Український математичний вісник
Том 11 **(2014)**, № 3, 312 – 339

О начально-краевой задаче в полуполосе для обобщенного уравнения Кавахары

Мария А. Опритова, Андрей В. Фаминский

(*Представлена А. Е. Шишковым*)

Аннотация. Рассматривается начально-краевая задача в полуполосе для обобщенного уравнения Кавахары. В случае нерегулярной начальной функции устанавливаются результаты о повышении внутренней гладкости слабых решений в зависимости от скорости убывания начальной функции на бесконечности. Эти результаты используются для доказательства убывания решений при больших временах.

2010 MSC. 35Q53, 35B40.

Ключевые слова и фразы. Уравнение Кавахары, начально-краевая задача, внутренняя регулярность решений, убывание при больших временах.

1. Введение

В настоящей работе рассматривается начально-краевая задача для обобщенного уравнения Кавахары

$$u_t - \partial_x^5 u + b\partial_x^3 u + uu_x + g_1(t,x)u_x + g_0(t,x)u = f(t,x) \tag{1.1}$$

при $t \geq 0$, $x \geq 0$ с граничными условиями

$$u\big|_{t=0} = u_0(x), \qquad u\big|_{x=0} = \mu(t), \quad u_x\big|_{x=0} = \nu(t) \tag{1.2}$$

(b — вещественная константа). Уравнение Кавахары

$$u_t - \partial_x^5 u + b\partial_x^3 u + au_x + uu_x = 0 \tag{1.3}$$

Статья поступила в редакцию 26.02.2014
Работа выполнена в рамках Проекта 333 государственного задания Минобрнауки РФ в сфере научной деятельности

ISSN 1810 – 3200.

описывает распространение длинных нелинейных волн в средах со слабой дисперсией (см., например, [1–3]) и является модификацией уравнения Кортевега–де Фриза

$$u_t + u_{xxx} + au_x + uu_x = 0 \tag{1.4}$$

на случай дисперсионного соотношения более высокого порядка.

Переход от уравнения (1.3) к уравнению (1.1) позволяет учесть дополнительные эффекты, в частности, связанные с неоднородностью среды. Другой причиной рассмотрения именно уравнения (1.1) является его инвариантность относительно замены

$$\widetilde{u}(t,x) \equiv u(t,x) - \psi(t,x) \tag{1.5}$$

для некоторой заданной функции ψ. Действительно для функции $\widetilde{u}$ уравнение (1.1) переходит в уравнение

$$\widetilde{u}_t - \partial_x^5\widetilde{u} + b\partial_x^3\widetilde{u} + \widetilde{u}\widetilde{u}_x + \widetilde{g}_1(t,x)\widetilde{u}_x + \widetilde{g}_0(t,x)\widetilde{u} = \widetilde{f}(t,x), \tag{1.6}$$

где

$$\begin{gathered} \widetilde{g}_1 \equiv g_1 + \psi, \quad \widetilde{g}_0 \equiv g_0 + \psi_x, \\ \widetilde{f} \equiv f - \psi_t + \partial_x^5\psi - b\partial_x^3\psi - \psi\psi_x - g_1\psi_x - g_0\psi. \end{gathered} \tag{1.7}$$

В свою очередь, преобразование (1.5) является вполне естественным и широко используется, например, для обнуления краевых условий.

С точки зрения вопросов разрешимости и корректности для уравнения Кавахары наиболее изученной является задача Коши (см., например, [4–9]). Для начально-краевой задачи при $x \geq 0$ с граничными условиями (1.2) подобные результаты были получены в [10, 11, 13, 16, 17, 22]. Начально-краевая задача на ограниченном интервале рассматривалась в [11, 12, 14, 15, 18–23].

Целью настоящей работы является, во-первых, изучение вопросов повышения внутренней регулярности слабых решений задачи (1.1), (1.2) в зависимости от скорости убывания нерегулярной начальной функции u_0 при $x \to +\infty$. Получены результаты о существовании как обобщенных, так и непрерывных производных, причем в последнем случае установлены оценки этих производных в нормах Гельдера. При этом, рассматриваются решения, построенные ранее в статье [16]. Другой круг вопросов состоит в изучении поведения данных решений при больших временах. Установлены результаты об их экспоненциальном убывании в нормах L_2 при $t \to +\infty$. При этом, в доказательстве используются полученные результаты о повышении внутренней гладкости.

Подчеркнем, что говоря здесь об обобщении уравнении Кавахары, мы не затрагиваем вопрос о повышении степени нелинейности (см., например, [23]).

Символы j, k, l, m, n везде в дальнейшем обозначают неотрицательные целые числа.

Для любых $T > 0$, $\delta \in (0,T)$ и $x_0 \in \mathbb{R}$ или $x_0 = -\infty$ положим $\Pi_T^{\delta,x_0} = (\delta,T)\times(x_0,+\infty)$, пусть $\Pi_T = \Pi_T^{0,-\infty}$, $\Pi_T^+ = \Pi_T^{0,0}$.

Для $p \in [1,+\infty]$ положим $L_{p,x_0} = L_p(x_0,+\infty)$, $H^k_{x_0} = H^k(x_0,+\infty)$, $W^k_{p,x_0} = W^k_p(x_0,+\infty)$; пусть $L_p = L_{p,-\infty}$, $L_{p,+} = L_{p,0}$, $H^k_+ = H^k_0$, $W^k_{p,+} = W^k_{p,0}$.

Определим специальное весовое пространство. Для $\alpha \in \mathbb{R}$ и $x_0 \in \mathbb{R}$ положим

$$L^\alpha_{p,x_0} = \{f(x) : (1+x-x_0)^\alpha f \in L_{p,x_0}\}$$

и введем на нем естественную норму; пусть $L^\alpha_{p,+} = L^\alpha_{p,0}$, пусть $L^\alpha_p = L_p \cap L^\alpha_{p,+}$. Положим

$$\lambda(f;T,\delta,x_0) = \sup_{m\geq 0} \int_\delta^T \int_{x_0+m}^{x_0+m+1} f^2(t,x)\,dx\,dt,$$

пусть $\lambda^+(f;T) = \lambda(f;T,0,0)$.

Для $\alpha \geq 0$ введем пространство $X^\alpha(\Pi_T^{\delta,x_0})$, состоящее из функций $f(t,x)$ таких, что

$$f \in C_w([\delta,T];L^\alpha_{2,x_0}), \quad \lambda(f_{xx};T,\delta,x_0) < +\infty$$

и, если $\alpha > 0$, то дополнительно

$$f_{xx} \in L_2(\delta,T;L^{\alpha-1/2}_{2,x_0})$$

(символ C_w обозначает пространство слабых отображений) с естественной нормой.

Через $C^k_b(\overline{I})$ для любого интервала $I \subset \mathbb{R}$ обозначим пространство непрерывных ограниченных на $\overline{I}$ функций, обладающих на $\overline{I}$ непрерывными ограниченными производными до порядка k включительно. Положим $C^k_{b,+} = C^k_b(\overline{\mathbb{R}}_+)$.

Через $C_b(\overline{\Pi}_T^{\delta,x_0})$ обозначим пространство непрерывных ограниченных на $\overline{\Pi}_T^{\delta,x_0}$ функций.

Дадим определение слабого решения рассматриваемой задачи.

Определение 1.1. *Функция $u(t,x)$ из пространства $L_\infty(0,T;L_{2,+})$ называется слабым решением задачи* (1.1), (1.2), *если для любой* *функции* $\phi(t,x)$ *такой, что* $\phi \in L_2(0,T;H^5_+)$, $\phi_t \in L_2(0,T;L_{2,+})$, $\phi|_{t=T} = 0$, $\phi|_{x=0} = \phi_x|_{x=0} = \phi_{xx}|_{x=0} = 0$, *выполняется интегральное тождество*

$$\iint\limits_{\Pi_T^+} \bigl[u\bigl(\phi_t - \partial_x^5\phi + b\partial_x^3\phi + (g_1\phi)_x - g_0\phi\bigr) + \frac{1}{2}u^2\phi_x + f\phi\bigr]\,dx\,dt$$

$$+ \int\limits_0^{+\infty} u_0(x)\phi(0,x)\,dx + \int\limits_0^T \bigl(\nu(t)\partial_x^3\phi(t,0) - \mu(t)\partial_x^4\phi(t,0)\bigr)\,dt = 0. \quad (1.8)$$

В работе [16] был установлен следующий результат.

Теорема 1.1. *Пусть для некоторых* $T > 0$ *и* $\alpha \ge 0$

$$g_0 \in L_1(0,T;L_{\infty,+}), \qquad g_1 \in L_2(0,T;W^1_{\infty,+}),$$
$$u_0 \in L^\alpha_{2,+}, \qquad f \in L_1(0,T;L^\alpha_{2,+}),$$
$$\mu \in H^{2/5}(0,T), \qquad \nu \in H^{1/5}(0,T).$$

Тогда существует слабое решение задачи (1.1), (1.2) *из пространства* $X^\alpha(\Pi_T^+)$. *Если* $\alpha \ge 3/8$, *то решение из этого пространства единственно.*

Следует отметить, что условия гладкости краевых функций μ и ν в данной теореме являются оптимальными в следующем смысле: если $v(t,x)$ — решение задачи Коши для линейного уравнения

$$v_t - \partial_x^5 v = 0, \qquad v\big|_{t=0} = v_0 \in L_2,$$

то (см., например, [24]) для любого $x \in \mathbb{R}$

$$\|D_t^{2/5}v(\cdot,x)\|_{L_2(\mathbb{R}^t)} = \|D_t^{1/5}v_x(\cdot,x)\|_{L_2(\mathbb{R}^t)} = \|v_0\|_{L_2}.$$

Приведем результат настоящей статьи о повышении гладкости решения вплоть до границы $x = 0$ при $t > 0$.

Теорема 1.2. *Пусть для некоторых* $T > 0$ *и* $\alpha \ge 1/2$

$$g_0 \in L_2(0,T;L_{\infty,+}), \qquad g_1 \in L_2(0,T;W^1_{\infty,+}),$$
$$u_0 \in L^\alpha_{2,+}, \qquad f \in L_2(0,T;L^\alpha_{2,+}),$$
$$\mu \in H^{4/5}(0,T), \qquad \nu \in H^{3/5}(0,T)$$

и пусть для некоторого $a_0 > 0$ *и любого* $\delta \in (0,T)$

$$g_0, g_1 \in L_1(\delta,T;W^2_{\infty,a_0}), \qquad f_{xx} \in L_1(\delta,T;L^{\alpha-1/2}_{2,a_0}).$$

Тогда слабое решение задачи (1.1), (1.2) $u \in X^\alpha(\Pi_T^+)$ *обладает следующим свойством:* $u_{xx} \in X^{\alpha-1/2}(\Pi_T^{\delta,0})$ *для любого* $\delta \in (0,T)$.

Следующая теорема относится к повышению гладкости решения при $t > 0$, $x > 0$.

Теорема 1.3. *Пусть выполнены условия теоремы* 1.2 *для некоторого* $\alpha \geq 3/4$ *и, дополнительно, существует* $m \in [3, 4\alpha]$ *такое, что для любых* $\delta \in (0, T)$ *и* $x_0 > 0$

$$g_0, g_1 \in L_\infty(\delta, T; W^m_{\infty,x_0}), \qquad \partial^l_x f \in L_1(\delta, T; L^{\alpha-l/4}_{2,x_0}) \quad \text{при } 3 \leq l \leq m.$$

Тогда слабое решение задачи (1.1), (1.2) $u \in X^\alpha(\Pi^+_T)$ *обладает следующим свойством:* $\partial^l_x u \in X^{\alpha-l/4}(\Pi^{\delta,x_0}_T)$ *при* $3 \leq l \leq m$ *для любых* $\delta \in (0, T)$, $x_0 > 0$.

В случае задачи Коши результаты аналогичные теоремам 1.2 и 1.3 для самого уравнения Кавахары (1.3) получены в [25]. Ранее при более сильных предположениях повышение гладкости решения задачи Коши для уравнения Кавахары с ростом убывания начальной функции u_0 при $x \to +\infty$ было установлено в [26].

Перейдем к вопросу существования непрерывных производных.

Теорема 1.4. *Пусть для некоторых* $T > 0$, m, $\varepsilon \in (0, 1)$ *и* $\alpha = m/4 + 1/8 + \varepsilon/4$ *выполнены условия теоремы* 1.1, *а если* $m \geq 2$, *то и теоремы* 1.2. *Пусть известно, что для любых* $\delta \in (0, T)$, $x_0 > 0$

$$g_0 \in L_\infty(\delta, T; W^{\max(0,m-1)}_{\infty,x_0}), \qquad g_1 \in L_\infty(\delta, T; W^{\max(1,m-1)}_{\infty,x_0}),$$
$$\partial^l_x f \in L_\infty(\delta, T; L^{\alpha-l/4}_{2,x_0}) \quad \text{при } l \leq m.$$

Предположим также, что для некоторой константы a *функция* g_1 *представляется в виде*

$$g_1(t, x) \equiv a + \widetilde{g}_1(t, x), \qquad \widetilde{g}_1 \in L_\infty(\delta, T; L^\beta_{2,x_0}) \quad \forall \delta \in (0, T)\ \forall x_0 > 0,$$

где $\beta = -1/8 - \varepsilon/4$ *при* $\alpha < 1/4$, $\beta = -1/4$ *при* $\alpha \geq 1/4$. *Тогда слабое решение задачи* (1.1), (1.2) $u \in X^\alpha(\Pi^+_T)$ *непрерывно в* Π^+_T *(возможно, после изменения на множестве нулевой меры) и* $\partial^l_x u \in C_b(\overline{\Pi}^{\delta,x_0}_T)$ *при* $l \leq m$ *для любых* $\delta \in (0, T)$, $x_0 > 0$. *Более того, для любых* $t, \tau \in [\delta, T]$, $x, y \in [x_0, +\infty)$

$$\left|\partial^m_x u(t, x) - \partial^m_y u(t, y)\right| \leq c(\delta, x_0)|x - y|^\varepsilon \tag{1.9}$$

и при $j \leq 4$ *если* $m \geq j$, *то*

$$\left|\partial^{m-j}_x u(t, x) - \partial^{m-j}_x u(\tau, x)\right| \leq c(\delta, x_0)|t - \tau|^{(\varepsilon+j)/5}. \tag{1.10}$$

В случае задачи Коши аналогичный результат для уравнения Кавахары был ранее установлен в [25].

Следует заметить, что для обобщенного уравнения Кортевега–де Фриза в случае начально-краевой задачи в полуполосе Π_T^+ результаты о повышении внутренней гладкости решений аналогичные теоремам 1.2–1.4 были получены в работе [27], а в случае задачи Коши — в работах [28, 29].

При рассмотрении вопроса о поведении решений уравнения Кавахары при больших временах прежде всего необходимо отметить, что для решений задачи Коши для уравнения (1.3) справедлив закон сохранения в L_2:

$$\|u(t,\cdot)\|_{L_2} = \|u_0\|_{L_2}, \tag{1.11}$$

что исключает возможность убывания по этой норме. Аналогичный закон сохранения справедлив и для уравнения Кортевега–де Фриза. Чтобы построить убывающие при $t \to +\infty$ решения в уравнение вводится дополнительное “демпфирование”. В работе [30] в левую часть уравнения (1.4) было добавлено слагаемое вида $g_0(x)u$, где неотрицательная функция g_0 предполагалась строго положительной только при больших значениях x, то есть демпфирование было эффективно только на бесконечности. В этом случае для решений задачи Коши было получено экспоненциальное убывание в норме L_2 при $t \to +\infty$.

В случае начально-краевой задачи при $x \geq 0$ с однородным краевым условием Дирихле для такого же уравнения, как в [30] аналогичный результат был ранее установлен в статье [31].

В настоящей работе результат аналогичный [31] получен для рассматриваемой задачи.

Теорема 1.5. *Пусть* $u_0 \in L_{2,+}$, $g_0, g_1 \in L_\infty(\mathbb{R}_+^t; W_{\infty,+}^2)$, $\mu = \nu \equiv 0$, $f \equiv 0$. *Предположим также, что*

$$2g_0(t,x) - g_{1\,x}(t,x) \geq 0 \qquad \forall\, t > 0\ \forall\, x > 0, \tag{1.12}$$

существуют $R > 0$, $\alpha_0 > 0$ *такие, что*

$$2g_0(t,x) - g_{1\,x}(t,x) \geq \alpha_0 \qquad \forall\, t > 0\ \forall\, x > R. \tag{1.13}$$

Тогда существуют положительные константы c *и* c_0, *зависящие от* $\|u_0\|_{L_{2,+}}$, $\|g_0\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+^t; W_{\infty,+}^2)}$, $\|g_1\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+^t; W_{\infty,+}^2)}$ *такие, что для слабого решения задачи* (1.1), (1.2) $u \in X^\alpha(\Pi_T^+)$ $\forall\, T > 0$, *построенного в теореме* 1.1, *справедливо неравенство*

$$\|u(t,\cdot)\|_{L_{2,+}} \leq c e^{-c_0 t} \qquad \forall\, t \geq 0. \tag{1.14}$$

Для $\alpha \geq 0$ введем вспомогательную функцию ρ_α:

$$\rho_\alpha(x) \equiv (1+x)^{2\alpha} e^{\frac{x}{1+x}}. \tag{1.15}$$

Заметим, что $0 < \rho'_\alpha(x) \leq c\rho_\alpha(x)$, $|\rho_\alpha^{(l)}(x)| \leq c(l)\rho'_\alpha(x)$ $\forall\, l \geq 2$ для любого $x \geq 0$.

Через $\eta(x)$ обозначим некоторую неубывающую бесконечно гладкую функцию такую, что $\eta(x) = 0$ при $x \leq 0$, $\eta(x) = 1$ при $x \geq 1$, $\eta(x) + \eta(1-x) \equiv 1$.

Будем использовать следующее интерполяционное неравенство. Пусть $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$ — две положительные бесконечно гладкие при $x \geq 0$ функции такие, что $\psi_1(x) \leq c\psi_2(x)$, $|\psi_j^{(l)}(x)| \leq c(l)\psi_j(x)$ $\forall\, l$, $j = 1$ и 2, для любого $x \geq 0$. Пусть k – натуральное, $p \in [2, +\infty]$, $0 \leq m < k$. Тогда существует такая константа $c = c(k,p)$, что для любой функции $v(x)$, для которой $v^{(k)}\psi_1^{1/2}, v\psi_2^{1/2} \in L_{2,+}$, справедливо неравенство

$$\big\|v^{(m)}\psi_1^s\psi_2^{1/2-s}\big\|_{L_{p,+}} \leq c\big\|v^{(k)}\psi_1^{1/2}\big\|^{2s}_{L_{2,+}}\big\|v\psi_2^{1/2}\big\|^{1-2s}_{L_{2,+}} + \big\|v\psi_2^{1/2}\big\|_{L_{2,+}}, \tag{1.16}$$

где $s = \frac{2m+1}{4k} - \frac{1}{2kp}$.

Для функций, заданных на всей прямой неравенство (1.16) было доказано в [5] (на самом деле там был рассмотрен многомерный случай). На полуоси для значений $k = 1$ и $k = 2$ оно было выведено в [10]. В общем случае доказательство полностью аналогично.

Заметим, что условия на функции ψ_j выполнены для $\psi_1 \equiv \rho'_\alpha$, $\psi_2 \equiv \rho_\alpha$. В частности, тогда из неравенства (1.16) следует, что при $\alpha \geq 0$, $a > 0$, $m \leq 1$

$$\sup_{x\in[0,a]}\big|v^{(m)}(x)\big| \leq c\big\|v''(\rho'_\alpha)^{1/2}\big\|^{(2m+1)/4}_{L_{2,+}}\big\|v\rho_\alpha^{1/2}\big\|^{(3-2m)/4}_{L_{2,+}} + \big\|v\rho_\alpha^{1/2}\big\|_{L_{2,+}}. \tag{1.17}$$

В случае интегрирования по полуоси $\mathbb{R}_+$ пределы интегрирования будем опускать. Символом χ_I будем обозначать характеристическую функцию интервала $I \subset \mathbb{R}$.

Положим $x_+ = \max(x,0)$, $x_- = \max(-x,0)$.

Статья организована следующим образом. Вопросы существования обобщенных производных рассмотрены в части 2, а непрерывных производных — в части 3. Убывание решений при больших временах изучается в части 4.

2. Обобщенные производные

Для доказательства теорем 1.2 и 1.3 в следующих двух леммах установим оценки решения задачи (1.1), (1.2) при однородных краевых условиях и гладких функциях f, u_0, g_0, g_1, но зависящие только от норм этих функций, входящих в условия теорем.

Пусть $\mathcal{S}_{exp,+}$ — пространство бесконечно гладких при $x \geq 0$ функций $f(x)$ таких, что $e^{nx} f^{(j)}(x) \in L_{2,+}$ для любых n и j. Тогда если $u_0 \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+)$, $f \in C_0^\infty(\Pi_T)$, $\mu = \nu \equiv 0$, $g_0, g_1 \in C_b^\infty(\overline{\Pi}_T^+)$ (пространство бесконечно гладких и ограниченных вместе с производными функций), то как показано в [10], существует решение задачи (1.1), (1.2) из пространства $C^\infty([0,T]; \mathcal{S}_{exp,+})$.

Лемма 2.1. *Пусть $\alpha \geq 1/2$, $\mu = \nu \equiv 0$. Тогда для любых $\delta \in (0,T)$, $\delta' \in (0,\delta)$*

$$\|u_{xx}\|_{X^{\alpha-1/2}(\Pi_T^{\delta,0})} \leq c, \tag{2.1}$$

где константа c зависит от T, δ, δ', α, a_0, b, нормы u_0 в $L_{2,+}^\alpha$, норм f в $L_2(0,T; L_{2,+}^\alpha)$ и f_{xx} в $L_1(\delta', T; L_{2,a_0}^{\alpha-1/2})$, нормы g_0 в $L_2(0,T; L_{\infty,+})$, нормы g_1 в $L_2(0,T; W_{\infty,+}^1)$ и норм g_0, g_1 в $L_1(\delta', T; W_{\infty,a_0}^2)$.

Доказательство. Прежде всего заметим, что, как показано в [16],

$$\|u\|_{X^\alpha(\Pi_T^+)} \leq c, \tag{2.2}$$

где константа c зависит от тех же констант (кроме a_0 и δ') и норм функций u_0, f, g_0, g_1 в пространствах из условия теоремы 1.1.

Положим $\rho(x) \equiv \rho_{\alpha-1/2}(x)$, $\varphi(t) \equiv \eta\big((t-\delta')/(\delta-\delta')\big)$ (тогда $\varphi(t) = 0$ при $t \leq \delta'$, $\varphi(t) = 1$ при $t \geq \delta$).

Умножим равенство (1.1) на $2\big(u_{xx}(t,x)\rho(x)\big)_{xx}\varphi(t)$ и проинтегрируем по $\mathbb{R}_+$, тогда

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int u_{xx}^2\rho\varphi\,dx - \int u_{xx}^2\rho\varphi'\,dx + 5\int u_{xxxx}^2\rho'\varphi\,dx \\
+ \int u_{xxx}^2\cdot(3b\rho' - 5\rho''')\varphi\,dx + \int u_{xx}^2\cdot(\rho^{(5)} - b\rho''')\varphi\,dx \\
+ \big(u_{xxxx}^2\rho + 4u_{xxxx}u_{xxx}\rho' - 3u_{xxx}^2\rho'' + 2u_{xxxx}u_{xx}\rho'' - 2u_{xxx}u_{xx}\rho''' \\
+ u_{xx}^2\rho^{(4)} - bu_{xxx}^2\rho - bu_{xx}^2\rho''\big)\big|_{x=0}\varphi + 2\int(g_1u_x + g_0u)(u_{xx}\rho)_{xx}\varphi\,dx \\
+ 2\int uu_x(u_{xx}\rho)_{xx}\varphi\,dx = 2\int f(u_{xx}\rho)_{xx}\varphi\,dx.
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Второй интеграл в левой части (2.3) оценивается в силу (2.2), для оценки внеинтегральных слагаемых можно использовать неравенство (1.17) (для $v \equiv u_{xx}$ и, например, $a = 1$). Далее, с использованием неравенства (1.16) и свойств функции ρ (в частности, $\rho'(x) \geq \text{const} > 0$ при $x \in [0, a_0]$) находим, что

$$\begin{aligned}
2\int g_1 u_x (u_{xx}\rho)_{xx}\varphi\,dx &= 2\int g_1 u_x (u_{xx}\rho)_{xx}\eta(a_0+1-x)\varphi\,dx \\
&+ 2\int \big(g_1\eta(x-a_0)\big)_{xx} u_x u_{xx}\rho\varphi\,dx + 3\int \big(g_1\eta(x-a_0)\big)_x u_{xx}^2\rho\varphi\,dx \\
&\qquad - \int g_1\eta(x-a_0)u_{xx}^2\rho'\varphi\,dx \\
&\geq -c\bigg(\int\limits_0^{a_0+1}(u_{xxxx}^2+u_{xx}^2)\varphi\,dx\bigg)^{1/2}\sup_{x\geq 0}|g_1|\bigg(\int\limits_0^{a_0+1}(u_{xx}^2+u^2)\varphi\,dx\bigg)^{1/2} \\
&\qquad - c\sup_{x\geq a_0}\big(|g_1|+|g_{1\,x}|+|g_{1\,xx}|\big)\int\limits_{a_0}^{+\infty}(u_{xx}^2+u^2)\rho\varphi\,dx \\
&\geq -\varepsilon\int u_{xxxx}^2\rho'\varphi\,dx - c(\varepsilon)\big(\|g_1\|_{L_{\infty,+}}^2 + \|g_1\|_{W^2_{\infty,a_0}}\big)\int (u_{xx}^2+u^2)\rho\varphi\,dx,
\end{aligned} \tag{2.4}$$

где $\varepsilon > 0$ может быть выбрано сколь угодно малым. Интегралы от функций $g_0(u_{xx}\rho)_{xx}\varphi$ и $f(u_{xx}\rho)_{xx}\varphi$ оцениваются аналогично. Далее,

$$2\int u u_x (u_{xx}\rho)_{xx}\varphi\,dx = 5\int u_x u_{xx}^2\rho\varphi\,dx - \int u u_{xx}^2\rho'\varphi\,dx. \tag{2.5}$$

Используя неравенство (1.16) при $p = +\infty$, $k = 2$, $m = 1$ и уже известную оценку (2.2) находим, что

$$\begin{aligned}
\Big|\int u_x u_{xx}^2\rho\varphi\,dx\Big| &\leq \sup_{x\geq 0}|u_x|\int u_{xx}^2\rho\varphi\,dx \\
&\leq c\Big(\int u_{xx}^2\,dx\Big)^{3/8}\Big(\int u^2\,dx\Big)^{1/8}\int u_{xx}^2\rho\varphi\,dx \\
&= \gamma(t)\int u_{xx}^2\rho\varphi\,dx,
\end{aligned} \tag{2.6}$$

где $\|\gamma\|_{L_1(0,T)} \leq c$. Аналогично оценивается интеграл от функции $u u_{xx}^2\rho'\varphi$.

Таким образом, из неравенства (2.3) следует, что

$$\|u_{xx}\varphi^{1/2}\|_{L_\infty(0,T;L_{2,+}^{\alpha-1/2})} + \|u_{xxxx}(\rho')^{1/2}\varphi^{1/2}\|_{L_2(\Pi_T^+)} \leq c. \tag{2.7}$$

В частности,

$$\|u_{xxxx}\varphi^{1/2}\|_{L_2\left((0,T)\times(0,a_0+3)\right)} \leq c \tag{2.8}$$

и, если $\alpha > 1/2$, то поскольку $\rho'_{\alpha-1/2} \sim \rho_{\alpha-1}$

$$\|u_{xxxx}\varphi^{1/2}\|_{L_2(0,T;L^{\alpha-1}_{2,+})} \le c. \tag{2.9}$$

Осталось оценить величину $\lambda(u_{xxxx};T,\delta,0)$. Для любого $m \ge a_0 + 2$ положим $\rho(x) \equiv \rho_0(x-m)$ при $x > m-1$ и $\rho(x) \equiv 0$ при $x \le m-1$ (заметим, что ρ — бесконечно гладкая функция). Тогда из соответствующих аналогов равенств (2.3) и (2.5) находим, что

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int u_{xx}^2\rho\varphi\,dx - \int u_{xx}^2\rho\varphi'\,dx + 5\int u_{xxxx}^2\rho'\varphi\,dx \\ + \int u_{xxxx}u_{xx}\cdot(5\rho''' - 3b\rho')\varphi\,dx + \frac{1}{2}\int u_{xx}^2\cdot(b\rho''' - 3\rho^{(5)})\varphi\,dx \\ + \int (3g_{1\,x}\rho - g_1\rho')u_{xx}^2\varphi\,dx + 2\int g_{1\,xx}u_xu_{xx}\rho\varphi\,dx \\ + 2\int (g_0u)_{xx}u_{xx}\rho\varphi\,dx + 5\int u_xu_{xx}^2\rho\varphi\,dx - \int uu_{xx}^2\rho'\varphi\,dx \\ = 2\int f_{xx}u_{xx}\rho\varphi\,dx.\end{aligned} \tag{2.10}$$

Поскольку $|\rho'''(x)| \le c(\rho'(x))^{1/2}$ (проверяется непосредственно), то для сколь угодно малого $\varepsilon > 0$

$$\left|\int u_{xxxx}u_{xx}\rho'''\varphi\,dx\right| \le \varepsilon\int u_{xxxx}^2\rho'\varphi\,dx + c(\varepsilon)\int u_{xx}^2\varphi\,dx \tag{2.11}$$

и тогда с учетом оценок (2.2) и (2.7) при $\alpha = 1/2$ аналогично (2.8) находим, что равномерно по m

$$\|u_{xxxx}\varphi^{1/2}\|_{L_2\bigl((0,T)\times(m,m+1)\bigr)} \le c. \tag{2.12}$$

Лемма доказана. $\square$

Лемма 2.2. *Пусть $\alpha \ge 3/4$, $3 \le m \le 4\alpha$. Тогда для любых $\delta \in (0,T)$, $\delta' \in (0,\delta)$, $x_0 > 0$, $x_0' \in (0,x_0)$ если $3 \le l \le m$, то*

$$\|\partial_x^l u\|_{X^{\alpha-l/4}(\Pi_T^{\delta,x_0})} \le c, \tag{2.13}$$

где константа c зависит от тех же величин, что в (2.1), а также m, x_0, x_0', норм $\partial_x^l f$ в $L_1(\delta',T;L^{\alpha-l/4}_{2,x_0'})$ при $l \le m$ и норм g_0, g_1 в $L_\infty(\delta',T;W^m_{\infty,x_0'})$.

Доказательство. Вначале заметим, что оценки (2.1), (2.2) справедливы и в данном случае. Кроме того, поскольку $\alpha > 1/2$, то из интерполяционного неравенства (1.16) следует, что

$$\|u_x\|_{X^{\alpha-1/4}(\Pi_T^{\delta,0})} \le c. \tag{2.14}$$

Применим индукцию по l. Пусть $\delta_1 \in (\delta', \delta)$, $x_1 \in (x_0', x_0)$. Положим $\varphi(t) \equiv \eta\bigl((t-\delta_1)/(\delta-\delta_1)\bigr)$, $\rho(x) \equiv \rho_{\alpha-l/4}(x - x_1 - 1)$ при $x > x_1$ и $\rho(x) \equiv 0$ при $x \le x_1$.

Умножив равенство (1.1) на $2(-1)^l \partial_x^l\bigl(\partial_x^l u(t,x)\rho(x)\bigr)\varphi(t)$ и проинтегрировав по $\mathbb{R}_+$ получим аналогично (2.10), что

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\int (\partial_x^l u)^2\rho\varphi\,dx - \int (\partial_x^l u)^2\rho\varphi'\,dx + 5\int (\partial_x^{l+2}u)^2\rho'\varphi\,dx \\ + \int \partial_x^{l+2}u\partial_x^l u\cdot(5\rho''' - 3b\rho')\varphi\,dx + \frac{1}{2}\int (\partial_x^l u)^2\cdot(b\rho''' - 3\rho^{(5)})\varphi\,dx \\ + 2\int \partial_x^l(g_1u_x + g_0u + uu_x)\partial_x^l u\rho\varphi\,dx = 2\int \partial_x^l f\partial_x^l u\rho\varphi\,dx. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Вместо (2.11) используем неравенство

$$\begin{aligned} \Bigl|\int \partial_x^{l+2}u\partial_x^l u\rho'''\varphi\,dx\Bigr| \le \varepsilon\int (\partial_x^{l+2}u)^2\rho'\varphi\,dx \\ + c(\varepsilon)\int (\partial_x^l u)^2\rho(x + x_1 - x_0')\chi_{(x_1,+\infty)}\varphi\,dx. \end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned} 2\int \partial_x^l(g_1u_x)\partial_x^l u\rho\varphi\,dx = \int [(2l-1)g_{1\,x}\rho - g_1\rho'](\partial_x^l u)^2\varphi\,dx \\ + 2\sum_{k=2}^{l} C_l^k\int \partial_x^k g_1\partial_x^{l-k+1}u\partial_x^l u\rho\varphi\,dx \end{aligned}$$

и тогда

$$\begin{aligned} \Bigl|2\int \partial_x^l(g_1u_x)\partial_x^l u\rho\varphi\,dx\Bigr| \\ \le c\|g_1\|_{W^l_{\infty,x_1}}\sum_{k=0}^{l}\int (\partial_x^k u)^2\rho(x + x_1 - x_0')\chi_{(x_1,+\infty)}\varphi\,dx. \end{aligned}$$

Аналогично оценивается интеграл от $\partial_x^l(g_0u)\partial_x^l u\rho\varphi$. Наконец,

$$\partial_x^l(uu_x) = u\partial_x^{l+1}u + (l+1)u_x\partial_x^l u + \sum_{k=2}^{l-1} C_l^k\partial_x^k u\partial_x^{l+1-k}u,$$

где
$$2\int u\partial_x^l u\partial_x^{l+1}u\rho\varphi\,dx = -\int (u_x\rho + u\rho')(\partial_x^l u)^2\varphi\,dx$$
и тогда
$$\begin{aligned}\Big|\int \big(u\partial_x^{l+1}u + (l+1)u_x\partial_x^l u\big)\partial_x^l u\rho\varphi\,dx\Big|\\ \le c\sup_{x\ge 0}\big(|u_x|+|u|\big)\int (\partial_x^l u)^2\rho(x+x_1-x_0')\chi_{(x_1,+\infty)}\varphi\,dx \equiv \gamma(t),\end{aligned}$$
где $\|\gamma\|_{L_1(0,T)} \le c$. Кроме того, если $2\le k\le l-1$, то в силу индуктивного предположения и интерполяционного неравенства (1.16)
$$\begin{aligned}&\Big|\int \partial_x^k u\partial_x^{l+1-k}u\partial_x^l u\rho\varphi\,dx\Big|\\ &\le c\sum_{k=2}^{l-1}\bigg(\int (\partial_x^k u)^4\rho^2(x+x_1-x_0')\chi_{(x_1,+\infty)}\varphi\,dx\bigg)^{1/2}\bigg(\int(\partial_x^l u)^2\rho\varphi\,dx\bigg)^{1/2}\\ &\le c_1\sum_{k=0}^{l}\int(\partial_x^k u)^2\rho(x+x_1-x_0')\chi_{(x_1,+\infty)}\varphi^{1/2}\,dx\bigg[\int(\partial_x^l u)^2\rho\varphi\,dx+1\bigg]\\ &\equiv \gamma(t)\bigg[\int(\partial_x^l u)^2\rho\varphi\,dx+1\bigg],\end{aligned}$$
где $\|\gamma\|_{L_1(0,T)} \le c$.

Таким образом, аналогично (2.7) из (2.15) следует, что
$$\|\partial_x^l u\varphi^{1/2}\|_{L_\infty(0,T;L_{2,+}^{\alpha-l/4})} + \|\partial_x^{l+2}u(\rho')^{1/2}\varphi^{1/2}\|_{L_2(\Pi_T^+)} \le c. \tag{2.16}$$
Далее, повторив проведенные рассуждения для $\rho(x)\equiv\rho_0(x-x_1-1-m)$ при $x>x_1+m$ и $\rho(x)\equiv 0$ при $x\le x_1+m$ находим, что
$$\lambda(\partial_x^{l+2}u;T,\delta,x_0)\le c. \tag{2.17}$$
Объединяя (2.16) и (2.17) завершаем доказательство леммы. □

Перейдем к доказательству основных результатов этой части.

Доказательство теорем 1.2 *и* 1.3. Обнулим краевые условия таким же способом, что и в работе [16]. Для этого рассмотрим алгебраическое уравнение
$$r^5 - br^3 - i\lambda = 0, \qquad \lambda\in\mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

Нетрудно видеть, что существует $\lambda_0(b) > 0$ (без ограничения общности будем считать далее, что $\lambda_0 \geq 1$) такое, что при $|\lambda| \geq \lambda_0$ существуют два корня этого уравнения $r_0(\lambda)$ и $r_1(\lambda)$ такие, что они непрерывны по λ и для некоторых положительных констант $\widetilde{c}$ и $\widetilde{c}_1$ при $k = 0$ и 1

$$\operatorname{Re} r_k(\lambda) \leq -\widetilde{c}|\lambda|^{1/5}, \quad |r_k(\lambda)| \leq \widetilde{c}_1|\lambda|^{1/5}, \quad |r_0(\lambda) - r_1(\lambda)| \geq \widetilde{c}|\lambda|^{1/5}.$$

Разобьем функции μ и ν на две части следующим способом: положим

$$\mu_0(t) \equiv \mathcal{F}^{-1}\big[\widehat{\mu}(\lambda)\chi_{(-\lambda_0,\lambda_0)}(\lambda)\big](t), \quad \nu_0(t) \equiv \mathcal{F}^{-1}\big[\widehat{\nu}(\lambda)\chi_{(-\lambda_0,\lambda_0)}(\lambda)\big](t)$$

(здесь и далее символы $\widehat{f} \equiv \mathcal{F}[f]$ и $\mathcal{F}^{-1}[f]$ используются, соответственно, для обозначения прямого и обратного преобразований Фурье),

$$\mu_1(t) \equiv \mu(t) - \mu_0(t), \qquad \nu_1(t) \equiv \nu(t) - \nu_0(t).$$

Для функций μ_1 и ν_1 при $x > 0$ построим "граничный потенциал":

$$J(t,x;\mu_1,\nu_1) \equiv \mathcal{F}_t^{-1}\Big[\frac{r_1(\lambda)e^{r_0(\lambda)x} - r_0(\lambda)e^{r_1(\lambda)x}}{r_1(\lambda) - r_0(\lambda)}\widehat{\mu}_1(\lambda)\Big](t) \\ + \mathcal{F}_t^{-1}\Big[\frac{e^{r_1(\lambda)x} - e^{r_0(\lambda)x}}{r_1(\lambda) - r_0(\lambda)}\widehat{\nu}_1(\lambda)\Big](t).$$

Свойства этой функции были изучены в [16]. В частности, если $\mu_1 \in H^{4/5}(\mathbb{R})$, $\nu_1 \in H^{3/5}(\mathbb{R})$, то

$$J \in C_b(\mathbb{R}^t; H_+^2) \cap L_2(\mathbb{R}^t; C_{b,+}^3) \quad \partial_x^j J \in C_b(\overline{\mathbb{R}}_+^x; L_2(\mathbb{R}^t)) \text{ при } j \leq 4$$

(символ C_b обозначает пространство непрерывных и ограниченных отображений). Кроме того, функция J бесконечно гладкая при $x > 0$ и экспоненциально быстро убывает при $x \to +\infty$, а именно, для некоторой константы $\alpha_0 > 0$ при любых $\alpha \in [0,\alpha_0)$, $x_0 > 0$ и m, j

$$\sup_{x \geq x_0, t \in \mathbb{R}} e^{\alpha x}|\partial_t^m \partial_x^j J(t,x)| \leq c(\alpha, x_0, m, j).$$

Наконец, функция J при $x > 0$ удовлетворяет однородному линейному уравнению

$$J_t - \partial_x^5 J + b\partial_x^3 J = 0$$

и $J(\cdot, 0+0) \equiv \mu_1$, $J_x(\cdot, 0+0) \equiv \nu_1$.

Теперь построим вспомогательную функцию ψ следующим образом:

$$\psi(t,x) \equiv \mu_0(t)\eta(1-x) + \nu_0(t)x\eta(1-x) + J(t,x;\mu_1,\nu_1),$$

сделаем замену (1.5) и для функции $\widetilde{u}$ перейдем к начально-краевой задаче для уравнения (1.6) с граничными данными

$$\widetilde{u}\big|_{t=0} = \widetilde{u}_0(x) \equiv u_0(x) - \psi(0,x), \quad \widetilde{u}\big|_{x=0} = \widetilde{u}_x\big|_{x=0} = 0.$$

В силу приведенных свойств граничного потенциала функции $\widetilde{g}_0$, $\widetilde{g}_1$, $\widetilde{f}$, заданные формулами (1.7), и функция $\widetilde{u}_0$ обладают теми же свойствами, что и функции g_0, g_1, f и u_0 из условий рассматриваемых теорем. Более того, если свойства решений, сформулированные в этих теоремах, доказать для функции $\widetilde{u}$, то они также будут выполнены и для функции u.

Таким образом, далее доказательство можно проводить для задачи (1.1), (1.2) при $\mu = \nu \equiv 0$. Приблизим функции u_0, f, g_0, g_1 функциями $u_{0h} \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+)$, $f_h \in C_0^\infty(\Pi_T^+)$, $g_{0h}, g_{1h} \in C_b^\infty(\overline{\Pi}_T^+)$ и для соответствующих гладких решений u_h получим равномерные по h оценки (2.1) и (2.13). В статье [16] показано, что при $h \to +0$ эти решения сходятся в соответствующем смысле к слабому решению исходной задачи $u \in X^\alpha(\Pi_T^+)$. Тогда предельным переходом получаем утверждения рассматриваемых теорем. □

3. Непрерывные производные

Фундаментальное решение оператора $\partial_t - \partial_x^5 + b\partial_x^3 + a\partial_x$ (где a — число из условия теоремы 1.4), очевидно, задается формулой

$$G_{a,b}(t,x) = \theta(t)\mathcal{F}^{-1}\big[e^{it(\xi^5 + b\xi^3 - a\xi)}\big](x), \tag{3.1}$$

где θ — функция Хевисайда (см., например, [32, стр. 200–201]).

Лемма 3.1. *Функция $G_{a,b}$ бесконечно дифференцируема при $t > 0$ и для любых $T > 0$ и n при $0 < t \le T$ удовлетворяет неравенствам*

$$|\partial_x^n G_{a,b}(t,x)| \le \begin{cases} c(T,a,b,n)t^{-q(n)}(1+|x|)^{n/4-3/8}, & x < 0, \\ c(T,a,b,n)t^{-(n+1)/5}e^{-c_0 x^{5/4} t^{-1/4}}, & x \ge 0, \end{cases} \tag{3.2}$$

где $q(n) = (n+1)/5$ при $n = 0$ или $n = 1$ и $q(n) = n/4 + 1/8$ при $n \ge 2$, $c(T,a,b,n)$, c_0 — положительные константы.

Доказательство. Поскольку $G_{a,b}(t,x) = G_{0,b}(t, x - at)$, то утверждение леммы вытекает из [25, следствие 2.1], где оно было доказано для случая $a = 0$. □

Лемма 3.2. *Пусть функция* $F_1 \in L_\infty(0,T;L_2^\alpha)$, *где* $\alpha = n/4+1/8+\varepsilon/4$ *для некоторых* $T>0$, $n\in[0,2]$ *и* $\varepsilon\in(0,1)$. *Положим*

$$w_1(t,x) \equiv \int_0^t\int_{\mathbb{R}} \partial_x^n G_{a,b}(t-\tau,x-y)F_1(\tau,y)\,dy\,d\tau. \tag{3.3}$$

Тогда $w_1\in C_b(\overline{\Pi}_T^+)$, *причем*

$$\sup_{\substack{t\in[0,T],\\ x\geq 0}} |w_1(t,x)| + \sup_{\substack{t\in[0,T],\\ x_1>x_2\geq 0}} \frac{|w_1(t,x_1)-w_1(t,x_2)|}{(x_1-x_2)^\varepsilon} \leq c\|F_1\|_{L_\infty(0,T;L_2^\alpha)}, \tag{3.4}$$

где $c=c(T,a,b,n,\varepsilon)$.

Доказательство. Для $x\geq 0$ и $t\in[0,T]$ в силу (3.2)

$$\begin{aligned}|w_1(t,x)| &\leq c\int_0^t \frac{1}{(t-\tau)^{q(n)}}\int_x^{+\infty}(y-x+1)^{n/4-3/8}|F_1(\tau,y)|\,dy\,d\tau \\ &+ c\int_0^t\frac{1}{(t-\tau)^{(n+1)/5}}\int_{-\infty}^x e^{-c_0(x-y)^{5/4}(t-\tau)^{-1/4}}|F_1(\tau,y)|\,dy\,d\tau \\ &\leq c_1\sup_{0\leq\tau\leq t}\left[\left(\int_x^{+\infty}(y-x+1)^{2\alpha}F_1^2(\tau,y)\,dy\right)^{1/2}+\int_{-\infty}^x F_1^2(\tau,y)\,dy\right] \\ &\leq c_2\|F_1\|_{L_\infty(0,T;L_2^\alpha)}.\end{aligned}$$

Более того, если $\Delta x\in(0,1)$, то для $r>0$ поскольку $q(n),q(n+1)<1$

$$\begin{aligned}&\left|\int_0^t\int_{x+r}^{+\infty}\partial_x^n G_{a,b}(t-\tau,x+\theta\Delta x-y)\Big|_{\theta=0}^{\theta=1}F_1(\tau,y)\,dy\,d\tau\right| \\ &\quad\leq c\int_0^t\frac{1}{(t-\tau)^{q(n)}}\int_{x+r}^{+\infty}(y-x+1)^{n/4-3/8}|F_1(\tau,y)|\,dy\,d\tau \\ &\quad\leq c_1(r+1)^{n/4+1/8-\alpha}\|F_1\|_{L_\infty(0,T:L_2^\alpha)},\end{aligned}$$

$$\left|\int_0^t\int_{-\infty}^{x+r}\partial_x^n G_{a,b}(t-\tau,x+\theta\Delta x-y)\Big|_{\theta=0}^{\theta=1}F_1(\tau,y)\,dy\,d\tau\right|$$
$$=\Delta x\left|\int_0^1\int_0^t\int_{-\infty}^{x+r}\partial_x^{n+1}G_{a,b}(t-\tau,x+\theta\Delta x-y)F_1(\tau,y)\,dy\,d\tau\,d\theta\right|$$
$$\le c\Delta x\int_0^t\frac{1}{(t-\tau)^{q(n+1)}}\int_x^{x+r}(y-x+1)^{n/4-1/8}|F_1(\tau,y)|\,dy\,d\tau$$
$$+\frac{1}{(t-\tau)^{(n+2)/5}}\int_{-\infty}^{x}e^{-c_0(x-y)^{5/4}(t-\tau)^{-1/4}}|F_1(\tau,y)|\,dy\,d\tau$$
$$\le c_1\Delta x(r+1)^{n/4+3/8-\alpha}\|F_1\|_{L_\infty(0,T;L_2^\alpha)}$$

и выбирая $(r+1)=(\Delta x)^{-4}$ завершаем доказательство леммы. □

Лемма 3.3. *Пусть функция $F_2\in L_\infty(0,T;L_1^{\alpha_0})$, где $\alpha_0=(n/4-1/8+\varepsilon/4)_+$ для некоторых $T>0$, $n\in[0,1]$ и $\varepsilon\in(0,1)$. Положим*

$$w_2(t,x)\equiv\int_0^t\int_{\mathbb{R}}\partial_x^{n+1}G_{a,b}(t-\tau,x-y)F_2(\tau,y)\,dy\,d\tau. \tag{3.5}$$

Тогда $w_2\in C_b(\overline{\Pi}_T^+)$, причем

$$\sup_{\substack{t\in[0,T],\\ x\ge 0}}|w_2(t,x)|+\sup_{\substack{t\in[0,T],\\ x_1>x_2\ge 0}}\frac{|w_2(t,x_1)-w_2(t,x_2)|}{(x_1-x_2)^\varepsilon}$$
$$\le c\|F_2\|_{L_\infty(0,T;L_1^{\alpha_0})}, \tag{3.6}$$

где $c=c(T,a,b,n,\varepsilon)$.

Доказательство. Для $x\ge 0$ и $t\in[0,T]$ в силу (3.2)

$$|w_2(t,x)|\le c\int_0^t\frac{1}{(t-\tau)^{q(n+1)}}\int_x^{+\infty}(y-x+1)^{n/4-1/8}|F_2(\tau,y)|\,dy\,d\tau$$
$$+c\int_0^t\frac{1}{(t-\tau)^{(n+2)/5}}\int_{-\infty}^{x}e^{-c_0(x-y)^{5/4}(t-\tau)^{-1/4}}|F_2(\tau,y)|\,dy\,d\tau$$
$$\le c_2\|F_2\|_{L_\infty(0,T;L_1^{\alpha_0})},$$

а для $\Delta x \in (0,1)$ и $r > 0$ поскольку $q(n+1), q(n+2) < 1$

$$\Bigl|\int\limits_0^t \int\limits_{x+r}^{+\infty} \partial_x^{n+1} G_{a,b}(t-\tau, x+\theta\Delta x - y)\Bigr|_{\theta=0}^{\theta=1} F_2(\tau,y)\,dy\,d\tau\Bigr|$$

$$\le c\int\limits_0^t \frac{1}{(t-\tau)^{q(n+1)}} \int\limits_{x+r}^{+\infty} (y-x+1)^{n/4-1/8}|F_2(\tau,y)|\,dy\,d\tau$$

$$\le c_1(r+1)^{-\varepsilon/4}\|F_2\|_{L_\infty(0,T:L_1^{\alpha_0})},$$

$$\Bigl|\int\limits_0^t \int\limits_{-\infty}^{x+r} \partial_x^{n+1} G_{a,b}(t-\tau, x+\theta\Delta x - y)\Bigr|_{\theta=0}^{\theta=1} F_2(\tau,y)\,dy\,d\tau\Bigr|$$

$$= \Delta x\Bigl|\int\limits_0^1 \int\limits_0^t \int\limits_{-\infty}^{x+r} \partial_x^{n+2} G_{a,b}(t-\tau, x+\theta\Delta x - y) F_2(\tau,y)\,dy\,d\tau\,d\theta\Bigr|$$

$$\le c\Delta x\int\limits_0^t \frac{1}{(t-\tau)^{q(n+2)}} \int\limits_x^{x+r} (y-x+1)^{n/4+1/8}|F_2(\tau,y)|\,dy\,d\tau$$

$$+ \frac{1}{(t-\tau)^{(n+3)/5}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-c_0(x-y)^{5/4}(t-\tau)^{-1/4}}|F_2(\tau,y)|\,dy\,d\tau$$

$$\le c_1\Delta x(r+1)^{(1-\varepsilon)/4}\|F_2\|_{L_\infty(0,T;L_1^{\alpha_0})}$$

и опять для завершения доказательства выбираем $(r+1) = (\Delta x)^{-4}$. $\square$

Лемма 3.4. *Пусть для некоторых $T > 0$ и $x_0 > 0$ функция $F_3 \in L_1(\Pi_T)$, причем $F_3 = 0$ при $x \ge x_0/2$. Положим для любого n при $x \ge x_0$*

$$w_3(t,x) \equiv \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}} \partial_x^n G_{a,b}(t-\tau, x-y) F_3(\tau,y)\,dy\,d\tau. \tag{3.7}$$

Тогда $\partial_x^l w_3 \in C_b(\overline{\Pi}_T^{0,x_0})$ для любого l, причем

$$\sup_{\substack{t\in[0,T],\\ x\ge x_0}} |\partial_x^l w_3(t,x)| \le c(T, x_0, a, b, n, l)\|F_3\|_{L_1(\Pi_T)}. \tag{3.8}$$

Доказательство. Поскольку в формуле (3.7) интегрирование по y фактически производится от $-\infty$ до $x_0/2$, то $x - y \geq x_0/2$ и тогда

$$\partial_x^l w_3(t,x) \equiv \int_0^t \int_{-\infty}^{x_0/2} \partial_x^{n+l} G_{a,b}(t-\tau, x-y) F_3(\tau,y)\, dy\, d\tau,$$

где в силу (3.2) $\left|\partial_x^{n+l} G_{a,b}(t-\tau, x-y)\right| \leq c(T, x_0, a, b, n, l)$. □

Теперь можно перейти к доказательству основной теоремы.

Доказательство теоремы 1.4. Зафиксируем $\delta \in (0,T)$ и $x_0 > 0$. Положим $\varphi(t) \equiv \eta(2t/\delta - 1)$, $\psi(x) \equiv \eta(4x/x_0 - 1)$ (тогда $\varphi(t) = 0$ при $t \leq \delta/2$, $\varphi(t) = 1$ при $t \geq \delta$, $\psi(x) = 0$ при $x \leq x_0/4$, $\psi(x) = 1$ при $x \geq x_0/2$).

Пусть вначале $m \leq 1$. Положим $v(t,x) \equiv u(t,x)\varphi(t)\psi(x)$. Тогда согласно равенству (1.8) функция v является в Π_T слабым решением (в смысле аналогичного интегрального тождества) задачи Коши

$$v_t - \partial_x^5 v + b\partial_x^3 v + a v_x = F_1 + F_{2\,x} + F_{31} + F_{32\,xx}, \tag{3.9}$$

$$v\big|_{t=0} = 0, \tag{3.10}$$

где

$$\begin{aligned}
F_1 &\equiv (f + g_{1\,x} u - g_0 u)\varphi\psi + u\varphi'\psi, \\
F_2 &\equiv -(u^2/2 + \widetilde{g}_1 u)\varphi\psi, \\
F_{31} &\equiv (u^2/2 + g_1 u)\varphi\psi' - 5u_{xx}\varphi\psi''' - 5u_x\varphi\psi^{(4)} - u\varphi\psi^{(5)} \\
&\quad + 3bu_{xx}\varphi\psi' + 3bu_x\varphi\psi'' + bu\varphi\psi''', \\
F_{32} &\equiv -5u_{xx}\varphi\psi'.
\end{aligned}$$

С помощью фундаментального решения $G_{a,b}$ (см. (3.1)) обратим левую часть равенства (3.9):

$$\begin{aligned}
v(t,x) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}} G_{a,b}(t-\tau, x-y)\big(F_1(\tau,y) + F_{31}(\tau,y)\big)\, dy\, d\tau \\
+ \int_0^t\int_{\mathbb{R}} \partial_x G_{a,b}(t-\tau, x-y) F_2(\tau,y)\, dy\, d\tau \\
+ \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \partial_x^2 G_{a,b}(t-\tau, x-y) F_{32}(\tau,y)\, dy\, d\tau
\end{aligned} \tag{3.11}$$

(обоснование формулы (3.11) будет дано ниже). Тогда при $t \in [\delta, T]$, $x \geq x_0$

$$\partial_x^m u(t,x) = \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}} \partial_x^m G_{a,b}(t-\tau, x-y) F_1(\tau,y)\,dy\,d\tau + \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}} \partial_x^{m+1} G_{a,b}(t-\tau, x-y) F_2(\tau,y)\,dy\,d\tau$$
$$+ \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}} \Big[\partial_x^m G_{a,b}(t-\tau,x-y)F_{31}(\tau,y) + \partial_x^{m+2} G_{a,b}(t-\tau,x-y)F_{32}(\tau,y)\Big]\,dy\,d\tau$$
$$\equiv w_1(t,x) + w_2(t,x) + w_3(t,x). \quad (3.12)$$

Очевидно, что для функций w_1 и w_3 выполнены условия лемм 3.2 (при $n = m$) и 3.4 соответственно. Кроме того, для $\alpha_0 = (\alpha - 1/4)_+ = (m/4 - 1/8 + \varepsilon/4)_+$

$$\int |\widetilde{g}_1 u|(1+x)^{\alpha_0}\psi\,dx \leq \bigg(\int\limits_{x_0/4}^{+\infty} (1+x)^{2\alpha} u^2\,dx\bigg)^{1/2} \bigg(\int\limits_{x_0/4}^{+\infty} (1+x)^{2\beta} \widetilde{g}_1^2\,dx\bigg)^{1/2} \quad (3.13)$$

и, следовательно, $\widetilde{g}_1 u\varphi\psi \in L_\infty(0,T; L_1^{\alpha_0})$. Поскольку очевидно, что $u^2\psi \in L_\infty(0,T;L_1^{\alpha_0})$ получаем. что функция w_2 удовлетворяет условиям леммы 3.3 при $n = m$.

Заметим теперь, что если применить операцию усреднения по переменной x, то соответствующая функция $v^h(t,x)$ будет решением задачи типа (3.9), (3.10), где правая часть (3.9) также усреднена. Тогда в силу [25, Лемма 3.2] справедливо равенство

$$v^h(t,x) = \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}} G_{a,b}(t-\tau,x-y)\big[F_1^h(\tau,y) + F_{2\,x}^h(\tau,y) + F_{31}^h(\tau,y) + F_{32\,xx}^h(\tau,y)\big]\,dy\,d\tau, \quad (3.14)$$

поскольку усредненная правая часть (3.9), очевидно, принадлежит $L_\infty(0,T;L_2^{1/8+\varepsilon/4})$. Интегрируя по частям перейдем от (3.14) к аналогу равенства (3.11) для функции v^h и, сделав предельный переход при $h \to +0$, получим (3.11).

Пусть теперь $m \geq 2$. Положим $v(t,x) \equiv \partial_x^{m-2} u(t,x)\varphi(t)\psi(x)$. Тогда функция v является в полосе Π_T слабым решением задачи Коши для уравнения

$$v_t - \partial_x^5 v + b\partial_x^3 v + av_x = F_1 + F_2 + F_{31} + F_{32\,xx} \tag{3.15}$$

с начальным условием (3.10), где

$$\begin{aligned}
F_1 &\equiv \partial_x^{m-2}(f - g_0 u)\varphi\psi - \big[\partial_x^{m-2}(\widetilde{g}_1 u_x) - \widetilde{g}_1 \partial_x^{m-1} u\big]\varphi\psi + \partial_x^{m-2} u\varphi'\psi,\\
F_2 &\equiv -\partial_x^{m-2}(uu_x)\varphi\psi - \widetilde{g}_1 \partial_x^{m-1} u\varphi\psi,\\
F_{31} &\equiv -5\partial_x^m u\varphi\psi''' - 5\partial_x^{m-1} u_x\varphi\psi^{(4)} - \partial_x^{m-2} u\varphi\psi^{(5)}\\
&\qquad + 3b\partial_x^m u\varphi\psi' + 3b\partial_x^{m-1} u\varphi\psi'' + b\partial_x^{m-2} u\varphi\psi''' + a\partial_x^{m-2} u\varphi\psi',\\
F_{32} &\equiv -5\partial_x^m u\varphi\psi'.
\end{aligned}$$

Тогда аналогично (3.11), (3.12) получаем, что при $t \in [\delta, T]$, $x \geq x_0$

$$\begin{aligned}
\partial_x^m u(t,x) = \int_0^t\!\!\int_{\mathbb{R}} \partial_x^2 G_{a,b}(t-\tau, x-y) F_1(\tau,y)\,dy\,d\tau\\
+ \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \partial_x^2 G_{a,b}(t-\tau, x-y) F_2(\tau,y)\,dy\,d\tau\\
+ \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \Big[\partial_x^2 G_{a,b}(t-\tau, x-y) F_{31}(\tau,y) + \partial_x^4 G_{a,b}(t-\tau, x-y) F_{32}(\tau,y)\Big]\,dy\,d\tau\\
\equiv w_1(t,x) + w_2(t,x) + w_3(t,x).
\end{aligned}$$

Заметим, что в силу условия теоремы $\partial_x^l u \in L_\infty(\delta/2, T; L_{2,x_0/4}^{\alpha - l/4})$ при $l \leq m-1$. В частности, $\widetilde{g}_1 \partial_x^{m-1} u\varphi\psi \in L_\infty(0,T; L_1^{1/8+\varepsilon/4})$ аналогично (3.13). Очевидно, что таким же свойством обладает и функция $\partial_x^{m-2}(uu_x)\varphi\psi$.

Таким образом, для функций w_j выполнены условия леммы 3.2 при $n = 2$, леммы 3.3 при $n = 1$ и леммы 3.4.

В итоге получаем, что $\partial_x^m u \in C_b(\overline{\Pi}_T^{\delta,x_0})$ для любого m и справедливо неравенство (1.9).

Теперь перейдем к оценке модуля непрерывности по t. После того, как модуль непрерывности по x уже оценен, можно применить результаты статьи [33], в которой рассмотрены эволюционные уравнения дивергентного вида.

Введем последовательности прямоугольников $Q_n = [\delta, T] \times [x_0 + n, x_0 + n + 1]$ и $Q'_n = [\delta, T] \times [x_0/2 + n, 3x_0/2 + n + 1]$.

Чтобы доказать (1.10) используем индукцию по j. Пусть сначала $j = 0$. В каждом прямоугольнике Q'_n функция $v \equiv \partial_x^m u$ является обобщенным решением уравнения

$$v_t = \partial_x^5(\partial_x^m u) - b\partial_x^3(\partial_x^m u) - \big(\partial_x^m(u^2)/2\big)_x \\ - \partial_x^{m-m_0+1}\big[\partial_x^{m_0}(g_1 u)\big] + \partial_x^{m-m_0}\big[\partial_x^{m_0}(g_{1\,x} u - g_0 u)\big] + \partial_x^m f,$$

где $m_0 = 0$ при $m \le 1$, $m_0 = m - 2$ при $m \ge 2$.

Тогда функции $\partial_x^m u$, $\partial_x^m(u^2)$, $\partial_x^{m_0}(g_1 u)$, $\partial_x^{m_0}(g_{1\,x} u - g_0 u)$ в норме пространства $L_\infty(Q'_n)$ и $\partial_x^m f$ в норме пространства $L_2(Q'_n)$ оцениваются равномерно по n. С учетом уже установленной оценки (1.9) из результатов статьи [33, теорема 1] следует, что для любых точек $(t,x), (t+\tau,x) \in Q_n$ (где $\tau > 0$)

$$|v(t+\tau,x) - v(t,x)| \le c \inf_{0<h<x_0/2} (h^\varepsilon + \tau h^{\varepsilon-5} + \tau^{1/2} h^{-1/2}),$$

откуда выбирая $h = \min(\tau^{1/5}, x_0/2)$ выводим неравенство (1.10) для $j = 0$.

Пусть теперь $j \ge 1$ (тогда $m \ge 1$). Функция $v \equiv \partial_x^{m-j} u$ является в Q'_n обобщенным решением уравнения

$$v_t = \partial_x^{5-j}(\partial_x^m u) - b\partial_x^{(3-j)_+}(\partial_x^{m-(3-j)_-} u) - \partial_x^{m-j}(u u_x) \\ - \partial_x^{m-j}(g_1 u_x + g_0 u) + \partial_x^{m-j} f.$$

Поскольку по индуктивному предположению при $(t,x), (\tau,x) \in Q'_n$ справедливо неравенство

$$|v_x(t,x) - v_x(\tau,x)| \le c|t-\tau|^{(\varepsilon+j-1)/5},$$

то из [33, теорема 1, замечание 2] получаем, что для любых точек $(t,x), (t+\tau,x) \in Q_n$ (где $\tau > 0$)

$$|v(t+\tau,x) - v(t,x)| \le c \inf_{0<h<x_0/2} (h\tau^{(\varepsilon+j-1)/5} + \tau h^{\varepsilon-5+j}),$$

откуда выбирая $h = \min(\tau^{1/5}, x_0/2)$ выводим неравенство (1.10) для остальных значений j. □

4. Убывание решений при больших временах

Основным утверждением, используемым для доказательства теоремы 1.5 является следующая лемма.

Лемма 4.1. *Пусть* $u_0 \in L^{1/2}_{2,+}$, $g_0, g_1 \in L_\infty(0,T;W^2_{\infty,+})$ *для некоторого* $T>0$, $\mu=\nu\equiv 0$, $f\equiv 0$. *Предположим также, что для функций* g_0, g_1 *при* $t\in(0,T)$ *выполнены условия* (1.12), (1.13). *Тогда для решения задачи* (1.1), (1.2) $u\in X^{1/2}(\Pi^+_T)$ *справедливо неравенство*

$$\int\limits_0^T\int\limits_0^R u^2\,dx\,dt \le c\iint\limits_{\Pi^+_T}(2g_0-g_{1\,x})u^2\,dx\,dt + c\int\limits_0^T u^2_{xx}\big|_{x=0}\,dt, \tag{4.1}$$

где константа c *зависит от* $\|u_0\|_{L_{2,+}}$ *и норм функций* g_0, g_1 *в пространстве* $L_\infty(0,T;W^2_{\infty,+})$.

Доказательство. Прежде всего заметим, что величина $u_{xx}|_{x=0}$ имеет смысл, поскольку $u_{xx}\in X^0(\Pi^{\delta,0}_T)$ для любого $\delta\in(0,T)$.

Предположим, что неравенство (4.1) не имеет места. Тогда существуют последовательность начальных функций $\{u_{0k}\in L^{1/2}_{2,+}\}_{k\in\mathbb{N}}$, ограниченная в $L_{2,+}$, и последовательности функций $\{g_{0k}, g_{1k}\}_{k\in\mathbb{N}}$, ограниченные в $L_\infty(0,T;W^2_{\infty,+})$, для которых соответствующие слабые решения задачи типа (1.1), (1.2) $u_k(t,x)\in X^{1/2}(\Pi^+_T)$ удовлетворяют условию

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{\iint_{\Pi^+_T}(2g_{0k}-g_{1k\,x})u_k^2\,dx\,dt+\int_0^T u^2_{k\,xx}\big|_{x=0}\,dt}{\int_0^T\int_0^R u_k^2\,dx\,dt}=0. \tag{4.2}$$

Положим

$$p_k=\|u_k\|_{L_2\left((0,T)\times(0,R)\right)},\quad v_k(t,x)\equiv\frac{u_k(t,x)}{p_k},\quad v_{0k}(x)\equiv\frac{u_{0k}(x)}{p_k}.$$

Тогда

$$\|v_k\|_{L_2\left((0,T)\times(0,R)\right)}=1\qquad\forall\,k\in\mathbb{N} \tag{4.3}$$

и функция v_k является слабым решением следующей задачи:

$$v_t-\partial_x^5 v+b\partial_x^3 v+p_k v v_x+g_{1k}v_x+g_{0k}v=0, \tag{4.4}$$

$$v\big|_{t=0}=v_{0k}. \tag{4.5}$$

Заметим, что поскольку $u_k\in X^{1/2}(\Pi^+_T)$, то $u_k\in L_\infty(0,T;L_{2,+})$, $u_{k\,xx}\in L_2(0,T;L_{2,+})$ и тогда, в частности, $u_{k\,x}\in L_{8/3}(0,T;L_{\infty,+})$. Следовательно, $u_k u_{k\,x}, g_{1k}u_{k\,x}, g_{0k}u_k\in L_2(\Pi^+_T)$. Из результатов работы [17, леммы 4.3, 4.4] следует, что в таком случае для функций u_k при $t\in[0,T]$ справедливо равенство

$$\int u_k^2(t,x)\,dx+\int\limits_0^t u^2_{k\,xx}\big|_{x=0}\,d\tau+\int\limits_0^t\!\!\int(2g_{0k}-g_{1k\,x})u_k^2\,dx\,d\tau=\int u_{0k}^2\,dx \tag{4.6}$$

(формально оно получается умножением соответствующего равенства (1.1) на $2u_k(t,x)$ и последующим интегрированием). В частности, из (1.12) и (4.6) следует, что функция $\|u_k(t,\cdot)\|_{L_{2,+}}$ не возрастает и

$$p_k \le T^{1/2}\|u_{0k}\|_{L_{2,+}}. \tag{4.7}$$

Кроме того, в силу (4.2) при $k\to+\infty$

$$\iint\limits_{\Pi_T^+}(2g_{0k}-g_{1k\,x})v_k^2\,dx\,dt+\int\limits_0^T v_{k\,xx}^2\big|_{x=0}\,dt\to 0. \tag{4.8}$$

Покажем, что функции v_{0k} равномерно по k ограничены в пространстве $L_{2,+}$. Действительно, в силу (1.13)

$$\iint\limits_{\Pi_T^+}u_k^2\,dx\,dt\le\frac{1}{\alpha_0}\iint\limits_{\Pi_T^+}(2g_{0k}-g_{1k\,x})u_k^2\,dx\,dt+\int\limits_0^T\int\limits_0^R u_k^2\,dx\,dt$$

и тогда из равенства (4.6) следует, что

$$\int u_{0k}^2\,dx\le\frac{1}{T}\iint\limits_{\Pi_T^+}u_k^2\,dx\,dt+\int\limits_0^T u_{k\,xx}^2\big|_{x=0}\,dt+\iint\limits_{\Pi_T^+}(2g_{0k}-g_{1k\,x})u_k^2\,dx\,dt$$

$$\le\Bigl(1+\frac{1}{\alpha_0 T}\Bigr)\iint\limits_{\Pi_T^+}(2g_{0k}-g_{1k\,x})u_k^2\,dx\,dt+\int\limits_0^T u_{k\,xx}^2\big|_{x=0}\,dt+\frac{1}{T}\int\limits_0^T\int\limits_0^R u_k^2\,dx\,dt$$

и, поэтому,

$$\int v_{0k}^2\,dx\le\Bigl(1+\frac{1}{\alpha_0 T}\Bigr)\iint\limits_{\Pi_T^+}(2g_{0k}-g_{1k\,x})v_k^2\,dx\,dt+\int\limits_0^T v_{k\,xx}^2\big|_{x=0}\,dt+\frac{1}{T}.$$

Применяя (4.8) находим, что

$$\|v_{0k}\|_{L_{2,+}}\le c. \tag{4.9}$$

Тогда из (4.7), (4.8) и результатов работы [16, теорема 1.1] следует, что равномерно по k

$$\|v_k\|_{X^0(\Pi_T^+)}\le c. \tag{4.10}$$

В частности, из самого равенства (4.4) и оценки (4.10) следует, что равномерно по k

$$\|v_{k\,t}\|_{L_2(0,T;H^{-3}(0,r))} \leq c(r) \quad \forall\, r > 0.$$

Переходя к подпоследовательностям (с сохранением обозначений) получаем, что при $k \to +\infty$

$$\begin{aligned} p_k &\to p, \\ \partial_x^j g_{0k} &\to \partial_x^j g_0 \ \ *\text{-слабо в } L_\infty(\Pi_T^+) \text{ при } j \leq 2, \\ \partial_x^j g_{1k} &\to \partial_x^j g_1 \ \ *\text{-слабо в } L_\infty(\Pi_T^+) \text{ при } j \leq 2, \\ v_{0k} &\to v_0 \ \ \text{слабо в } L_{2,+}, \\ v_k &\to v \ \ *\text{-слабо в } L_\infty(0,T;L_{2,+}), \\ v_k &\to v \ \ \text{слабо в } L_2(0,T;H^2(0,r))\ \forall\, r > 0, \\ v_k &\to v \ \ \text{сильно в } L_2(0,T;H^1(0,r))\ \forall\, r > 0. \end{aligned} \tag{4.11}$$

С другой стороны, из (4.8) следует, что $v_k \to 0$ в $L_2(\Pi_T^{0,R})$, следовательно

$$v_k \to v \quad \text{сильно в } L_2(\Pi_T^+), \tag{4.12}$$

где

$$v(t,x) = 0 \quad \text{для } x > R. \tag{4.13}$$

Пусть $\phi(t,x)$ — любая пробная функция из определения 1.1. Для любой функции v_k запишем соответствующий аналог равенства (1.8):

$$\iint\limits_{\Pi_T^+} \Big[v_k \big(\phi_t - \partial_x^5\phi + b\partial_x^3\phi + (g_{1k}\phi)_x - g_{0k}\phi \big) + \frac{p_k}{2} v_k^2 \phi_x \Big]\, dx\, dt \\ + \int v_{0k}(x)\phi(0,x)\, dx = 0. \tag{4.14}$$

Заметим, что $\phi \in C([0,T];H_+^2) \subset C([0,T];C_{b,+}^1)$. Тогда переходя в (4.14) к пределу при $k \to +\infty$ получаем с учетом (4.11), (4.12), что

$$\iint\limits_{\Pi_T^+} \Big[v \big(\phi_t - \partial_x^5\phi + b\partial_x^3\phi + (g_1\phi)_x - g_0\phi \big) + \frac{p}{2} v^2 \phi_x \Big]\, dx\, dt \\ + \int v_0(x)\phi(0,x)\, dx = 0,$$

то есть функция $v \in X^0(\Pi_T^+)$ является слабым решением задачи

$$v_t - \partial_x^5 v + b\partial_x^3 v + pvv_x + g_1 v_x + g_0 v = 0, \tag{4.15}$$

$$v\big|_{t=0} = v_0. \tag{4.16}$$

Более того, в силу (4.13) $v \in X^\alpha(\Pi_T^+)$ для любого $\alpha > 0$. Заметим, что для задачи (4.15), (4.16) выполнены условия теоремы 1.2. Тогда $v_{xx} \in X^\alpha(\Pi_T^{\delta,0})$ для любых $\alpha > 0$ и $\delta \in (0,T)$ и, следовательно, $v, v_x \in L_\infty(\Pi_T^{\delta,0})$, $\partial_x^m v \in L_2(\Pi_T^{\delta,0})$ при $m \le 4$. Так как $g_0, g_1 \in L_\infty(\Pi_T^+)$, то для решения v уравнения (4.15) применимы результаты статьи [34, теорема 1] о единственности продолжения, из которых следует, что в силу (4.13) $v(t,x) = 0$ в Π_T^+. Следовательно, согласно (4.12) $v_k \to 0$ в $L_2(\Pi_T^+)$, что противоречит (4.3). □

Теперь можно доказать основную теорему этой части.

Доказательство теоремы 1.5. Пусть сначала $u_0 \in L_{2,+}^{1/2}$, тогда $u \in X^{1/2}(\Pi_T^+)$ для любого $T > 0$. Запишем равенство (4.6) для функции u:

$$\int u^2(t,x)\,dx + \int_0^t u_{xx}^2\big|_{x=0}\,d\tau + \int_0^t\!\!\int (2g_0 - g_{1\,x})u^2\,dx\,d\tau = \int u_0^2\,dx. \quad (4.17)$$

В частности, функция $\|u(t,\cdot)\|_{L_{2,+}}$ не возрастает. Зафиксируем $T > 0$, тогда

$$\int u^2(T,x)\,dx + \alpha_0 \int_0^T \int_R^{+\infty} u^2\,dx\,dt \le \int u_0^2\,dx$$

и, следовательно,

$$\iint\limits_{\Pi_T^+} u^2\,dx\,dt \le \frac{1}{\alpha_0}\int u_0^2\,dx - \frac{1}{\alpha_0}\int u^2(T,x)\,dx + \int_0^T\int_0^R u^2\,dx\,dt.$$

С помощью оценки (4.1) это неравенство можно переписать в виде

$$\iint\limits_{\Pi_T^+} u^2\,dx\,dt \le \frac{1}{\alpha_0}\int u_0^2\,dx - \frac{1}{\alpha_0}\int u^2(T,x)\,dx$$
$$+ c\Bigg[\iint\limits_{\Pi_T^+} (2g_0 - g_{1\,x})u^2\,dx\,dt + \int_0^T u_{xx}^2\big|_{x=0}\,dt\Bigg]. \quad (4.18)$$

Выражая величину в квадратных скобках в (4.18) с помощью (4.17) при $t = T$ и используя невозрастание $\|u(t,\cdot)\|_{L_{2,+}}$ находим, что

$$T\int u^2(T,x)\,dx \le \frac{1}{\alpha_0}\int u_0^2\,dx - \frac{1}{\alpha_0}\int u^2(T,x)\,dx \\ + c\Big(\int u_0^2\,dx - \int u^2(T,x)\,dx\Big)$$

и, следовательно,

$$\Big(T + \frac{1}{\alpha_0} + c\Big)\int u^2(T,x)\,dx \le \Big(\frac{1}{\alpha_0} + c\Big)\int u_0^2\,dx,$$

то есть

$$\int u^2(T,x)\,dx \le \gamma(\|u_0\|_{L_{2,+}})\int u_0^2\,dx, \quad \gamma \in (0,1),$$

откуда стандартным приемом выводим оценку (1.14).

В общем случае для любого $h > 0$ положим $u_{0h}(x) \equiv u_0(x)\eta(1/h - x) \in L_{2,+}^{1/2}$, тогда $u_{0h} \to u_0$ в $L_{2,+}$ при $h \to +0$. Для соответствующих решений u_h задачи типа (1.1), (1.2) с начальной функцией u_{0h} справедлива равномерная по h оценка (1.14). Боле того, слабое решение исходной задачи $u \in X^0(\Pi_T^+)$ $\forall T > 0$ может быть получено на основе оценок из [16] как $*$-слабый предел, в частности, в пространствах $L_\infty(n, n+1; L_{2,+})$ $\forall n$ функций u_h, и тогда оценка (1.14) останется справедливой и в предельном случае. □

Замечание 4.1. Если $u_0 \in L_{2,+}^{3/8}$, то в силу теоремы единственности можно утверждать, что любое слабое решение задачи (1.1), (1.2), принадлежащее пространству $X^{3/8}(\Pi_T^+)$ $\forall T > 0$, при выполнении условий теоремы 1.5 обладает свойством (1.14).

Замечание 4.2. Если функция g_1 не зависит от x: $g_1 = g_1(t) \in L_\infty(\mathbb{R}_+)$, то условия гладкости на функцию g_0 можно ослабить: $g_0 \in L_\infty(\mathbb{R}_+^t \times \mathbb{R}_+^x)$. Действительно, повышенные условия гладкости функций g_0, g_1 использовались только в доказательстве леммы 4.1 для обеспечения возможности применения теоремы 1.2. Однако в данном частном случае из свойства (4.8) следует, что при предельном переходе в равенстве (4.14) интеграл от $g_{0k}\phi v_k$ стремится к нулю, то есть предельная функция v является слабым решением задачи (4.15), (4.16) для $g_0 \equiv 0$. Это означает, что для справедливости леммы 4.1 достаточно условия $g_0 \in L_\infty(\Pi_T^+)$.

Литература

[1] T. Kawahara, *Oscillatory solitary waves in dispersive media* // J. Phys. Soc. Japan, **33** (1972), No. 1, 260–264.

[2] А. В. Марченко, *О длинных волнах в мелкой воде под ледяным покровом* // Прикл. матем. мех., **52** (1988), No. 2, 230–234.

[3] А. Т. Ильичев, *О свойствах одного нелинейного эволюционного уравнения пятого порядка, описывающего волновые процессы в средах со слабой дисперсией* // Труды МИАН, **186** (1989), 222–226.

[4] J.-C. Saut, *Sur quelques généralizations de l'equation de Korteweg–de Vries* // J. Math. Pures Appl., **58** (1979), No. 1, 21–61.

[5] А. В. Фаминский, *Задача Коши для квазилинейных уравнений нечетного порядка* // Матем. сб., **180** (1989), No. 9, 1183–1210.

[6] H. A. Biagioni, F. Linares, *On the Benny–Lin and Kawahara equations* // J. Math. Anal. Appl., **211** (1997), No. 1, 131–152.

[7] S. Cui, S. Tao, *Stricharts estimates for dispersive equations and solvability of the Kawahara equation* // J. Math. Anal. Appl., **304**, (2005), 683–702.

[8] S. Cui, D. Deng, S. Tao, *Global existence of solutions for the Cauchy problem of the Kawahara equation with L^2 initial data* // Acta Math. Sinica (Engl. Ser.), **22** (2006), No. 5, 1457–1466.

[9] H. Wang, S. Cui, D. Deng, *Global existence of solutions for the Cauchy problem of the Kawahara equations in Sobolev spaces of negative indices* // Acta Math. Sinica (Engl. Ser.), **23** (2007), No. 8, 1435–1446.

[10] К. Сангаре, *Смешанная задача в полуполосе для обобщенного уравнения Кавахары в пространстве бесконечно дифференцируемых экспоненциально убывающих функций* // Вестник Рос. ун-та дружбы народов, сер. матем., **10** (2003), No. 1, 91–107.

[11] N. A. Larkin, G. G. Doronin, *Kawahara equation in a quarter-plane and in a finite domain* // Bol. Soc. Paran. Mat. (3s.), **25** (2007), No. 1–2, 9–16.

[12] G. G. Doronin, N. A. Larkin, *Kawahara equation in a bounded domain* // Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B, **10** (2008), No. 4, 783–799.

[13] G. G. Doronin, N. A. Larkin, *Quarter-plane problem for the Kawahara equation* // Pacific J. Appl. Math., **1** (2008), No. 3, 151–176.

[14] N. A. Larkin, *Correct initial boundary value problems for dispersive equations* // J. Math. Anal. Appl., **344** (2008), No. 2, 1079–1092.

[15] G. G. Doronin, N. A. Larkin, *Well and ill-posed problems for the KdV and Kawahara equations* // Bol. Soc. Paran. Mat. (3s.), **26** (2008), No. 1–2, 133–137.

[16] К. Сангаре, А. В. Фаминский, *Слабые решения смешанной задачи в полуполосе для обобщенного уравнения Кавахары* // Матем. заметки, **85** (2009), No. 1, 98–109.

[17] Р. В. Кувшинов, А. В. Фаминский, *Смешанная задача в полуполосе для уравнения Кавахары* // Дифф. уравнения, **45** (2009), No. 3, 391–402.

[18] Р. В. Кувшинов, *Потенциалы для линеаризованного уравнения Кавахары* // Вестник Рос. ун-та дружбы народов, сер. матем., инф., физ., **3** (2010), 5–16.

[19] Р. В. Кувшинов, *Нелокальная корректность смешанной задачи в ограниченном прямоугольнике для уравнения Кавахары* // Вестник Рос. ун-та дружбы народов, сер. матем., инф., физ., **4** (2010), 35–47.

[20] A. V. Faminskii, N. A. Larkin, *Initial-boundary value problems for quasilinear dispersive equations posed on a bounded interval* // Electronic J. Differential Equ., **2010** (2010), No. 1, 1–20.

[21] A. V. Faminskii, N. A. Larkin, *Odd-order evolution equations posed on a bounded interval* // Bol. Soc. Paran. Mat. (3s.), **28** (2010), No. 1, 67–77.

[22] А. В. Фаминский, Р. В. Кувшинов, *Начально-краевые задачи для обобщенного уравнения Кавахары* // Успехи матем. наук, **66** (2011), No. 4, 187–188.

[23] F. D. Araruna, R. A. Capistrano-Filho, G. G. Doronin, *Energy decay for the modified Kawahara equation posed in a bounded domain* // J. Math. Anal. Appl., **385** (2012), No. 2, 743–756.

[24] C. E. Kenig, G. Ponce, L. Vega, *Well-posedness of the initial value problem for the Korteweg–de Vries equation* // J. Amer. Math. Soc., **4** (1991), No. 2, 323–347.

[25] А. В. Фаминский, М. А. Опритова, *О задаче Коши для уравнения Кавахары* // Соврем. матем. Фунд. направл., **45** (2012), 132–150.

[26] O. P. V. Villagran, *Gain of regularity for a Korteweg–de Vries–Kawahara type equation* // Electronic. J. Differential Equ., **71** (2004), 1–24.

[27] А. В. Фаминский, *Смешанная задача в полуполосе для уравнения Кортевега–де Фриза и его обобщений* // Труды ММО, **51** (1988), 54–94.

[28] С. Н. Кружков, А. В. Фаминский, *Обобщенные решения задачи Коши для уравнения Кортевега–де Фриза* // Матем. сб., **120** (1983), No. 3, 396–425.

[29] А. В. Фаминский, *Задача Коши для уравнения Кортевега–де Фриза и его обобщений* // Труды сем. им. И.Г. Петровского, **13** (1988), 56–105.

[30] M. M. Cavalcanti, V. N. Domingos Cavalcanti, A. Faminskii, F. Natali, *Decay of solutions to damped Korteweg–de Vries equation* // Appl. Math. Optim., **65** (2012), No. 2, 221–251.

[31] F. Linares, A. F. Pazoto, *Asymptotic behavior of the Korteweg–de Vries equation posed in a quarter plane* // J. Differential Equ., **246** (2009), 1342–1353.

[32] В. С. Владимиров, *Обобщенные функции в математической физике*, Москва, Наука, 1979.

[33] С. Н. Кружков, А. В. Фаминский, *О свойствах непрерывности решений некоторых классов нестационарных уравнений* // Вестник Моск. ун-та, сер. 1 матем. мех., **3** (1983), 29–36.

[34] Н. А. Шананин, *О частичной квазианалитичности обобщенных решений слабо нелинейных дифференциальных уравнений со взвешенными производными*, Матем. заметки, **68** (2000), No. 4, 608–619.

Сведения об авторах

Мария Александровна Опритова, Андрей Вадимович Фаминский

Российский университет дружбы народов,
ул. Миклухо-Маклая 6,
Москва, 117198,
Россия
E-Mail: upi23@mail.ru,
afaminskii@sci.pfu.edu.ru