)^{mp/2}dt\right\}^{-1/p}\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right),$$

чем и завершаем доказательство утверждения. □

Следствие 7. *Пусть выполнены все условия теоремы* 2. *Тогда для произвольного* $n \in \mathbb{N}$ *справедливы равенства*

$$\sup\{|a_n(f)| : f \in W^r_{m,p}(\Phi_*)\} = \sup\{|b_n(f)| : f \in W^r_{m,p}(\Phi_*)\}$$
$$= 2^{-m/2}\ \pi^{\alpha/p}\ n^{-r-\alpha/p}\left\{\int\limits_0^{\pi/n}(1-\operatorname{sinc} nt)^{mp/2}dt\right\}^{-1/p}.$$

Благодарности. В заключение авторы выражают благодарность Р. М. Тригубу за ряд ценных замечаний, связанных со статьей.

Литература

[1] Н. И. Черных, *О наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами в* L_2 // Матем. заметки, **2** (1967), No. 2, 513–522.

[2] Н. И. Черных, *О неравенстве Джексона в* L_2 // Труды матем. ин-та АН СССР, **88** (1967), 71–74.

[3] Л. В. Тайков, *Неравенства, содержащие наилучшие приближения и модуль непрерывных функций из* L_2 // Матем. заметки, **20** (1976), No. 3, 433–438.

[4] Л. В. Тайков, *Структурные и конструктивные характеристики функций из* L_2 // Матем. заметки, **25** (1979), No. 2, 217–223.

[5] А. А. Лигун, *Некоторые неравенства между наилучшими приближениями и модулями непрерывности в пространстве* L_2 // Матем. заметки, **24** (1978), No. 6, 785–792.

[6] А. А. Лигун, *Точные неравенства типа Джексона для периодических функций в пространстве* L_2 // Матем. заметки, **43** (1988), No. 6, 757–769.

[7] В. А. Юдин, *Диофантовы приближения в экстремальных задачах* // Доклады АН СССР, **251** (1980), No. 1, 54–57.

[8] В. И. Иванов, О. И. Смирнов, *Константы Джексона и константы Юнга в пространствах* L_p, Тульский ун-т : Тула, 1995.

[9] А. Г. Бабенко, *О точной константе в неравенстве Джексона в* L_2 // Матем. заметки, **39** (1986), No. 5, 651–664.

[10] М. Г. Есмаганбетов, *Поперечники классов из* $L_2[0, 2\pi]$ *и минимизация точных констант в неравенствах типа Джексона* // Матем. заметки, **66** (1999), No. 6, 816–820.

[11] С. Б. Вакарчук, *Неравенства типа Джексона и поперечники классов функций в* L_2 // Матем. заметки, **80** (2006), No. 1, 11–19.

[12] М. Ш. Шабозов, Г. А. Юсупов, *Некоторые неравенства между наилучшими приближениями и модулями непрерывности в пространстве L_2 и их применение* // Изв. АН Респ. Тадж., отдел. физ.-мат., хим., геолог. и техн. наук, (2008), No. 4, 7–19.

[13] С. Б. Вакарчук, *Точные константы в неравенствах типа Джексона и точные значения поперечников функциональных класов из L_2* Матем. заметки, **78** (2005), No. 5, 792–796.

[14] S. B. Vakarchuk, V. I. Zabutna, *Widths of functional classes from L_2 and exact constants in Jackson type inequalities* // East J. Approxim., **14** (2008), No. 4, 411–421.

[15] М. Ш. Шабозов, С. Б. Вакарчук, В. И. Забутная, *Точные неравенства типа Джексона–Стечкина для периодических функций в L_2 и значения поперечников классов функций* // Доклады АН Российской Федерации, **451** (2013), No. 6, 625–628.

[16] К. В. Руновский, *О приближении семействами линейных полиномиальных операторов в пространствах L_p, $0 < p < 1$* // Матем. сборник, **185** (1984), No. 8, 81–102.

[17] К. В. Руновский, *Об одной оценке для интегрального модуля гладкости* // Изв. вузов. Матем. (1992), No. 1, 78–80.

[18] Э. А. Стороженко, В. Г. Кротов, П. Освальд, *Прямые и обратные теоермы типа Джексона в пространствах L_p, $0 < p < 1$* // Матем. сборник, **98** (1975), No. 140, 395–415.

[19] Р. М. Тригуб, *Линейные методы суммирования и абсолютная сходимость рядов Фурье* // Изв. АН СССР. Сер. матем., **32** (1968), No. 1, 24–49.

[20] R. M. Trigub, E. S. Bellinsky, *Fourier Analysis and Approximation of Functions*, Dordrecht Boston London: Kluwer Academic Publishers, 2004.

[21] A. Pinkus, *n-Widths in Approximation Theory*, Berlin Heidelbegr New York Tokyo: Springer-Verlag, 1985.

[22] В. Д. Рыбасенко, И. Д. Рыбасенко, *Элементарные функции. Формулы, таблицы, графики*, М.: Наука, 1987.

[23] И. П. Натансон, *Теория функций вещественной переменной*, 3 изд. М.: Наука, 1974.

[24] А. Ф. Тиман, *Теория приближения функций действительного переменного*, М.: Гостехиздат, 1960.

[25] С. Милорадович, *О коэффициентах Фурье класса $W^r H(\delta_0)_L$* // Publication de L'institut Mathematique, **28** (1980), 129–134.

[26] А. И. Степанец, *Точные оценки коэффициентов Фурье на классах непрерывных и дифференцируемых периодических функций многих переменных* // Доклады АН СССР, **261** (1981), No. 1, 34–38.

[27] С. Б. Вакарчук, *О неравенствах типа Джексона в $L_2[-1,1]$ и точных значениях n-поперечников функциональных классов* // Укр. матем. вісник, **3** (2006), No. 1, 102–119.

Сведения об авторах

Сергей Борисович Вакарчук
Университет им. Альфреда Нобеля
Днепропетровск
ул. Набережная Ленина, 18
Украина
E-Mail: `sbvakarchuk@mail.ru`

Мирганд Шабозович Шабозов
Институт математики АН
Республики Таджикистан
ул. Айни, 299/1
Душанбе 734063
Таджикистан
E-Mail: `shabozov@mail.ru`

Валентина Ивановна Забутная
Днепропетровский национальный
университет им. О. Гончара
Днепропетровск
Украина
E-Mail: `zabutna@mail.ru`