Український математичний вісник
Том 11 **(2014)**, № 2, 240 – 249

Об одной обратной краевой задаче для псевдопараболического уравнения третьего порядка с интегральным условием первого рода

Яшар Т. Мегралиев, Гюльшан Х. Шафиева

(*Представлена А. Е. Шишковим*)

Аннотация. В этой статье рассмотрена обратная краевая задача для псевдопараболического уравнения третьего порядка с интегральным условием. Сначала исходная задача сводится к эквивалентной (в определённом смысле) задаче, для которой доказывается теорема о существовании и единственности решения. Далее, пользуясь этими фактами, доказываются существование и единственность классического решения исходной задачи.

2010 MSC. 35A02.

Ключевые слова и фразы. Краевая задача, классическое решение, метод Фурье.

Введение

Известно немало случаев, когда потребности практики приводят к задачам определения коэффициентов или правой части дифференциального уравнения по некоторым известным данным от его решения. Такие задачи получили название обратных задач математической физики. Обратные задачи возникают в самых различных областях человеческой деятельности таких, как сейсмология, разведка полезных ископаемых, биология, медицина, контроль качества промышленных изделий и т.д., что ставит их в ряд актуальных проблем современной математики. Различные обратные задачи для отдельных типов дифференциальных уравнений в частных производных изучались во многих работах. Отметим здесь, прежде всего работы А. Н. Тихонова [1], М. М. Лаврентьева [2, 3], А. М. Денисова [4], Н. И. Иванчова [5] и их учеников.

Статья поступила в редакцию 2.04.2012

ISSN 1810 – 3200.

В настоящее время весьма активно изучаются и вызывают большой практический и теоретический интерес исследования локальных и нелокальных краевых задач для псевдопараболических уравнений из-за того, что прикладные задачи физики, механики, биологии сводятся к таким уравнениям. Исследованы новые нелокальные обратные задачи для псевдопараболических уравнений третьего порядка общего вида с переменными коэффициентами [6, 7].

Целью данной работы является доказательство единственности и существования решений обратной краевой задачи для псевдопараболического уравнения третьего порядка с однородным интегральным условием первого рода.

Обратные задачи с интегральным условием переопределения для параболических уравнений были исследованы в работах [8–12].

Интегральные условия встречаются при исследовании физических явлений в случае, когда граница области протекания процесса недоступна для непосредственных измерений. Примером могут служить задачи, возникающие при исследовании диффузии частиц в турбулентной плазме [13], процессов распространения тепла [14, 15], процесса влагопереноса в капиллярно-простых средах [16].

1. Постановка задачи и её сведение к эквивалентной задаче

Рассмотрим для уравнения

$$u_t(x,t) - bu_{txx}(x,t) - a(t)u_{xx}(x,t) = p(t)u(x,t) + f(x,t), \tag{1.1}$$

в области $D_T = \{(x,t) : 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant t \leqslant T\}$, обратную краевую задачу с начальным условием

$$u(x,0) = \varphi(x) \quad (0 \leqslant x \leqslant 1), \tag{1.2}$$

граничным условием Неймана

$$u_x(0,t) = 0 \quad (0 \leqslant t \leqslant T), \tag{1.3}$$

интегральным условием

$$\int_0^1 u(x,t)\,dx = 0 \quad (0 \leqslant t \leqslant T) \tag{1.4}$$

и с дополнительным условием

$$\alpha u(0,t) + \beta u(1,t) = h(t) \quad (0 \leqslant t \leqslant T), \tag{1.5}$$

где $\alpha, \beta, b > 0$ — заданные числа $(\alpha^2 + \beta^2 \neq 0)$, $a(t) > 0$, $f(x,t)$, $\varphi(x)$, $h(t)$ — заданные функции, а $u(x,t)$ и $p(t)$ — искомые функции.

Определение 1.1. *Классическим решением задачи* (1.1)–(1.5) *назовём пару функций* $\{u(x,t), p(t)\}$, *обладающих следующими свойствами:*

1) *функция* $u(x,t)$ *непрерывна в* D_T *вместе со всеми своими производными, входящими в уравнение* (1.1);

2) *функция* $p(t)$ *непрерывна на* $[0,T]$;

3) *все условия* (1.1)–(1.5) *удовлетворяются в обычном смысле.*

Аналогично [17] можно доказать следующую лемму.

Лемма 1.1. *Пусть* $b > 0$, $0 < a(t) \in C[0,T]$, $\varphi(x) \in C[0,1]$, $f(x,t) \in C(D_T)$, $h(t) \in C^1[0,T]$, $h(t) \neq 0$, $\int_0^1 f(x,t)\,dx = 0$ $(0 \leqslant t \leqslant T)$, $\int_0^1 \varphi(x)\,dx = 0$, $\varphi'(1) = 0$, $\alpha\varphi(0) + \beta\varphi(1) = h(0)$.

Тогда задача нахождения классического решения задачи (1.1)–(1.5) *эквивалентна задаче определения функций* $u(x,t)$ *и* $p(t)$, *обладающих свойствами* 1) *и* 2) *определения решения задачи* (1.1)–(1.5), *из соотношений* (1.1)–(1.3) *и*

$$u_x(1,t) = 0 \quad (0 \leqslant t \leqslant T), \tag{1.6}$$

$$\begin{aligned} h'(t) - b\,(\alpha u_{txx}(0,t) + \beta u_{txx}(1,t)) - a(t)\,(\alpha u_{xx}(0,t) + \beta u_{xx}(1,t)) \\ = p(t)h(t) + \alpha f(0,t) + \beta f(1,t) \quad (0 \leqslant t \leqslant T). \end{aligned} \tag{1.7}$$

2. Исследование существования и единственности классического решения обратной краевой задачи

Первую компоненту $u(x,t)$ решения $\{u(x,t), p(t)\}$ задачи (1.1)–(1.3), (1.6), (1.7) будем искать в виде:

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(t) \cos\lambda_k x \quad (\lambda_k = k\pi), \tag{2.1}$$

где

$$u_k(t) = l_k \int_0^1 u(x,t) \cos\lambda_k x\,dx \quad (k = 0, 1, \dots),$$

причём
$$l_k = \begin{cases} 1, & \text{при } k = 0, \\ 2, & \text{при } k = 1, 2, \dots . \end{cases}$$

Тогда, применяя формальную схему метода Фурье, из (1.1), (1.2), получаем:
$$(1 + b\lambda_k^2)u_k'(t) + a(t)\lambda_k^2 u_k(t) = F_k(t; u, p) \quad (0 \leqslant t \leqslant T;\ k = 0, 1, \dots), \tag{2.2}$$
$$u_k(0) = \varphi_k \quad (k = 0, 1, \ldots), \tag{2.3}$$

где
$$F_k(t; u, p) = f_k(t) + p(t)u_k(t), \quad f_k(t) = l_k \int_0^1 f(x,t) \cos \lambda_k x \, dx,$$
$$\varphi_k = l_k \int_0^1 \varphi(x) \cos \lambda_k x \, dx \quad (k = 0, 1, \ldots).$$

Решая задачу (2.2), (2.3), находим:
$$u_0(t) = \varphi_0 + \int_0^t F_0(\tau; u, p) \, d\tau \ \ (0 \leqslant t \leqslant T), \tag{2.4}$$
$$u_k(t) = \varphi_k e^{-\int_0^t \frac{a(s)\lambda_k^2}{1+b\lambda_k^2} ds} + \frac{1}{1 + b\lambda_k^2} \int_0^t F_k(\tau; u, p) e^{-\int_\tau^t \frac{a(s)\lambda_k^2}{1+b\lambda_k^2} ds} d\tau \quad (0 \leqslant t \leqslant T;\ k = 1, 2, \ldots). \tag{2.5}$$

После подстановки выражений $u_k(t)$ $(k = 0, 1, \dots)$ в (2.1), для определения компоненты $u(x,t)$ решения задачи (1.1)–(1.3), (1.6), (1.7), получаем:
$$u(x,t) = \varphi_0 + \int_0^t F_0(\tau; u, p) \, d\tau + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\varphi_k e^{-\int_0^t \frac{a(s)\lambda_k^2}{1+b\lambda_k^2} ds} + \frac{1}{1 + b\lambda_k^2} \int_0^t F_k(\tau; u, p) e^{-\int_\tau^t \frac{a(s)\lambda_k^2}{1+b\lambda_k^2} ds} d\tau \right] \cos \lambda_k x, \tag{2.6}$$

где

$$F_k(t;u,p) = f_k(t) + p(t)u_k(t)$$
$$= l_k \int_0^1 \left(f\left(x,t\right) + p\left(t\right)u\left(x,t\right)\right)\cos\lambda_k x\,dx \quad (k = 0, 1, \ldots).$$

Теперь из (1.7), с учётом (2.1), имеем:

$$p(t) = h^{-1}(t)\Bigg\{h'(t) - \alpha f(0,t) - \beta f(1,t)$$
$$+ \sum_{k=1}^{\infty}\left(\alpha + \beta\left(-1\right)^k\right)\left(b\lambda_k^2 u_k'(t) + a(t)\lambda_k^2 u_k(t)\right)\Bigg\}. \quad (2.7)$$

Далее, используя (2.5) из (2.2), получаем:

$$b\lambda_k^2 u_k'(t) + a(t)\lambda_k^2 u_k(t) = F_k(t;u,p) - u_k'(t) = \frac{b\lambda_k^2}{1+b\lambda_k^2}F_k(t;u,p)$$
$$+ \frac{a(t)\lambda_k^2}{1+b\lambda_k^2}\left[\varphi_k e^{-\int\limits_0^t \frac{a(s)\lambda_k^2}{1+b\lambda_k^2}\,ds} + \frac{1}{1+b\lambda_k^2}\int_0^t F_k(\tau;u,p)e^{-\int\limits_\tau^t \frac{a(s)\lambda_k^2}{1+b\lambda_k^2}\,ds}d\tau\right]$$
$$(k = 1, 2, \ldots). \quad (2.8)$$

Тогда, учитывая (2.8) из (2.7), находим:

$$p(t) = h^{-1}(t)\Bigg\{h'(t) - \alpha f(0,t) - \beta f(1,t)$$
$$+ \sum_{k=1}^{\infty}\left(\alpha + \beta\left(-1\right)^k\right)\Bigg[\frac{b\lambda_k^2}{1+b\lambda_k^2}F_k(t;u,p) + \frac{a(t)\lambda_k^2}{1+b\lambda_k^2}$$
$$\times\left(\varphi_k e^{-\int\limits_0^t \frac{a(s)\lambda_k^2}{1+b\lambda_k^2}\,ds} + \frac{1}{1+b\lambda_k^2}\int_0^t F_k(\tau;u,p)e^{-\int\limits_\tau^t \frac{a(s)\lambda_k^2}{1+b\lambda_k^2}\,ds}d\tau\right)\Bigg]\Bigg\}, \quad (2.9)$$

где

$$F_k(t;u,p) = f_k(t) + p(t)u_k(t)$$
$$= 2\int_0^1 \left(f\left(x,t\right) + p\left(t\right)u\left(x,t\right)\right)\cos\lambda_k x\,dx \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Таким образом, решение задачи (1.1)–(1.3), (1.6), (1.7) свелось к решению системы (2.6), (2.9) относительно неизвестных функций $u(x,t)$ и $p(t)$.

Аналогично [18] можно доказать следующую лемму.

Лемма 2.1. *Если* $\{u(x,t),\, p(t)\}$ *— любое решение задачи* (1.1)–(1.3), (1.6)*, то функции*

$$u_k(t) = l_k \int\limits_0^1 u(x,t)\cos\lambda_k x\, dx \quad (k = 0, 1, \dots)$$

удовлетворяют системе, состоящей из уравнений (2.4)*,* (2.5)*.*

Следствие 2.1. *Пусть решение системы* (2.6)*,* (2.9) *единственное. Тогда задача* (1.1)–(1.3)*,* (1.6)*,* (1.7) *не может иметь более одного решения, т.е., если задача* (1.1)–(1.3)*,* (1.6)*,* (1.7) *имеет решение, то оно единственно.*

С целью исследования задачи (1.1)–(1.3), (1.6), (1.7) рассмотрим следующие пространства.

Обозначим через $B^{\alpha}_{2,T}$ [19] совокупность всех функций вида

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(t)\cos\lambda_k x \quad (\lambda_k = k\pi),$$

рассматриваемых в D_T, где каждая из функций $u_k(t)$ $(k = 0, 1, \dots)$ непрерывна на $[0,T]$ и

$$J(u) = \|u_0(t)\|_{C[0,T]} + \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \left(\lambda_k^{\alpha} \|u_k(t)\|_{C[0,T]} \right)^2 \right\}^{1/2} < +\infty,$$

причём $\alpha \geqslant 0$. Норму в этом множестве определим так:

$$\|u(x,t)\|_{B^{\alpha}_{2,T}} = J(u).$$

Известно [19], что $B^{\alpha}_{2,T}$ является банаховым пространством.

Через E^{α}_T обозначим пространство $B^{\alpha}_{2,T} \times C[0,T]$ вектор-функций $z(x,t) = \{u(x,t),\, p(t)\}$ с нормой

$$\|z(x,t)\|_{E^{\alpha}_T} = \|u(x,t)\|_{B^{\alpha}_{2,T}} + \|p(t)\|_{C[0,T]}\,.$$

Очевидно, что E^{α}_T также является банаховым пространством.

Теперь рассмотрим в пространстве E^3_T оператор

$$\Phi(u,p) = \{P(u,p), H(u,p)\}\,,$$

где

$$P(u,p) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(t)\cos\lambda_k x,$$

а $P_0(t), P_k(t)$ $(k = 1, 2, \dots)$, $H(u,p)$ равны соответственно правым частям (2.4), (2.5) и (2.9).

Предположим, что данные задачи (1.1)–(1.3), (1.6), (1.7), удовлетворяют следующим условиям:

1 . $\varphi(x) \in C^2[0,1]$, $\varphi'''(x) \in L_2(0,1)$, $\varphi'(0) = \varphi'(1) = 0$.

2. $f(x,t) \in C(D_T)$, $f_x(x,t) \in L_2(D_T)$.

3. $b > 0$, $0 < a(t) \in C[0,T]$, $h(t) \in C^1[0,T]$, $h(t) \neq 0$ $(0 \leqslant t \leqslant T)$.

Тогда из (2.4), (2.5) и (2.9), имеем:

$$\|P(u,p)\|_{B^3_{2,T}} \leqslant A_1(T) + B_1(T)\,\|p(t)\|_{C[0,T]}\,\|u(x,t)\|_{B^3_{2,T}}\,, \tag{2.10}$$

$$\|H(u,p)\|_{C[0,T]} \leqslant A_2(T) + B_2(T)\,\|p(t)\|_{C[0,T]}\,\|u(x,t)\|_{B^3_{2,T}}\,, \tag{2.11}$$

где

$$A_1(T) = \|\varphi(x)\|_{L_2(0,1)} + \sqrt{T}\,\|f(x,t)\|_{L_2(D_T)} + \sqrt{3}\,\left\|\varphi'''(x)\right\|_{L_2(0,1)} + \frac{\sqrt{3}}{b}\sqrt{T}\,\|f_x(x,t)\|_{L_2(D_T)}\,,$$

$$B_1(T) = \Big(1 + \frac{\sqrt{3}}{b}\Big)T,$$

$$A_2(T) = \left\|h^{-1}(t)\right\|_{C[0,T]} \Big\{\left\|h'(t) - \alpha f(0,t) - \beta f(1,t)\right\|_{C[0,T]} + \frac{|\alpha| + |\beta|}{\sqrt{6}}\left\|\|f_x(x,t)\|_{C[0,T]}\right\|_{L_2(0,1)} + \frac{|\alpha| + |\beta|}{\sqrt{6}}\left\|\varphi'(x)\right\|_{L_2(0,1)} + \frac{1}{b\sqrt{6}}\,\|a(t)\|_{C[0,T]}\Big(\left\|\varphi'(x)\right\|_{L_2(0,1)} + \|f(x,t)\|_{L_2(D_T)}\Big)\Big\},$$

$$B_2(T) = \frac{|\alpha| + |\beta|}{\sqrt{6}}\Big(1 + \frac{1}{b^2}T\,\|a(t)\|_{C[0,T]}\Big)\left\|h^{-1}(t)\right\|_{C[0,T]}\,.$$

Из неравенств (2.10), (2.11) заключаем:

$$\|P(u,p)\|_{B^3_{2,T}} + \|H(u,p)\|_{C[0,T]} \leqslant A(T) + B(T)\,\|p(t)\|_{C[0,T]}\,\|u(x,t)\|_{B^3_{2,T}}\,, \tag{2.12}$$

где

$$A(T) = A_1(T) + A_2(T), \quad B(T) = B_1(T) + B_2(T).$$

Итак, можно доказать следующую теорему.

Теорема 2.1. *Пусть выполнены условия* 1–3 *и*

$$(A(T)+2)^2 B(T) < 1. \tag{2.13}$$

Тогда задача (1.1)–(1.3), (1.6), (1.7) *имеет в шаре* K_R ($\|z\|_{E^3_T} \leqslant R = A(T)+2$) *пространства* E^3_T *единственное решение.*

Замечание 2.1. Неравенство (20) удовлетворяется при достаточно малых значениях $T + \left\|h^{-1}(t)\right\|_{C[0,T]}$.

Доказательство. В пространстве E^3_T рассмотрим уравнение

$$z = \Phi z, \tag{2.14}$$

где $z = \{u, p\}$, а компоненты $P(u,p), H(u,p)$ оператора $\Phi(u,p)$, определены правыми частями уравнений (2.6) и (2.9).

Рассмотрим оператор $\Phi(u,p)$ в шаре K_R из E^3_T. Аналогично [17], в силу (2.12), можно показать, что оператор Φ действует в шаре K_R и является сжимающим. Поэтому, в шаре K_R оператор Φ имеет единственную неподвижную точку $\{u, p\}$, которая является единственным в шаре K_R решением уравнения (2.14), т.е. является единственным в шаре K_R решением системы (2.6), (2.9).

Функция $u(x,t)$, как элемент пространства $B^3_{2,T}$, непрерывна и имеет непрерывные производные $u_x(x,t)$, $u_{xx}(x,t)$ в D_T.

Легко проверить, что $u_t(x,t)$ и $u_{txx}(x,t)$ непрерывны в D_T и уравнение (1.1), условия (1.2), (1.3), (1.6), (1.7) удовлетворяются в обычном смысле. Следовательно, $\{u(x,t), p(t)\}$ является решением задачи (1.1)–(1.3), (1.6), (1.7). В силу следствия леммы 2.1 оно единственно в шаре K_R. Теорема доказана. □

С помощью леммы 1.1, из последней теоремы вытекает однозначная разрешимость исходной задачи (1.1)–(1.5).

Теорема 2.2. *Пусть выполняются все условия теоремы* 2.1 *и*

$$\int\limits_0^1 \varphi(x)\,dx = 0, \quad \int\limits_0^1 f(x,t)\,dx = 0 \quad (0 \leqslant t \leqslant T),$$

$$\alpha\varphi(0) + \beta\varphi(1) = h(0).$$

Тогда задача (1.1)–(1.5) *имеет в шаре* K_R ($\|z\|_{E^3_T} \leqslant R = A(T)+2$) *из* E^3_T *единственное классическое решение.*

Литература

[1] А. И. Тихонов, *Об устойчивости обратных задач* // Докл. АН СССР, **39** (1943), No. 5, 195–198.

[2] М. М. Лаврентьев, *Об одной обратной задаче для волнового уравнения* // Докл. АН СССР, **157** (1964), No. 3, 520–521.

[3] М. М. Лаврентьев, В. Г. Романов, С. Т. Шишатский, *Некорректные задачи математической физики и анализа*, М: Наука, 1980.

[4] А. М. Денисов, *Введение в теорию обратных задач*, М: Наука, М: МГУ, 1994.

[5] M. I. Ivanchov, *Inverse Problems for Equation of Parabolic Type*, VNTL Publishers, Lviv, Ukraine, 2003.

[6] А. И. Кожанов, *О разрешимости коэффициентных обратных задач для некоторых уравнений соболевского типа* // Научные ведомости Белгородского государственного университета, Серия: Математика. Физика, **5** (2010), No. 18, 88–98.

[7] С. Г. Пятков, *О разрешимости некоторых классов обратных задач* // Информационные технологии и обратные задачи рационального природопользования, Ханты-Мансийск: Югорский НИИ информационных технологий, 2005, 61–66.

[8] M. I. Ivanchov, N. V. Pabyrivs'ka, *Simultaneous determination of two coefficients of a parabolic equation in the case of nonlocal and integral conditions* // Ukrainian Mathematical Journal, **53** (2001), No. 5, 674–684.

[9] M.I. Ivanchov, *Inverse problem with free boundary for heat equation* // Ukrainian Mathematical Journal, **55** (2003), No. 7, 1086–1098.

[10] A. I. Prilepko, D. G. Orlovsky, I. A. Vasin, *Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics*, NewYork; Basel: MarcelDekkerInc., 2000.

[11] В.Л. Камынин, *Об обратной задаче определения правой части в параболическом уравнении с условием интегрального переопределения* // Мат. заметки, **77** (2005), 522–534.

[12] А.И. Кожанов, *Параболические уравнения с неизвестными коэффициентами, зависящими от времени* // Журнал вычислительной математики и математической физики, **45** (2005), No. 12, 2168–2184.

[13] А. А. Самарский, *О некоторых проблемах теории дифференциальных уравнений* // Дифференциальные уравнения, **16** (1980), No. 11, 1925–1935.

[14] J. R. Cannon, *The solution of the heat equation subject to the specification of energy* // Quart. Appl. Math., **5** (1963), No. 21, 155–160.

[15] Н. И. Ионкин, *Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием* // Дифференциальные уравнения, **13** (1977), No. 2, 294–304.

[16] А. М. Нахушев, *Об одном приближённом методе решения краевых задач для дифференциальных уравнений и его приближения к динамике почвенной влаги и грунтовых вод* // Дифференциальные уравнения, **18** (1982), No. 1, 72–81.

[17] Я. Т. Мегралиев, *Обратная краевая задача для дифференциального уравнения с частными производными четвертого порядка с интегральным условием* // Вестник ЮУрГУ. Серия Математика. Механика. Физика, (2011), No. 5, 51–56.

[18] Я. Т. Мегралиев, *Обратная краевая задача для эллиптического уравнения второго порядка с дополнительным интегральным условием* // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки, 2012, вып. 1, 32–40.

[19] К. И. Худавердиев, А. А. Велиев, *Исследование одномерной смешанной задачи для одного класса псевдогиперболических уравнений третьего порядка с нелинейной операторной правой частью*, Баку: Чашыоглы, 2010.

Сведения об авторах

Яшар Т. Мегралиев, Гюльшан Х. Шафиева

Бакинский государственный университет
ул. Академика Захид Халилова 23,
AZ 1148, Баку, AZ-1073/1
Азербайджанская Республика
E-Mail: yashar_aze@mail.ru, gulshan.shafiyeva@mail.ru